épsilon
Revista de Educación Matemática
Editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales

"El rápido avance tecnológico supera a la investigación en Educación Matemática"

Borba, M. C. y colaboradores

119
2025

epsilon

Revista de Educación Matemática

119

2025

Equipo Editorial

Burgos Navarro, María José
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín
Cecilia Gámiz, Lina María
Conde Fernández, Silvia
Contreras García, José Miguel
Cruz, María Florencia
España Pérez, Francisco
Fernández Plaza, Jose Antonio
Flores Lamolda, Lucía
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Jiménez, Sandra
Gámez Valero, Carmen
García Schiaffino, Margarita
Garzón Guerrero, José Antonio
López Centella, Esperanza
Lupiáñez Gómez, José Luis
Molina Muñoz, David
Molina Portillo, Elena
Montejo Gámez, Jesús
Moreno Verdejo, Antonio
Partal García, Daniel
Pérez Martos, María del Carmen
Ramírez Uclés, Rafael
Rivas Olivo, Mauro Alfredo
Rodríguez González, Miguel
Roquette Rodríguez, Esther
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Tizón Escamilla, Nicolás
Valero Terrón, Iván
Villegas Escobar, Adela María

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro
Torre Central, 4ª planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Teléfono: 956012833
Email: thales.matematicas@uca.es

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN
2340-714X

Período
2025

Suscripción
Anual

epsilon

ÍNDICE / CONTENTS

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EXPERIENCIAS DE AULA

ACTIVIDADES EN LA SAEM THALES

Epsilon – Revista de Educación Matemática *2025, nº 119, 7-19*
Sección: Aportes desde la investigación en Educación Matemática

Modelización del rendimiento matemático mediante análisis discriminante

Antonio Humberto Closas
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina, *hclosas@hotmail.com*

Edgardo Alberto Arriola
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, *earriola2006@ca.frre.utn.edu.ar*

Mariela Rosana Amarilla
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, *profe.amarilla@ca.frre.utn.edu.ar*

Ethel Carina Jovanovich
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina, *carijovanovich@ca.frre.utn.edu.ar*

Resumen: *El objetivo de este estudio consiste en proponer un modelo estadístico que permita explicar de qué manera se relacionan algunas variables personales y contextuales con el rendimiento matemático de estudiantes de Ingeniería. La muestra está compuesta por 142 jóvenes matriculados en distintas carreras que se imparten en un centro educativo tecnológico de la región nordeste de Argentina. El diseño metodológico es de corte transversal, línea cuantitativa y estilo correlacional. Los resultados obtenidos en la fase empírica permitieron contrastar que el modelo propuesto se ajusta a los datos muestrales y resulta de utilidad para clasificar el rendimiento en Matemáticas de nuevos individuos.*

Palabras clave: *Desempeño académico, Factores personales y contextuales, Estudiantes universitarios, Modelado estadístico.*

Modelling of mathematical performance using discriminant analysis

Abstract: *The aim of this study is to propose a statistical model that allows explaining how some personal and contextual variables are related to the mathematical performance of engineering students. The sample consisted of 142 young people enrolled in different courses of study taught in an technological educational center in the northeast region of Argentina. The methodological design is cross-sectional, quantitative and correlational. The results obtained in the empirical phase allowed us to verify that the proposed model fits the sample data and is useful for classifying the mathematics performance of new individuals.*

Key words: *Academic performance, Personal and contextual factors, University students, Statistical modelling.*

1. INTRODUCCIÓN

En la región nordeste de Argentina, entre las dificultades que se presentan al principio de la etapa académica, en distintas áreas de conocimiento, se encuentran los altos índices de

Cómo citar: Closas, A. H., Arriola, E. A., Amarilla, M. R. y Jovanovich, E. C. (2025). Modelización del rendimiento matemático mediante análisis discriminante. *Epsilon*, *119*, 7-19.

suspensos, los cuales en buena medida se deben a inconvenientes en la adaptación de los estudiantes a las exigencias curriculares que demanda el nivel educativo universitario.

A esta realidad, se le suma el hecho de que los jóvenes tampoco realizan aquellas actividades que les permitiría lograr aprendizajes acordes a las circunstancias, todo lo cual genera que muchos de ellos decidan no continuar los estudios iniciados o elijan cambiar de carrera.

El escenario que se origina debido a los bajos resultados educativos, por los suspensos, la no promoción o la deserción, claramente conlleva un importante costo social y económico tanto para la familia como para el Estado; lo cual es muy relevante, puesto que la educación constituye un sector estratégico que incide directa e invariablemente en el progreso de la sociedad y representa uno de los pilares principales para el desarrollo de cualquier Nación (Devincenzi et al., 2017).

También, la problemática descripta ha sido observada por los autores de este trabajo en virtud de la experiencia de muchos años en el proceso de enseñanza de Matemáticas, y de otras asignaturas del ciclo básico común, que se imparten en el centro educativo del cual procede la muestra, así como en distintos ámbitos académicos de su área de incumbencia.

De acuerdo con Delors (1997), el bajo rendimiento educativo es un fenómeno tan preocupante en el plano humano, moral y social que muy a menudo ocasiona exclusiones que estarán presentes en los jóvenes durante toda su vida. Por el contrario, la efectividad en el proceso educativo es un factor de bienestar a distintos niveles, propicia el crecimiento de los países, la viabilidad de las instituciones educativas, como también la prosperidad social y personal.

Si bien el rendimiento de los estudiantes se encuentra relacionado con variables de índole personal o individual que, de un modo u otro, participan y lo generan, existen otras variables de tipo contextual o ambiental que deberían tenerse en cuenta a efectos de conformar un conjunto de determinantes que permitan esclarecer mediante un enfoque integral las razones que ocasionan el desempeño académico.

En un interesante trabajo, Pintrich (2003) aboga por la necesidad de desarrollar modelos holísticos y de llevar a cabo investigaciones empíricas en las que explícitamente se estudien las interacciones e interrelaciones entre los distintos componentes que participan (motivacionales, cognitivos y relativos al contexto de aprendizaje).

En esta línea, se conocen diversos trabajos que analizan, mediante técnicas estadísticas multivariadas, de qué manera y en qué medida las variables atinentes al individuo (aptitudinales, emocionales, cognitivas, etc.), como aquellas que dependen del entorno (familiares, socioculturales, institucionales, etc.), se relacionan con los resultados educativos de los estudiantes (Doménech et al., 2004; González-Pienda et al., 2003; Kassarnig et al., 2018; Reynolds y Walberg, 1992; Schnitzler et al., 2021).

En este marco, el objetivo principal del presente estudio consiste en proponer un modelo, elaborado mediante la técnica estadística denominada análisis discriminante, que explique de qué manera se relacionan ciertas variables personales y contextuales con el rendimiento académico de estudiantes de Ingeniería, en el ámbito de una asignatura del área de Matemáticas.

En términos generales, un modelo es una representación abstracta y compacta de un sistema que permite describir y analizar su comportamiento (Voght, 1993). En este sentido, la modelización estadística es un recurso metodológico que resulta de utilidad para abordar el tratamiento de un fenómeno, como es el bajo rendimiento académico, puesto que da lugar a conceptualizar y comunicar sus dinámicas de una forma coherente.

Una característica central que posee el modelo que se plantea en este estudio es que posibilita explicar los datos recogidos, así como predecir observaciones futuras, lo cual contribuye no solo a comprender el problema, sino también a tomar decisiones con el objeto de prevenir las dificultades cognitivas en el área de conocimiento y, por ende, mejorar el desempeño educativo de los individuos de la población de la que fue seleccionada la muestra.

El modelo que será presentado en el marco de este estudio ha sido previamente contrastado en forma empírica. Para ello, fue necesario realizar una serie de estudios cuantitativos, propios de la técnica estadística que se utiliza, los cuales hicieron posible la estimación y validación de los coeficientes de la ecuación que mejor explique los datos muestrales (Hair et al., 2019). El trabajo de campo (aplicación de test y cuestionarios *ad hoc*), que permitió recoger los datos con los que se realizaron los diversos análisis estadísticos, tuvo lugar en el marco de la asignatura Análisis Matemático I (AMI). Esta materia es común a las carreras de Ingeniería (Sistemas de Información -ISI-, Electromecánica -IEM- y Química -IQ-) que se desarrollan en la Facultad Regional Resistencia (FRRe) de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Argentina.

El análisis discriminante es una técnica de dependencia que permite crear un modelo predictivo capaz de establecer la pertenencia de objetos a determinados grupos. El modelo está compuesto por una función discriminante, en el supuesto de que haya dos grupos (o, un conjunto de funciones discriminantes, si hubiera más de dos grupos), basada en combinaciones lineales de las variables predictoras, o independientes, que proporcionan la mejor discriminación posible entre los grupos previamente establecidos (en nuestro caso, aprobados y suspensos) por medio de la variable dependiente (en este estudio, el rendimiento matemático). En líneas generales, las funciones se generan a partir de una muestra de observaciones para los que se conoce el grupo de pertenencia; posteriormente, las funciones pueden ser aplicadas a nuevos casos que dispongan de mediciones para las variables predictoras, pero de los que se desconozca el grupo de pertenencia (Uriel y Aldás, 2005).

En vista de lo que antecede y en atención al objetivo propuesto, en esta investigación serán dos las variables que formarán parte del factor explicativo personal: a) el *autoconcepto académico*, y b) las *estrategias de aprendizaje*. A su vez, las variables que integrarán el factor explicativo contextual serán: c) los *aspectos sociofamiliares*, y d) el *clima de clase*. En tanto que, la variable dependiente, o que se desea explicar, del modelo discriminante que más adelante se pondrá a consideración será el *rendimiento académico* en el contexto de la asignatura AMI.

Existen diversas definiciones sobre el constructo motivacional autoconcepto académico; así por ejemplo podría decirse que es aquella variable en la que la implicación activa del sujeto en su proceso de aprendizaje se incrementa cuando se percibe autoeficiente (Sánchez León, 2023). En tanto que para Arrivillaga et al. (2023), el autoconcepto académico se refiere a la imagen que el individuo construye sobre su desempeño y nivel de éxito en el ámbito educativo.

La variable cognitiva *estrategias de aprendizaje*; por una parte, implica una secuencia de actividades u operaciones mentales dirigidas a facilitar el aprendizaje y, por otra, incluye procesos de toma de decisión por parte de los estudiantes de carácter consciente e intencional, ajustados al objetivo que pretenden conseguir (Beltrán, 2003).

El abordaje de la variable contextual *aspectos sociofamiliares* se realizará desde la perspectiva macrosociológica y estará centrada en tres cuestiones concretas: el estatus socioeconómico, el contexto sociocultural y los rasgos de la zona donde habita el estudiante.

La variable del entorno del alumno *clima de clase*, se define como la atmósfera general de la sala de clase que es percibida por los estudiantes; en ocasiones, incluye también la percepción de los profesores y, excepcionalmente, de otros miembros de la comunidad educativa.

Los indicadores de la variable *rendimiento académico* serán las calificaciones obtenidas por los estudiantes en tres instancias de evaluaciones parciales escritas teórico-prácticas correspondientes a la asignatura AMI.

A continuación, se encuentra la metodología implementada (participantes, procedimiento de aplicación, características de la investigación, instrumentos de medición utilizados, aspectos del análisis discriminante). Más adelante, se ofrecen los resultados obtenidos, su discusión y por último las conclusiones a las que se ha llegado tras la ejecución de este estudio.

2. MATERIALES Y MÉTODO

2.1. Participantes

La muestra estuvo compuesta por 5 grupos-clase (2 de ISI, 2 de IEM y 1 de IQ) de la asignatura AMI, los cuales totalizaron 142 jóvenes (45 mujeres y 97 hombres), pertenecientes a las tres carreras de Ingeniería que se imparten en la sede central de la FRRe-UTN.

La edad de los estudiantes que respondieron los ítems de la encuesta tuvo una media (*M*) de 19.75 años y desviación estándar (*DE*) de 1.42. Los datos que identifican a la muestra utilizada en este trabajo se ilustran en la Tabla 1.

El procedimiento empleado para extraer la muestra consistió en la combinación de tres métodos: a) estratificado, b) por conglomerados, y c) aleatorio simple (Lohr, 2019). El primer método fue de utilidad para definir las especialidades de Ingeniería que participarían en la investigación, el segundo a efectos de asumir que los clústeres estarían conformados por grupos-clase, y el tercero debido a que estos últimos (también llamados comisiones de estudio) pudieran ser elegidos al azar.

Tabla 1

Detalles relativos a la muestra empleada en la etapa empírica del estudio.

Turno	Carrera	Alumnos	Edad
Tarde y Noche	Ingeniería en Sistemas de Información	*n* = 40 jóvenes (10 mujeres, 30 hombres)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 20.08 *DE* = 1.31
Tarde y Noche	Ingeniería Electromecánica	*n* = 54 jóvenes (6 mujeres, 48 hombres)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 24 *M* = 19.93 *DE* = 1.49
Mañana	Ingeniería Química	*n* = 48 jóvenes (29 mujeres, 19 hombres)	*Mín.* = 18 *Máx.* = 23 *M* = 19.27 *DE* = 1.33

2.2. Procedimiento de aplicación

La aplicación de los tests y cuestionarios fue realizada por los docentes responsables en cada uno de los cinco clústeres que integran la muestra, al comienzo de la clase y durante un intervalo promedio de 20 minutos.

Concluido el trabajo de campo y el ordenamiento de la información obtenida, se procedió a la construcción de la matriz de datos en formato electrónico (en esta primera instancia se utilizó el programa MS Excel), así como a su posterior control estadístico general mediante el paquete IBM SPSS Statistics 26 (George y Mallery, 2020).

2.3. Características de la investigación

La elaboración de un modelo de causa-efecto, como el que será propuesto en este trabajo, requiere de diferentes variables y de distintos análisis estadísticos, en virtud de lo cual se detallan en forma breve en la Tabla 2, en el marco del generoso espectro metodológico disponible, los criterios y métodos que serán considerados y que caracterizan la presente investigación.

Tabla 2
Características de la investigación

Criterios	Métodos
Dado que el estudio está basado en las respuestas que se brindan al tema objeto de consulta tal como se presenta en su contexto real y en una única instancia.	No experimental Transversal
Teniendo presente el objetivo que se pretende conseguir y el modo de reunir la información para lograrlo.	Explicativo Encuesta
En atención a las características de los instrumentos de medición que se aplican.	Test Cuestionario
Si se tiene en cuenta el marco de recogida de los datos y la forma en que se analizan.	De campo Cuantitativa
Debido al interés por estudiar las asociaciones entre las variables que participan y la manera de relacionarlas mediante el modelado estadístico.	Correlacional Funcional

2.4. Instrumentos de medición

Con el objeto de reunir los datos de las variables explicativas, en este estudio se utilizó un instrumento de medida conformado por: a) prueba *autoconcepto académico* del test Autoconcepto Forma 5, elaborado por García y Musitu (2014), y b) tres cuestionarios diseñados especialmente para esta ocasión. El primero de ellos se empleó en la medición de la variable personal (de tipo cognitiva) *estrategias de aprendizaje en Matemática*, el segundo para evaluar la variable contextual (de perspectiva macrosociológica) *aspectos sociofamiliares*, y el tercero con la intención de medir la otra variable de contexto (de carácter educacional) *elementos del clima de clase*.

Los datos de la variable por modelar estuvieron conformados por el promedio de las notas alcanzadas por los alumnos encuestados en tres instancias de evaluaciones parciales escritas teórico-prácticas, relativas al actual régimen de promoción y modalidad de cursado de la asignatura AMI. Esta variable es de tipo continua, sus valores oscilan entre 1 (uno) y 10 (diez) puntos. Sin embargo, al momento de aplicar la técnica análisis discriminante se calcularon los promedios de las notas parciales, los cuales fueron luego recodificados como 1 (valores inferiores a 6) y 2 (valores iguales o superiores a 6).

Cada una de las pruebas que se emplearon para recoger los datos de las variables explicativas (fuentes de información primaria) fueron evaluadas inicialmente en forma cualitativa por un equipo de profesores del Área de Matemáticas del Departamento de Materias Básicas (FRRe–UTN), respecto de dos aspectos característicos en este tipo análisis: a) *indicadores de validez subjetivos o individuales*, y b) *indicadores de validez factorial o estructural*.

Luego de aplicar las encuestas y elaborar la base de datos en formato electrónico, se realizaron análisis estadísticos descriptivos (*ítems*, *puntuación*, *media –M–* y *desviación estándar –DE–*) y estudios del área de la psicometría; *consistencia interna* mediante los coeficientes α (alfa) de Cronbach (Cronbach, 1951) y ω (omega) de McDonald (McDonald, 1970), junto con sus respectivos intervalos de confianza al 95% (límite inferior −LI− y límite superior −LS−).

La consistencia interna, es una información de mucha utilidad; puesto que, además de permitir ponderar la fiabilidad (cuantía en que las medidas de las pruebas están libres de errores casuales o aleatorios) de las dimensiones del instrumento utilizado (ver Tabla 3), es considerada un indicador indirecto de la validez de constructo de la prueba y actualmente se evalúa a través de los coeficientes α de Cronbach y ω de McDonald (Vizioli y Pagano, 2022). El primero por ser un estadístico tradicional y el segundo con la intención de atenuar la utilización inadecuada del coeficiente α debido a posibles incumplimientos de sus supuestos paramétricos. Si bien, ambos coeficientes son conceptualmente semejantes, ω es más robusto y apropiado para estimar la consistencia interna cuando las respuestas a los ítems propuestos están planteadas a través de opciones valoradas en forma ordinal, como sucede en el cuestionario aplicado en esta investigación (Béland et al., 2018; Ventura León y Caycho-Rodríguez, 2017).

Tabla 3

Estadísticos descriptivos y de fiabilidad de los instrumentos utilizados.

Instrumento	Descriptivos				Fiabilidad					
	Ítems	Puntuación	*M*	*DE*	α	IC al 95%		ω	IC al 95%	
						LI	LS		LI	LS
Autoconcepto académico	6	Mín. = 0.10 Máx. = 8.92	5.03	2.06	.90	.87	.92	.91	.88	.93
Estrategias de aprendizaje	4	Mín. = 1.50 Máx. = 5.00	3.38	0.60	.65	.51	.77	.66	.53	.79
Aspectos sociofamiliares	3	Mín. = 1.00 Máx. = 5.00	2.89	0.91	.78	.66	.87	.83	.74	.93
Elementos del clima de clase	3	Mín. = 1.67 Máx. = 5.00	3.85	0.62	.61	.45	.75	.66	.51	.82

Respecto de la estimación puntual de los coeficientes α de Cronbach y ω de McDonald, se puede señalar que todos se encuentran por encima del valor .60, considerado suficiente en primeras fases de la investigación o estudios exploratorios (Huh et al., 2006; Nunnally, 1978), así como aceptable en instrumentos de medida con menos de 10 ítems (Loewenthal, 1996). Los valores de α y ω fueron calculados mediante el paquete JASP Team (2023).

En líneas generales, en virtud de la revisión cualitativa y del análisis de fiabilidad basado en las estimaciones obtenidas de los coeficientes α y ω, puede afirmarse que las pruebas analizadas poseen un desempeño psicométrico adecuado en el contexto de esta investigación.

2.5. Aspectos del análisis discriminante

A efectos de lograr el objetivo central de esta investigación se implementaron estudios cuantitativos que pertenecen al área de la estadística multivariante. En particular, en el contexto de las técnicas explicativas o de dependencia, como fuera anticipado, se ha elegido el análisis discriminante (véase Uriel y Aldás, 2005). Se trata de un procedimiento de reducción de datos mediante el cual es posible obtener funciones capaces de separar dos o más grupos de objetos, eventos o individuos (variable dependiente (*D*): no métrica –de tipo categórica–), tomando como base un conjunto de medidas sobre los mismos representadas por una serie de variables (independientes (X_i): métricas –escala de intervalos o escala de razón–).

La expresión funcional del análisis discriminante (AD) que permite diferenciar los datos muestrales es la que se observa en la ecuación (1):

$$D = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_i X_i + \ldots + \beta_p X_p \quad (1)$$

Esta función discriminante se utiliza en caso de que los coeficientes que se obtengan (β_i), luego de analizar los datos, sean no estandarizados. De lo contrario (coeficientes estandarizados), debe emplearse una expresión similar a la ecuación (1), pero sin el término constante (β_0).

Ahora bien, una vez que se obtienen los coeficientes estandarizados, los mismos resultan de utilidad para identificar cuáles son las variables que contribuyen en mayor medida a discriminar las observaciones muestrales. En cambio, los coeficientes no estandarizados se emplean para la construcción de una ecuación que permite obtener la ubicación de los *centroides* (valores medios de cada grupo), así como para clasificar los individuos en los grupos definidos a priori.

En virtud de lo que antecede, la aplicación de la técnica AD permitirá, una vez obtenida la ecuación que mejor se ajuste a la realidad objeto de estudio, clasificar el rendimiento académico de los estudiantes en los dos niveles, aprobados y suspensos, establecidos de antemano (rol explicativo del modelo). También, si fuera de interés, podría emplearse el modelo para caracterizar o diferenciar el rendimiento, en cada grupo, de nuevos individuos pertenecientes a la población de la que proviene la muestra seleccionada (finalidad predictiva del modelo).

Cabe señalar que los supuestos previos del AD son los mismos que los del análisis de regresión múltiple. En especial, debe cumplirse que la distribución de las variables independientes sea normal multivariante. No obstante, existe clara evidencia, tanto matemática como empírica, de que las pruebas con una sola variable dependiente son altamente robustas bajo la violación de los principios de normalidad y homocedasticidad, excepto cuando las muestras son muy pequeñas y desiguales (Hair et al., 2019; Rencher, 2002; Tabachnick y Fidell, 2013).

En el análisis multivariante, sostiene Harris (2001), la tendencia está en considerar que en muestras grandes (en general, mayores a 30 observaciones) sus métodos son suficientemente robustos como para ser insensibles a ligeras desviaciones de los supuestos estadísticos. Este hecho, permite que las técnicas que poseen esta característica sean más flexibles y, por ende, menos restrictivas a la hora de pensar en su posible aplicación, lo que es importante cuando los estudios utilizan evidencias empíricas, como ocurre en esta investigación.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta sección se inicia con la presentación de los resultados de ANOVAs univariados, para las cuatro variables independientes de este estudio, los cuales se muestran en la Tabla 4. En la misma, a continuación de lambda (λ) de Wilks, se encuentra el estadístico de prueba *F* de Fisher, junto con su grado de significación, a través del cual fue posible contrastar la hipótesis nula de igualdad de medias entre los grupos de la variable rendimiento matemático (Tabachnick y Fidell, 2013).

Tabla 4

Prueba de igualdad de medias entre grupos.

Variable	λ	*F*	Valor *p*
Autoconcepto académico	.88	17.74	.00
Estrategias de aprendizaje	.89	16.63	.00
Aspectos sociofamiliares	.94	7.86	.01
Elementos del clima de clase	.97	4.12	.04

Se puede ver que para un nivel de significación $\alpha = .05$, las cuatro variables independientes analizadas permiten rechazar la hipótesis nula. Cada una de ellas indica que existe diferencia significativa entre los dos grupos de alumnos que forman parte de la muestra (en todos los casos el estadístico *F* tiene asociado un valor $p < .05$).

En el test de homocedasticidad del modelo se utilizó el estadístico *M* de Box = 8.87, con el objeto de contrastar la hipótesis nula de que las matrices de covarianzas para cada grupo de la variable dependiente proceden de la misma población (Hair et al., 2019). En este caso, debido a que *M* tiene asociada una *F* de Fisher = .85 con un valor $p = .58$, es posible sostener que no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula, por lo cual se concluye que ambos grupos de alumnos (aprobados y suspensos) presentan la misma variabilidad; uno de los supuestos en los que se fundamenta la técnica, junto con la independencia de las observaciones y la normalidad multivariante de las variables discriminantes.

La prueba λ de Wilks se emplea para determinar si el modelo que se propone es válido (contraste de significación global). Para ello, se calculó $\lambda = .78$ y su valor transformado χ^2 de Pearson = 33.28, al cual le corresponde un valor $p = .00$, motivo por el que se puede decir que se rechaza la hipótesis nula de que los grupos comparados tienen promedios iguales en el conjunto de las cuatro variables discriminantes (Rencher, 2002). Luego, con un nivel de confianza del 95%, se tiene evidencia suficiente para sostener que el modelo posee validez estadística, debido a que el valor *p* resultó menor que .05.

Los estadísticos *M* de Box y λ de Wilks, fueron convertidos en valores que siguen distribuciones *F* de Fisher y χ^2 de Pearson, respectivamente, con el objeto de que sea posible llevar a cabo la prueba de hipótesis inherente a cada uno de ellos.

La Tabla 5 contiene una versión estandarizada (cada una de las variables clasificadoras poseen $M = 0$ y $DE = 1$) de los coeficientes de la función canónica discriminante. Estos coeficientes tienen la característica de ser independientes de la métrica original de las variables predictoras, lo cual evita que haya problemas de interpretación que pueden presentarse cuando los ítems poseen distinta escala de medida, tal como sucede en esta investigación.

Tabla 5

Coeficientes estandarizados de la función canónica discriminante.

Variable	V_1 = Autoconcepto académico	V_2 = Estrategias de aprendizaje	V_3 = Aspectos sociofamiliares	V_4 = Elementos del clima de clase
Magnitud	.64	.48	.37	–.56

La magnitud de los coeficientes estandarizados es un indicador de la importancia que tiene cada variable en el cálculo de la función discriminante. En este sentido, se observa que la variable *Autoconcepto académico* tiene una influencia superior (β_1 = .64) a la ejercida por las demás variables independientes, a la hora de explicar o predecir el grupo de pertenencia de los estudiantes (Aprobados –A–, Suspensos –S–).

El signo positivo del coeficiente de las variables discriminantes V_1, V_2 y V_3, significa que los alumnos con buen rendimiento matemático han optado por seleccionar valores medios o altos a la hora de responder los ítems que respectivamente las conforman.

Por el contrario, el signo negativo del coeficiente de V_4 (β_4 = –.56) está indicando que los estudiantes con buen rendimiento en Matemáticas puntuaron bajo las respuestas a los ítems que integran esta variable latente.

A partir de la ecuación (1) y utilizando los coeficientes que aparecen en la Tabla 5, la función discriminante relativa al presente estudio es la que se aprecia en la ecuación (2):

$$D_{\text{A-S}} = .64\,V_1 + .48\,V_2 + .37\,V_3 - .56\,V_4 \tag{2}$$

En la Tabla 6 se observa, para las cuatro variables independientes, la *media* por separado para el grupo de aprobados, n_1 = 39, y suspensos, n_2 = 103, así como la *magnitud* de los coeficientes no estandarizados de la función discriminante.

Tabla 6

Valores medios y coeficientes no estandarizados de la función discriminante.

Variable	V_1 = Autoconcepto académico	V_2 = Estrategias de aprendizaje	V_3 = Aspectos sociofamiliares	V_4 = Elementos del clima de clase
Aprobados	6.14	3.69	3.13	3.72
Suspensos	4.61	3.26	2.79	3.89
Magnitud	.33	.83	.41	–.90

En caso de utilizar los coeficientes no estandarizados, la función discriminante resultará como se muestra en la ecuación (3) (advertir la presencia del término constante β_0 = –2.18, el cual es exclusivo para este tipo de función discriminante –ver ecuación (1)–; es decir, no estandarizada):

$$D_{\text{A-S}} = -2.18 + .33\,V_1 + .83\,V_2 + .41\,V_3 - .90\,V_4 \tag{3}$$

La evaluación de la ecuación (3) en los valores medio de cada variable explicativa en los grupos A y S (definidos a priori en la variable *Rendimiento matemático*), dará la posibilidad de obtener la ubicación de los respectivos centroides (cabe señalar que el programa SPSS brinda estos valores, aunque igualmente se realiza la explicación a efectos de mostrar una interesante utilidad de los coeficientes no estandarizados).

$$D_{\text{A}} = -2.18 + .33\times6.14 + .83\times3.69 + .41\times3.13 - .90\times3.72 = .84 \tag{4}$$

$$D_{\text{S}} = -2.18 + .33\times4.61 + .83\times3.26 + .41\times2.79 - .90\times3.89 = -.32 \tag{5}$$

Se observa que para el grupo de alumnos *aprobados* se obtiene, en promedio, una puntuación positiva en la función discriminante (D_A = .84). En cambio, en el grupo de estudiantes *suspensos*, se obtiene una puntuación media negativa (D_S = –.32).

Los centroides –puntuaciones medias de cada grupo a través de la ecuación (3)– resultan de gran utilidad para interpretar los valores de la función discriminante. Así, por ejemplo, si se desconociera el rendimiento académico de un alumno, pero se dispone de los datos de las variables independientes, se podría calcular la puntuación discriminante por medio de la ecuación (3) (finalidad predictiva del modelo discriminante). Posteriormente, a partir del valor que se obtenga, se procedería a clasificar o asignar el individuo al grupo de cuyo centroide se encuentre más próximo. Esto es, si el valor calculado por medio de la ecuación (3) resulta positivo el alumno debería ser clasificado en el grupo de aprobados; por el contrario, si fuera negativo, el estudiante corresponde que sea asignado al grupo de suspensos.

Si bien hasta el momento se ha logrado obtener el modelo discriminante, ecuación (3), así como identificar cuáles son las variables que poseen más poder para explicar el grupo de pertenencia de los individuos, ecuación (2); la mayor utilidad de una función discriminante radica en su capacidad para clasificar nuevos casos.

En efecto, luego de lograda la función discriminante y obtener los centroides, se podría emplearla para efectuar una clasificación de los mismos casos utilizados para estimar los coeficientes de la función (rol explicativo del modelo discriminante).

Con el propósito de contrastar el grado de eficacia de la función canónica discriminante desde el punto de vista de la clasificación, se presenta la Tabla 7. En ella es posible distinguir el número de sujetos correcta e incorrectamente clasificados mediante el procedimiento previamente descrito. La regla de clasificación que ofrece SPSS discrimina sin error 124 estudiantes (28 aprobados y 96 suspensos, se encuentran sobre la diagonal principal de la tabla), que sobre el total de 142 sujetos representan el 87.32%.

Tabla 7

Resultados de la clasificación.

Rendimiento matemático	Aprobados	Suspensos	Total
Aprobados	28 (71.79 %)	11 (28.21 %)	39 (100.00 %)
Suspensos	07 (06.80 %)	96 (93.20 %)	103 (100.00 %)

Se puede sostener, en virtud de los valores alcanzados, que el procedimiento en su conjunto (función discriminante + regla de clasificación) posee una eficacia correcta, motivo por el cual se considera que el diseño metodológico implementado ha sido adecuado y produjo los resultados esperados.

4. CONCLUSIONES

Lo primero que se debe señalar es que la técnica estadística aplicada, perteneciente al área del análisis multivariante, ha permitido lograr el objetivo planteado; esto es, elaborar un modelo con capacidad razonable para *discriminar* cuándo los sujetos deben pertenecer a un grupo o al otro (aprobados y suspensos, definidos de antemano por medio de la variable dependiente), a partir de un conjunto de medidas sobre los individuos (representadas por una serie de variables explicativas propias del sujeto y de su entorno socioeducativo).

Desde el punto de vista de los resultados alcanzados, las variables personales V_1 = *Autoconcepto académico* y V_2 = *Estrategias de aprendizaje*, unidas a las variables contextuales V_3 = *Aspectos sociofamiliares* y V_4 = *Elementos del clima de clase*, tanto en forma individual como en conjunto, son de utilidad para discriminar entre las medias de los grupos de la variable dependiente. La contribución que cada una de ellas realiza, a efectos de diferenciar entre aprobados y suspensos, es diferente; en este sentido, el predictor que más aporta es el *Autoconcepto académico*.

Los coeficientes no estandarizados de las variables V_1, V_2 y V_3, son los que, en sentido directo y en el orden indicado, mayores importancias tienen en el cálculo de la función discriminante. El signo positivo que cada uno posee significa que aquellos estudiantes con buen rendimiento en la asignatura AMI eligieron valores medios o altos a la hora de puntuar los ítems de las pruebas respectivas. El signo negativo del coeficiente −de magnitud significativa− de la variable V_4, señala que los alumnos con buen rendimiento matemático optaron por puntuaciones bajas al responder las preguntas del cuestionario correspondiente.

Las variables explicativas fueron contrastadas empíricamente, a través de los estadísticos F de Fisher y χ^2 de Pearson, resultando todas relevantes a efectos de explicar o predecir los resultados académicos en el contexto de este estudio.

Asimismo, el modelo que se propone permite la formulación de medidas educativas y de apoyo personalizadas, en función de sus variables explicativas, las cuales pueden mejorar el rendimiento académico en Matemáticas y contribuir al éxito de los estudiantes en sus estudios universitarios.

Es necesario tener presente que los datos con los que se llevó a cabo esta investigación pertenecen a estudiantes matriculados en una materia determinada que integra el plan de estudio de ciertas carreras que se ofrecen en un centro académico específico. Debido a ello, resulta necesario ser muy cuidadosos a la hora de extender o extrapolar los resultados y conclusiones logradas a otras poblaciones educativas no representadas en la muestra que permitió implementar este estudio.

No obstante, se considera que la metodología implementada y la aplicación de la técnica análisis discriminante fueron decisiones correctas y un paso adelante en el estudio de la problemática abordada, como también un aporte a la comunidad académica y científica interesada en el tema objeto de estudio.

Finalmente, se estima que este trabajo puede servir como referencia para futuras investigaciones que se realicen en la misma línea, quizás con los matices que el escenario de aplicación demande, las que sin duda serán de utilidad para enriquecer el modelo funcional que en este desarrollo ha sido propuesto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrivillaga, F., García, M. L. y Maldonado, N. P. (2023). El autoconcepto académico en matemáticas: ruta hacia una categorización a través del método de análisis conceptual. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *13*(26), 1-22.

Béland, S., Cousineau, D., & Loye, N. (2017). Utiliser le coefficient omega de McDonald à la place de l'alpha de Cronbach. *McGill Journal of Education*, *52*(3),791-804.

Beltrán, J. A. (2003). Estrategias de Aprendizaje. *Revista de Educación*, *3*(332), 55-73.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297-334.

Delors, J. (1997). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI*. Ediciones UNESCO.

Devincenzi, G. H., Rohde, G. A., Giraudo, M. B. V., Bonaffini, M. L. y Bernaola, G. A. (2017). El análisis del rendimiento académico a través de modelos matemáticos y estadísticos. *Tordesillas Revista de Investigación Multidisciplinar*, *13*(1), 59-72.

Doménech, F., Jara, P. y Rosel, J. (2004). Percepción del proceso de enseñanza/aprendizaje desarrollado en Psicoestadística I y su incidencia en el rendimiento. *Psicothema*, *16*(1), 32-38.

García, F. y Musitu, G. (2014). *AF5. Autoconcepto Forma 5* (4a ed.). TEA.

George, D. y Mallery, P. (2020). *IBM SPSS Statistics 26 Step by Step* (16th ed.). Routledge.

González-Pienda, J. A., Núñez, J. C., Álvarez, L., Roces, C., González-Pumariega, S., González, P., Muñiz, R., Valle, A., Cabanach, R. G., Rodríguez, S. y Bernardo, A. (2003). Adaptabilidad y cohesión familiar, implicación parental en conductas autorregulatorias, autoconcepto del estudiante y rendimiento académico. *Psicothema*, *15*(3), 471-477.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J. y Anderson, R. E. (2019). *Multivariate Data Analysis* (8th ed.). Cengage Learning.

Harris, R. J. (2001). *A Primer of Multivariate Statistics* (3rd ed.). Psychology Press.

Huh, J., Delorme, D. E. y Reid, L. N. (2006). Perceived third-person effects and consumer attitudes on preventing and banning DTC advertising. *Journal of Consumer Affairs*, *40*(1), 90-116.

JASP Team (2023). JASP (Version 0.17.2.1) [Computer software]. https://jasp-stats.org/

Kassarnig, V., Mones, E., Bjerre-Nielsen, A., Sapiezynski, P., Dreyer Lassen, D. y Lehmann, S. (2018). Academic performance and behavioral patterns. *EPJ Data Science*. *7*(10), 1-16.

Loewenthal, K. M. (1996). *An introduction to psychological tests and scales.* UCL Press Limited.

Lohr, S. L. (2019). *Sampling: Design and Analysis* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.

McDonald, R. P. (1970). Theoretical foundations of principal factor analysis, canonical factor analysis, and alpha factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *23*(1),1-21.

Nunnally, J. C. (1978). *Psychometric Theory* (2nd ed.). McGraw-Hill.

Pintrich, P. R. (2003). A motivational science perspective on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Educational Psychology*, *95*(4), 667-686.

Rencher, A. C. (2002). *Methods of Multivariate Analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Reynolds, A. J. y Walberg, H. J. (1992). A Process Model of Mathematics achievement and attitude. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(4), 306-328.

Sánchez León, A. F. (2023). Self-concept and academic performance of university students. *University, Science and Technology*, *27*(118), 61-68.

Schnitzler, K., Holzberger, D., & Seidel, T. (2021). All better than being disengaged: Student engagement patterns and their relations to academic self-concept and achievement. *European Journal of Psychology of Education*, *36*(3), 627-652.

Tabachnick, B. G. y Fidell, L. S. (2013). *Using Multivariate Statistics* (6th ed.). Pearson.

Uriel, E. y Aldás, J. (2005): *Análisis Multivariante Aplicado*. Thomson.

Ventura León, J. y Caycho-Rodríguez, T. (2017). El coeficiente omega: un método alternativo para la estimación de la confiabilidad. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud*, *15*(1), 625-627.

Vizioli, N. y Pagano, A. (2022). De alfa a omega: estimación de la confiabilidad ordinal. Una guía práctica. *Revista Costarricense de Psicología*, *41*(2), 119-136.

Voght, W. P. (2005). *Dictionary of Statistics and Methodology* (3rd ed.). Sage.

Epsilon – *Revista de Educación Matemática* *2025, nº 119, 21-35*
Sección: Aportes desde la investigación en Educación Matemática

Explorando la interdisciplinariedad entre Matemática y Educación Física

Francisco Javier López Martín
Universidad de Granada, *jlopezmartin@correo.ugr.es*

Mauro Rivas Olivo
Universidad de Granada, *maurorivas@ugr.es*

José Antonio Fernández Plaza
Universidad de Granada, *joseanfplaza@ugr.es*

Resumen: *En este documento se presentan los resultados de la implementación de una propuesta didáctica en la que se integran, de manera interdisciplinar, matemáticas y educación física, llevada a cabo con estudiantes de 6º curso de Educación Primaria. La propuesta didáctica implementada se enmarca en el desarrollo de una situación de aprendizaje en los términos propuestos por la normativa curricular actual. En este sentido, con la implementación de esta propuesta, se pretende el desarrollo de competencias específicas de las áreas de conocimiento referidas. La experiencia se desarrolla siguiendo las fases propias de una investigación de diseño: estudio preliminar, diseño de la propuesta, implementación y valoración-reflexión sobre la implementación. Se incluyen, en relación con la implementación, valoraciones del alumnado sobre su grado de aceptación personal y social. Los resultados indican que la propuesta implementada contribuye al desarrollo de competencias específicas de las áreas involucradas y la aceptación personal y social del alumnado, por lo que se recomienda su uso con estudiantes de 6º curso.*

Palabras clave: *interdisciplinariedad, matemática y educación física, situación de aprendizaje, propuesta didáctica.*

Exploring the interdisciplinarity between mathematics and physical education

Abstract: *This paper presents the results of the implementation of a teaching proposal that integrates mathematics and physical education in an interdisciplinary manner with sixth-grade primary school students. The implemented teaching proposal is framed within the development of a learning situation within the terms proposed by current curriculum regulations. In this sense, the implementation of this proposal aims to develop specific competencies in the aforementioned areas of knowledge. The experience is developed following the phases of design research: preliminary study, proposal design, implementation, and evaluation-reflection on the implementation. In relation to the implementation, student assessments of their degree of personal and social acceptance are included. The results indicate that the implemented proposal contributes to the development of specific competencies in the areas involved and to the personal and social acceptance of students. Therefore, its use is recommended with sixth-grade students.*

Keywords: *interdisciplinarity, mathematics and physical education, learning situation, teaching proposal.*

Cómo citar: López-Martín, F. J., Rivas-Olivo, M. y Fernández-Plaza, J. A. (2025). Explorando la interdisciplinariedad entre Matemática y Educación Física. *Epsilon*, *119*, 21-35.

1. INTRODUCCIÓN

Explorar distintas estrategias pedagógicas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje constituye una de las preocupaciones fundamentales de la didáctica y de quienes se desenvuelven en la tarea de la enseñanza. Entre estas, se encuentra la interdisciplinariedad, un enfoque pedagógico que destaca por su ambición de integrar diversas áreas de conocimiento con el fin de enseñar a resolver problemas en contextos variados, especialmente en aquellas situaciones que podrían darse en la vida cotidiana de cualquier persona (Almenares-López et al., 2019; Diaz-Lucea, 2010; Karaly, 2021). Este enfoque de enseñanza, en el ámbito educativo, es un ideal largamente perseguido, pero su incorporación efectiva en la práctica docente ha enfrentado múltiples desafíos. La falta de una definición clara y ejemplos prácticos, junto con la percepción de su implementación como una carga adicional para los docentes, la falta de recursos y la rigidez de los horarios, entre otros, ha limitado su adopción y puesta en práctica en las aulas escolares (Agazzi, 2002; Almenares-López et al., 2019; Lenoir, 2013). Sin embargo, la constante evolución del sistema educativo, impulsada por investigaciones y la búsqueda de innovación, ha mantenido viva la interdisciplinariedad como una estrategia potencial para enriquecer el aprendizaje (Casado-Fernández y Chica-Romero, 2023; Karali, 2021).

La reciente normativa educativa (LOMLOE, 2020; Orden de 30 de mayo, 2023; Real Decreto 157/2022) resalta la importancia de planificar la enseñanza a partir de situaciones de aprendizaje reales, presentando así una oportunidad para integrar la interdisciplinariedad en el currículo. Esta aproximación se alinea con el reconocimiento de las dificultades que enfrentan los estudiantes durante los procesos de enseñanza-aprendizaje y la necesidad de proveer contextos reales que faciliten su comprensión y aplicación. De acuerdo con Bell-Rodríguez et al. (2022), las actividades interdisciplinares pueden ofrecer nuevas dimensiones a la enseñanza y responder a los intereses y necesidades del alumnado.

Sobre la base de lo expuesto, reconociendo el potencial que tiene la interdisciplinariedad en la posible mejora del proceso de enseñanza- aprendizaje, en este documento se presentan los resultados del diseño e implementación de una propuesta didáctica interdisciplinar, elaborada con el fin de explorar la mejora de ese proceso. En este escenario, en función de los intereses de los investigadores y en el contexto del desarrollo de un Trabajo de Fin de Máster en el ámbito educacional, se ha optado por una integración interdisciplinar entre matemática y educación física, la cual, de acuerdo con la literatura consultada, constituye un espacio con un potencial considerable (Álvarez-Vargas et al., 2023; Arias-Otero y Lafuente-Fernández, 2022; Martínez-Hita y Martínez-Hita, 2017; Rodríguez-Martín y Buscà Donet, 2022; Valentini y Sbarbati, 2024). La propuesta didáctica diseñada y aplicada, basada en la creación de problemas matemáticos contextualizados en el ámbito de la educación física, es un ejemplo de cómo esta integración puede darse de manera práctica, concebida con el fin de motivar al alumnado, fomentando un aprendizaje más relevante y significativo en ambas áreas del conocimiento. Se pretende fortalecer las competencias matemáticas del alumnado al enfrentar desafíos prácticos y relevantes para ellos, contextualizados en la educación física. Desde una perspectiva pragmática, el diseño e implementación de la propuesta didáctica tiene como objetivo determinar si los resultados que se obtienen por medio de su implementación coinciden con la apuesta común y positiva referida en la literatura (Sneck et al., 2019), y, en particular, determinar la viabilidad de la propuesta elaborada en un centro escolar real.

Si bien lo señalado constituye algunos de los fines del presente trabajo, se debe señalar que específicamente la aplicación de la propuesta tiene como objetivos específicos los siguientes:

OE1. Determinar los posibles efectos que tiene la implementación de una propuesta interdisciplinar entre matemáticas y educación física en el nivel competencial de estudiantes de 6º curso de educación primaria.

OE2. Determinar el efecto que tiene la implementación de la propuesta didáctica en el grado de aceptación personal y social del alumnado de 6º curso de educación primaria, según su propia percepción, a partir de su participación en esta.

A continuación, se presenta lo relativo a la fundamentación teórica de la propuesta, la metodología que se ha seguido en el desarrollo de esta investigación, una descripción de la propuesta implementada y los resultados de su implementación.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La interdisciplinariedad como objetivo a lograr en el desarrollo de la enseñanza se encuentra respaldada desde al menos dos perspectivas: la institucional-oficial, sostenida por los documentos oficiales (LOMLOE, 2020; OECD, 2024) y la sostenida por la investigación e innovación y sus resultados (Arias-Otero y Lafuente-Fernández, 2022; Lenoir, 2013; Valentini y Sbarbati, 2024; Van der Linde, 2014). No obstante, en ninguna de las dos perspectivas es posible encontrar lineamientos teóricos regulativos-orientadores de la actividad interdisciplinar. En el caso de esta investigación se trata, de acuerdo con Lenoir (2013), de establecer conexiones entre dos disciplinas escolares, de acción recíproca entre ellas, con el fin de promover procesos de enseñanza y aprendizaje

Este enfoque se distingue de otros dos que han tenido lugar en el desarrollo de propuestas y de investigaciones, a saber: los que hacen énfasis en una de las disciplinas (Černigoj y Volmut, 2021; Karali, 2021) o los que no establecen una conexión autentica entre ambas (Agirre et al., 2021; Rodríguez-Muñiz y Sánchez-Díaz, 2017).

Por otra parte, desde una perspectiva didáctica, se reconocen tres enfoques teóricos-metodológicos en los que se basan las acciones incluidas en la propuesta didáctica: (a) el desarrollo de un currículo basado en competencias, fundamentado básicamente en lo expuesto en los documentos curriculares oficiales (LOMLOE, 2020; OECD, 2024), (b) el aprendizaje basado en problemas (Barrow, 1986), puesto que el alumnado deberá resolver problemas matemáticos contextualizados en actividades deportivas, por medio de lo cual informarán sobre el desarrollo competencial alcanzado, y (c) el aprendizaje cooperativo (Johnson et al., 1999), puesto que la actuación del alumnado al resolver los problemas se hará en equipos de trabajo.

Finalmente, en función de la fundamentación curricular asumida, se presentan en la Tabla 1 la concreción curricular del área de Matemática, involucrada en la propuesta didáctica, y en la Tabla 2 la correspondiente a Educación Física. En la Tabla 1 se presentan las cuatro competencias específicas del área de Matemática que se pretenden desarrollar, así como los criterios de evaluación y saberes básicos asociados a estas. De manera similar en la Tabla 2 se presentan las del área de Educación Física.

La propuesta didáctica consiste en el desarrollo de un circuito en el patio del centro, conformado por tres estaciones, en el que el alumnado, trabajando en equipos, resuelve situaciones matemáticas sobre el sentido espacial y de la medida, relacionadas auténticamente con una actividad deportiva que se debe realizar en cada estación. El alumnado registra los resultados de su actividad física en un instrumento que sirve para obtener los datos que informan sobre el nivel competencial logrado.

Tabla 1

Relación entre competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos de matemáticas presentes en la propuesta interdisciplinar.

Matemáticas		
Competencias específicas	**Criterios de evaluación**	**Saberes básicos**
2-Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.	2.1.a.	MA.03.A.3.2. MA.03.A.3.3. MA.03.A.3.5. MA.03.A.5.2. MA.03.C.4.1. MA.03.C.4.2.
	2.2.a.	MA.03.A.1.1. MA.03.A.2.2. MA.03.A.3.7.
	2.3.a	MA.03.A.2.5. MA.03.A.2.6. MA.03.A.3.6.
5-Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar situaciones y contextos diversos.	5.1.a.	MA.03.B.3.1. MA.03.B.3.2. MA.03.B.3.3. MA.03.B.3.4. MA.03.C.1.1. MA.03.C.1.2. MA.03.C.1.3.
	5.2.a.	MA.03.C.3.1. MA.03.C.3.2. MA.03.C.4.4. MA.03.F.2.3.
6-Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.	6.1.a.	MA.03.A.2.7. MA.03.A.4.1. MA.03.A.4.5. MA.03.A.2.8. MA.03.A.2.4. MA.03.A.2.6. MA.03.D.3.1
	6.2.a.	MA.03.A.2.3. MA.03.E.1.1. MA.03.E.1.2. MA.03.E.1.3. MA.03.E.1.4. MA.03.E.1.5. MA.03.E.1.6. MA.03.E.1.7.
8. Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad y participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.	8.1.a.	MA.03.F.1.1. MA.03.F.2.1. MA.03.F.2.2. MA.03.F.2.3
	8.2.a	MA.03.E.3.1. MA.03.F.2.4. MA.03.F.2.5.

Fuente: Orden 30 de mayo (2023).

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de investigación

El estudio que se ha realizado es una investigación educativa de metodología mixta (Creswell, 2018), ya que se usan tanto técnicas de análisis cuantitativas como cualitativas. Dado que el objetivo principal es determinar los efectos (nivel competencial, grado de aceptación personal y social) que tiene la implementación de una propuesta interdisciplinar entre matemáticas y educación física en educación primaria, se ha desarrollado una investigación de diseño educativo (Bakker, 2018; Molina et al., 2011), la cual comprende las siguientes fases: (a) estudio preliminar: revisión de la literatura, (b) diseño de la propuesta, (c) implementación de la propuesta, (d) valoración de la implementación y (e) reflexión en torno a los resultados obtenidos.

Tabla 2

Relación entre competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos de Educación Física presentes en la propuesta interdisciplinar.

Educación Física		
Competencias específicas	**Criterios de evaluación**	**Saberes básicos**
2. Adaptar los elementos propios del esquema corporal, las capacidades físicas, perceptivo motrices y coordinativas, así como las habilidades y destrezas motrices, aplicando procesos de percepción, decisión y ejecución adecuados a la lógica interna y a los objetivos de diferentes situaciones, para dar respuesta a las demandas de proyectos motores y de prácticas motrices con distintas finalidades en contextos de la vida diaria.	2.1.a.	EF.03.B.1. EF.03.B.4. EF.03.D.2.
	2.2.a.	EF.03.B.1. EF.03.C.1. EF.03.D.2.
	2.3.a	EF.03.C.1. EF.03.C.2. EF.03.C.3. EF.03.C.4. EF.03.C.5.
3.Desarrollar procesos de autorregulación e interacción en el marco de la práctica motriz, con actitud empática e inclusiva, haciendo uso de habilidades sociales y actitudes de cooperación, respeto, inclusión, trabajo en equipo y deportividad, con independencia de las diferencias etnoculturales, sociales, de género y de habilidad de los participantes, para contribuir a la convivencia social y al compromiso ético en los diferentes espacios en los que se participa.	3.1.a.	EF.03.D.1.
	3.2.a.	EF.03.D.2. EF.03.D.3. EF.03.E.5.
	3.3.a	EF.03.A.2. EF.03.A.3. EF.03.D.2. EF.03.D.4

Fuente: Orden 30 de mayo (2023).

3.2. Participantes

Los participantes del estudio fueron 24 estudiantes de dos grupos de clases de 6º curso de educación primaria (11 – 12 años), 12 estudiantes por cada grupo-clase. La propuesta se implementa en un colegio público, de un barrio de una provincia andaluza. En este contexto, durante la realización del prácticum del máster, el primer autor de este artículo implementó la propuesta. El proceso de selección de la muestra ha sido por conveniencia, sin utilizar métodos de aleatorización (Creswell, 2018). El criterio de selección de los sujetos consistió en los que cumplieron con la siguiente condición: asistentes a las clases de educación física en la sesión en que se implementó la propuesta didáctica. Para tal implementación se contó con la colaboración del personal del centro, específicamente, el profesor tutor del práctico y los profesores tutores de los dos grupos de 6º curso, colaboraron de manera relevante con la implementación.

3.3. Instrumentos

Los instrumentos a ser utilizados para el desarrollo de la propuesta interdisciplinar son dos:

(I) Instrumento de actividades interdisciplinares de matemáticas y educación física: al que se va a referir en adelante con las siglas AIMEF. Se encuentra constituido por tres situaciones-problema que se resuelven en el circuito de tres estaciones. En cada estación se deben realizar dos actividades cuyos resultados deben registrarse en el instrumento. En general, la resolución de cada una de estas requiere a la vez de la realización de una actividad física, de la cual se obtienen datos cuyo tratamiento requiere de la actividad matemática. Las actividades implicadas conectan de manera interdisciplinar saberes y competencias de matemáticas y de educación física. En concreto se abordan los saberes básicos de matemáticas relacionados con el sentido espacial y la medida. De acuerdo con la información de los profesores de los dos grupos de participantes, para el momento de la creación de este instrumento, el alumnado estaba estudiando estos saberes básicos. Durante el desarrollo de las estaciones, el alumnado trabaja de forma cooperativa, en grupos de cuatro integrantes, con el fin de aplicar los conocimientos adquiridos en una actividad lúdica y deportiva. El registro de los resultados de las actividades propuestas en las tres estaciones (seis actividades), corresponde con los criterios de evaluación propuestos, por tanto, este permite obtener el nivel de logro de las competencias específicas planificadas. De esta manera se pueden determinar los efectos de la implementación de la propuesta interdisciplinar. Este instrumento se encuentra en AIMEF en la web. Para efectos de análisis de las respuestas dadas a las actividades del instrumento se numerarán las actividades de forma correlativa. De esta manera en la estación 1 se tendrán las actividades 1 y 2; en la estación 2 las actividades 3 y 4, y en la estación 3 las actividades 5 y 6.

(II) Cuestionario de valoración intra e interpersonal: este cuestionario forma parte del instrumento propuesto por Sánchez-Martí et al. (2019), denominado Cuestionario de percepción del aprendizaje a través de la retroalimentación entre iguales. Este es un instrumento validado que contiene una escala cuyos ítems se adaptan de manera adecuada a uno de los objetivos específicos (OE2) propuestos en la investigación. Esta escala se encuentra constituida por siete ítems los cuales se refieren a la autoestima, a la motivación para el aprendizaje, a la integración en equipos de trabajo, a la expresión de emociones, a la responsabilidad con el aprendizaje y a la aceptación de errores. Estos aspectos se han incluido en la categoría “grado de aceptación personal y social”. Para efectos del presente trabajo la escala seleccionada se le ha dado el nombre de Cuestionario de valoración intra e interpersonal. Un ejemplar del cuestionario puede verse al final de AIMEF en la web. Los ítems del cuestionario se responden haciendo uso de una escala tipo Likert que va desde 1 a 5, siendo el número 1 “Totalmente en desacuerdo” y el 5 “Totalmente de acuerdo”. En adelante se va a referir a este instrumento haciendo uso de sus siglas: CVIIP.

3.4. Procedimiento

Para llevar a cabo la investigación, dado que la misma implicaba recoger datos de los participantes, se activó el protocolo sobre protección de datos de la universidad a la que está adscrito el programa de máster, en el que tiene lugar el Trabajo de Fin de Máster referido, se solicitaron los respectivos consentimientos informados de los/as representantes del alumnado y se trataron los datos de manera totalmente anónima, evitando que el alumnado pudiera ser identificado a partir de la información que se ha obtenido de este. Para la recogida de datos, se emplearon dos sesiones de 1 hora cada una, con dos grupos diferentes de clase. Ambas se realizaron de forma sucesiva, es decir, primero se realizó la actividad con una clase y posteriormente con la otra. En cada sesión, se le explicó al alumnado, de forma breve, cómo se iba a desarrollar la clase, se forman los grupos y ya con todos los materiales preparados previamente, se comienza a resolver los problemas planteados, en un ambiente de competitividad entre los equipos participantes. Para cada sesión, se hicieron varias copias impresas de los instrumentos AIMEF y CVIIP, con el fin de que el alumnado los completara, resolviendo las actividades y retos propuestos, registrando de manera argumentada sus respuestas en el papel. Además, se informó al alumnado y personal del centro sobre el propósito académico de la investigación y el trato anónimo que se haría de la información a ser recogida.

3.5. Análisis de datos

Para el instrumento AIMEF se realizó en primer lugar un análisis cualitativo del contenido de las respuestas del alumnado, de cada una de las actividades de este instrumento, por medio del uso de una rúbrica. Asimismo, los niveles de logro establecidos en la rúbrica permitieron asignar una calificación numérica al desempeño logrado por los equipos de estudiantes en cada actividad del AIMEF, con puntajes que van entre 1 y 4 puntos. Luego, a partir de las calificaciones de los desempeños observados, se realizó un análisis cuantitativo descriptivo (frecuencia, media, desviación típica…), con el programa JASP, de los datos de las calificaciones transcritos a este programa. Los análisis realizados permiten obtener información del nivel de desempeño-competencial del alumnado. De manera similar se procedió con los datos obtenidos del CVIIP, cuyo análisis permitió determinar el efecto que tiene la implementación de la propuesta en el grado de aceptación personal y social del alumnado.

4. RESULTADOS

Para determinar los posibles efectos que tuvo la implementación de la propuesta interdisciplinar entre matemáticas y educación física en el nivel competencial de estudiantes de educación primaria, se realizaron las correcciones de las respuestas dadas por el alumnado a las seis actividades del instrumento AIMEF. Las correcciones de las respuestas, realizadas por medio de la aplicación de una rúbrica, como se refirió en el apartado anterior, permitieron obtener calificaciones numéricas (de 1 a 4 puntos) de las respuestas y, con ellas, los desempeños competenciales del alumnado. Los resultados de esos desempeños se presentan a continuación. Para facilitar la información de los resultados, y dado que no existe intención de comparar lo realizado por cada grupo de 6º curso, se han juntado los dos grupos en un único grupo conformado por 24 estudiantes.

4.1. Nivel competencial general alcanzado por el grupo

En la Tabla 3 se presentan los resultados descriptivos (media, desviación típica, puntaje máximo y mínimo) de la aplicación del AIMEF a los participantes de la experiencia. Se informa sobre los resultados de cada actividad, dos por cada estación.

Tabla 3

Resultados descriptivos del instrumento AIMEF

	Estación 1		**Estación 2**		**Estación 3**	
Estadístico	**Actividad 1**	**Actividad 2**	**Actividad 3**	**Actividad 4**	**Actividad 5**	**Actividad 6**
Media	2.7	2.5	2.8	2.6	3.8	2.8
Desv. típica	0.5	0.8	1.1	1.0	0.4	0.7
Mínimo	2	2	1	1	3	2
Máximo	3	4	4	4	4	4

Referentes de los puntajes: 1=Insuficiente, 2=Suficiente, 3=Bueno, 4=Excelente.

Se observa en la Tabla 3 que en las actividades de la estación 3 (Actividades 5 y 6), con las que se desarrollan principalmente las competencias específicas 5 y 8, son las que han obtenido las medias más altas, es decir, donde el alumnado muestra un mejor desempeño. Mientras que, en las actividades de la estación 1 (Actividades 1 y 2), relativas a las competencias específicas 2, 5, 6 y 8 y saberes básicos relacionados con las mediciones y comprobación de las mismas, son las que muestran las calificaciones más bajas. No obstante, en general, se observa que todas las puntuaciones medias son superiores a la media de las calificaciones, lo cual indica que ha habido un nivel competencial general positivo cuyo valor se ubica por encima de la media y se aproxima a un nivel competencial bueno.

4.2. Resultados en cada actividad del AIMEF

4.2.1. Estación 1:

Actividad 1: Precisión en la medición, colaboración y trabajo en equipo

En la Tabla 4 se presentan los resultados descriptivos de la actividad 1 del AIMEF, la cual está en relación con las competencias específicas 2 y 8, y los criterios de evaluación 2.1.a, 2.2.a, 8.1.a, 8.2.a.

Tabla 4

Resultados descriptivos de la actividad 1

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
2	2	33.3	33.3
3	4	66.6	100
Total	6	100	

1=Insuficiente, 2=Suficiente, 3=Bueno, 4=Excelente. Puntuación media: 2.7.

Se observa en la Tabla 4 que la puntuación media en la actividad 1 del AIMEF es de 2.7. Lo cual indica que, en general, las competencias 2 y 8 se logran a un nivel positivo, ligeramente inferior al puntaje 3 que se cualifica como un puntaje bueno. Se debe decir que el puntaje 3 se logra mayoritariamente en las acciones relacionadas con la competencia 8, se observa que la colaboración dentro de los equipos fue buena. La mayoría del alumnado participó y colaboró, asumiendo responsabilidades individuales. Sin embargo, hubo estudiantes que no se mostraron interesados en colaborar. Mientras que con respecto a la competencia 2 se observa que los puntajes más frecuentes estuvieron entre 2 y 3, lo que indica que el alumnado logró tomar medidas de las figuras planas con una precisión aceptable. Hubo algunos errores en las mediciones que sugieren una comprensión moderada de las técnicas de medición. Este resultado muestra que los estudiantes pueden comparar y seleccionar estrategias para resolver problemas de medición, pero necesitan profundizar en la realización de este tipo de actividad para mejorar la precisión.

Actividad 2: Cálculo de áreas y perímetros

En la Tabla 5 se presentan los resultados descriptivos de la actividad 2 del AIMEF, la cual está en relación con las competencias específicas 2, 5 y 6 y los criterios de evaluación 2.3.a, 5.1.a, 6.1.a, 6.2.a.

Tabla 5

Resultados descriptivos de la actividad 2

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
2	4	66.6	66.6
3	1	16.6	83.3
4	1	16.6	100
Total	6	100	

1=Insuficiente, 2=Suficiente, 3=Bueno, 4=Excelente. Puntuación media: 2.5.

Se observa en la Tabla 5 un predominio del puntaje 2, es decir, la puntuación media de la escala, siendo la media de las calificaciones (2.5) ligeramente superior a ese puntaje. Esto indica que, en general, aun cuando los puntajes se mantienen por encima de la media, los resultados obtenidos son mejorables. Se debe señalar que la mejor puntuación se logra en torno a la competencia 2; el alumnado mostró un desempeño adecuado en el cálculo de áreas y perímetros, aunque con errores que indican una comprensión parcial de los conceptos matemáticos y las fórmulas necesarias. Esto sugiere que los estudiantes pueden realizar cálculos matemáticos básicos, pero necesitan desarrollar más habilidades para comprobar y justificar la corrección de sus soluciones. En lo que respecta a la competencia 5, la capacidad de aplicar conceptos matemáticos en la identificación de figuras geométricas y en el cálculo de áreas y perímetros fue aceptable. Los estudiantes pudieron movilizar conocimientos básicos, pero deben fortalecer la conexión entre diferentes elementos matemáticos para una mayor precisión. La competencia 6, relacionada con la comunicación matemática, tanto en términos de expresar resultados como de utilizar la terminología adecuada, necesitan ser mejoradas. Los estudiantes fueron capaces de expresar sus resultados, pero con algunas imprecisiones y errores en el formato o terminología.

4.2.2. Estación 2:

Actividad 3: Identificación y cálculo

En la Tabla 6 se presentan los resultados descriptivos de la actividad 3 del AIMEF, la cual está en relación con las competencias específicas 2 y 5, y los criterios de evaluación 2.3a, 5.1.a, 5.2.a.

En lo que a la competencia 5 se refiere, el alumnado mostró un buen desempeño al identificar figuras geométricas en la pista deportiva y calcular sus áreas y perímetros. Este resultado sugiere que los estudiantes pueden conectar conceptos matemáticos con situaciones del mundo real, aplicando sus conocimientos para resolver problemas prácticos. Respecto a la competencia 2, aunque la mayoría de los cálculos fueron correctos, hubo que hacer algunas correcciones, lo que indica que los estudiantes necesitan mejorar en la revisión y justificación de sus soluciones matemáticas para asegurar su validez. Se debe señalar que en esta actividad se presentó la mayor desviación típica y por tanto más variedad respecto a las calificaciones, ya que ha habido 1 grupo que ha obtenido una cualificación insuficiente (puntaje de 1) y ha habido 2 grupos que han obtenido una cualificación de excelente (puntaje de 4).

Tabla 6

Resultados descriptivos de la actividad 3.

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
1	1	16.6	16.6
2	1	16.6	33.3
3	2	33.3	66.6
4	2	33.3	100
Total	6	100	

1=Insuficiente, 2=Suficiente, 3=Bueno, 4=Excelente. Puntuación media: 2.8.

Actividad 4: Carrera de relevos

En la Tabla 7 se presentan los resultados descriptivos de la actividad 4 del AIMEF, la cual se encuentra relacionada con las competencias específicas 5 y 8, y los criterios de evaluación 5.1.a, 5.2.a, 8.1.a, 8.2.a

Tabla 7

Resultados descriptivos de la actividad 4

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
1	1	16.6	16.6
2	1	16.6	33.3
3	3	50	83.3
4	1	16.6	100
Total	6	100	

1=Insuficiente, 2=Suficiente, 3=Bueno, 4=Excelente. Puntuación media: 2.7.

Se observa en la Tabla 7 una manifestación diversa de los puntajes en los diferentes equipos. No obstante, el puntaje 3 es el que presenta mayor frecuencia, lo que indica, junto a la puntuación media (2.7), que en general el nivel competencial del grupo se sitúa cercano a un puntaje bueno. Se observa en las respuestas del alumnado que en la competencia 5 aplicaron conceptos matemáticos para calcular distancias recorridas durante la carrera de relevos, demostrando una capacidad adecuada para integrar matemáticas con actividades físicas. Sin embargo, la precisión en estos cálculos y la justificación matemática pueden mejorar. En cuanto a la competencia 8, la colaboración y el desempeño en la actividad física fueron buenos. Los estudiantes participaron activamente y colaboraron apropiadamente en la carrera de relevos, aunque no con la constancia esperada. Esto sugiere que los estudiantes pueden trabajar en equipo y asumir roles, pero deben mejorar en la consistencia de su participación y colaboración.

Por razones de espacio no se presentan detalles respecto a los resultados de la Estación 3 (actividades 5 y 6), ni del desarrollo de competencias de Educación Física por parte de los equipos. En general, los resultados a nivel descriptivo indican que la implementación de la propuesta didáctica ha tenido un efecto positivo en el desarrollo competencial del alumnado participante, tanto en matemática como en educación física.

4.3. Resultados de la valoración intra e interpersonal (CVIIP)

Para determinar qué efecto tiene la implementación de la propuesta en el grado de aceptación personal y social del alumnado, según su propia percepción, se ha realizado un análisis descriptivo de las respuestas dadas por este al “Cuestionario de valoración intra e interpersonal” (CVIIP).

En la Tabla 8 se presentan los resultados descriptivos (media y desviación típica) de cada uno de los siete ítems del CVIIP.

Tabla 8
Resultados descriptivos del CVIIP.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
Media	2.9	2.9	3.6	3.2	2.6	2.7	3.1
Desviación Típica	0.9	1.5	1.2	1.2	1.3	1.2	1.5

1=Totalmente en desacuerdo, 2=En desacuerdo, 3=Ni acuerdo ni en desacuerdo, 4=De acuerdo, 5=Totalmente de acuerdo

Se observa en la Tabla 8 que los ítems 3, 4 y 7, que se refieren a la integración en el grupo, la aceptación por parte de los compañeros, y la aceptación de errores, respectivamente, tuvieron las respuestas más positivas del alumnado, en relación con el resto de los ítems. Por su parte, los ítems 1, 2, 5 y 6, que se refieren a la mejora en la autoestima, la motivación para el aprendizaje, la expresión de las emociones, y la responsabilidad hacia el aprendizaje, respectivamente, presentan medias similares, en torno a 2.8, ligeramente inferiores a la media de los demás ítems del cuestionario, pero ligeramente superiores a la media de la escala de calificaciones. Estos resultados indican, en general, que el alumnado considera que la experiencia vivida con la implementación de la propuesta didáctica ha tenido un efecto positivo sobre su grado de aceptación personal y social.

5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA EL TRABAJO DOCENTE

En este estudio se ha evaluado la efectividad de una propuesta interdisciplinar entre matemáticas y educación física en estudiantes de 6º de primaria. Como se ha visto en el apartado de resultados la propuesta ha tenido un impacto positivo, con tendencia hacia puntajes superiores a la media de la escala de calificaciones, en el desarrollo de competencias específicas, particularmente en la competencia 5 (reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas y su aplicación en contextos diversos…) y la competencia 8 (desarrollar destrezas sociales y de trabajo en equipo…). Asimismo, las actividades de construcción de polígonos y cálculo de áreas y perímetros fueron realizadas con pertinencia por la mayoría de los equipos, lo que sugiere que los estudiantes no sólo comprendieron los conceptos geométricos, sino que también pudieron aplicarlos efectivamente en contextos prácticos, lo que da cuenta de su desempeño competencial. Por tanto, se puede concluir que la propuesta ha alcanzado uno de los objetivos que perseguía, ya que se ha conseguido determinar el efecto que tiene la propuesta sobre el nivel competencial del alumnado. Estos resultados permiten recomendar el uso de esta propuesta para el trabajo docente, en relación con el desarrollo de las competencias específicas tanto de matemáticas como de educación física a las que esta se refiere.

Se debe reconocer que, aun cuando la propuesta fue en general efectiva, se identificaron aspectos del contenido matemático que requieren una mayor maduración. De hecho se observó que las actividades que requerían cálculos más precisos y justificados mostraron puntuaciones más bajas. Se considera que una profundización en la realización de los cálculos numéricos, de manera que estos se realicen con mayor frecuencia por el alumnado, puede mejorar la falta de precisión y la ausencia de justificaciones de los cálculos involucrados en la propuesta.

Los resultados de la aplicación del cuestionario sobre el grado de aceptación personal y social muestran que la implementación de la propuesta tuvo un efecto positivo en los rasgos evaluados por medio de ese cuestionario, de acuerdo con la percepción del alumnado participante. En particular se ha observado que la propuesta es efectiva para la mejora de las dinámicas sociales dentro del grupo de estudiantes. No obstante, en relación con la autoestima y la motivación hacia el aprendizaje, la propuesta tuvo un bajo efecto positivo, lo que llama a la reflexión y a considerar la posible mejora de la propuesta atendiendo a estos resultados en estos rasgos.

Finalmente, aun cuando la propuesta implementada favorece el desarrollo de las competencias específicas de matemáticas y educación física, así como el grado de aceptación personal y social del alumnado, también se debe señalar que su diseño y aplicación ha involucrado algunas dificultades, puesto que se requiere de un tiempo considerable de trabajo del docente para preparar este tipo de recursos y, además, se necesitan unos materiales y espacio que no siempre están disponibles. Asimismo, se reconoce que es complicado crear propuestas que logren despertar el interés del alumnado, cuya implementación eleve efectivamente el desempeño tanto competencial como personal y social de este. Estas reflexiones conducen a concluir que si bien el uso de este tipo de propuestas es viable y positivo, pero dado que su elaboración requiere de mucho esfuerzo y preparación, es de relevancia capital el hecho de poder contar con una ya elaborada, como es el caso de la propuesta implementada en este artículo. En consecuencia es totalmente pertinente la recomendación de su uso o algunas similares, haciendo los ajustes/modificaciones que se estimen convenientes, en la tarea de la enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agazzi, E. (2002). El desafío de la interdisciplinariedad: dificultades y logros. *Revista empresa y humanismo, 2*(2), 241-252. http://dx.doi.org/10.15581/015.5.33372

Agirre Basurko, E., Zuazagoitia Rey-Baltar, A. y Cardeña Castaños, S. (2021). Las Matemáticas de la mano de la Educación Física en Educación Primaria. *El Guiniguada, 30*, 176-192. https://doi.org/10.20420/ElGuiniguada.2021.413

Almenares-López, M., Marín-Uribe, R., Soto-Valenzuela, M. C. y Guzmán-Ibarra, I. (2019). Interdisciplinariedad: la necesidad de unificar un concepto. *TECNOCIENCIA CHIHUAHUA: Revista de ciencia y tecnología*, *13*(3), 140-148. https://doi.org/10.54167/tecnociencia.v13i3.477

Álvarez-Vargas, D., López Pérez, J. P., Bermúdez, V. N., Beltrán-Grimm, S., Santana, E., Begolli, K. y Bustamante, A. S. (2023). Evidence-based designs for physically active and playful math learning. *Theory Into Practice, 62*(2), 166–180. https://doi.org/10.1080/00405841.2023.2202131

Arias Otero, M. y Lafuente Fernández, J. C. (2022). Análisis del trabajo de contenidos matemáticos desde el área de Educación Física en Educación. *Retos*, *45*, 224–232. https://doi.org/10.47197/retos.v45i0.92365

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education. A practical Guide for early career researchers*. Routledge.

Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. *Medical Education, 20*(6), 481-486. https://doi.org/10.1111/j.1365-2923.1986.tb01386.x

Bell-Rodríguez, R. F., Orozco-Fernández, I. I. y Lema-Cachinell, B. M. (2022). Interdisciplinariedad, aproximación conceptual y algunas implicaciones para la educación inclusiva. *Uniandes Episteme, 9*(1), 101–116.

Casado-Fernández, R. y Chica-Romero, M. (2023). Creatividad, pensamiento crítico y trabajo en equipo en educación primaria: un enfoque interdisciplinar a través de proyectos STEAM. *Revista Complutense de Educación, 34*(3) https://doi.org/10.5209/rced.79861

Černigoj, E., Volmut, T. (2022). Integrating physical activity in mathematics lessons: A pilot study. *Annales Kinesiologiae, 12*(1), 29–41. https://doi.org/10.35469/ak.2021.305

Creswell, J. W. (2018). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5ª ed.). Sage Publications.

Díaz-Lucea, J. (2010). Educación física e interdisciplinariedad, una relación cada vez más necesaria. *Tándem: Didáctica de la educación física, 33*, 7-21.

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Paidós.

Karali, Y. (2021) Interdisciplinary Approach in Primary School Mathematics Education. *Education Quarterly Reviews 4*(4), 182-190. https://doi.org/10.31014/aior.1993.04.04.382

Lenoir, Y. (2013). Interdisciplinariedad en educación: una síntesis de sus especificidades y actualización. *Dossier. Universidad de Sherbrooke, Quebec, Canadá, 1*(1).

LOMLOE (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. BOE (Boletín Oficial del Estado), 340, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953. https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf

Martínez-Hita, F. J. y Martínez-Hita, M. M. (2017). La simbiosis entre el área de educación física y matemáticas. *Trances: Transmisión del Conocimiento Educativo y de la Salud, 9*(1), 249-260.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

OECD (2024). *An Evolution of Mathematics Curriculum: Where It Was, Where It Stands and Where It Is Going*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/0ffd89d0-en.

Orden de 30 de mayo (2023). *Por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y a las diferencias individuales, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre las diferentes etapas educativas*. BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía), 104, 2 de junio 2023. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2023/104/39

Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo (2022). *Por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. BOE (Boletín Oficial del Estado), 52, 2 de marzo de 2022, 2022-3296. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Rodríguez-Martín, B. y Buscà Donet, F. (2022). Desempeño de competencia matemática en contextos de la Educación Física en primaria. *Revista Internacional de Medicina y Ciencias de la Actividad Física y del Deporte, 22*(88), 807–825.

Rodríguez-Muñiz, L. J. y Sánchez-Díaz, I. (2017, 10-14 julio). Colaboración interdisciplinar entre matemáticas y Educación física en educación primaria. *VIII CIBEM, CB-825*, Madrid, España.

Sánchez-Martí, A., Moreno, J. L. y Ion, G. (2019). Diseño y validación de un cuestionario de percepción del aprendizaje a través del feedback entre iguales en educación superior.

Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación - e Avaliação Psicológica, 4(53), 113-128. https://doi.org/10.21865/RIDEP53.4.09

Sneck, S., Viholainen, H., Syväoja, H., Kankaapää, A., Hakonen, H., Poikkeus, A. M. y Tammelin, T. (2019). Effects of school-based physical activity on mathematics performance in children: a systematic review. *International Journal of Behavioral Nutrition and Physical Activity*, *16*, 1-15.

Valentini, M. y Sbarbati, I. (2024). The effects of interdisciplinary teaching between mathematics and physical education: A Systematic Review. *Formazione & insegnamento, 22*(1S), 83-93.

Van der Linde, G. (2014). ¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior? *Cuaderno De Pedagogía Universitaria, 4(*8), 11–12. https://doi.org/10.29197/cpu.v4i8.68

Epsilon – *Revista de Educación Matemática* *2025, nº 119, 37-57*
Sección: Aportes desde la Investigación en Educación Matemática

Applets en GeoGebra para el estudio de transformaciones lineales desde el enfoque EOS

Katalina Oviedo Rodríguez
Universidad Nacional (Costa Rica), *katalina.oviedo.rodriguez@una.ac.cr*

Byron Jiménez Oviedo
Universidad Nacional (Costa Rica), *byron.jimenez.oviedo@una.ac.cr*

Jeremías Ramírez Jiménez
Universidad Nacional (Costa Rica), *jeremias.ramirez.jimenez@una.ac.cr*

María Gabriela Calderón Torres
Universidad Nacional (Costa Rica), *maria.calderon.torres@una.ac.cr*

Resumen: *El aprendizaje del álgebra lineal presenta desafíos debido a la naturaleza abstracta de sus conceptos. Superar estas dificultades requiere estrategias que fomenten la construcción activa y autónoma de la comprensión por parte de los estudiantes. Desde una perspectiva de diseño instruccional, basada en la noción de idoneidad didáctica del EOS y sus componentes, en esta investigación se diseñó e implementó applets en GeoGebra para el estudio de las transformaciones lineales, en un curso universitario de Álgebra Lineal. Se realizó una Investigación Basada en el Diseño, que incluyó el diseño de una propuesta didáctica, su implementación con estudiantes de la Universidad Nacional (Costa Rica), y su valoración por medio de la aplicación de: (a) un cuestionario de percepciones sobre el uso de los applets y (b) el estudio de su idoneidad didáctica. Los resultados indican que la propuesta es percibida positivamente por el estudiantado, que esta satisface en buena medida las facetas de la idoneidad didáctica, a la vez que se identifican aspectos de mejora en cada una de ellas. Se concluye reafirmando la conveniencia de integrar tecnologías que permitan visualizar y manipular conceptos matemáticos, como los applets propuestos, que pueden facilitar y enriquecer el aprendizaje del álgebra lineal.*

Palabras clave: *Transformaciones lineales, Applets, GeoGebra, Enfoque Ontosemiótico.*

GeoGebra applets for the study of linear transformations from the EOS approach

Abstract: *Learning linear algebra presents challenges due to the abstract nature of its concepts. Overcoming these difficulties requires strategies that promote active and autonomous construction of understanding by students. From an instructional design perspective, based on the notion of didactic suitability of the EOS and its components, this research designed and implemented GeoGebra applets for the study of linear transformations in a university-level Linear Algebra course. A Design-Based Research approach was conducted, which included the design of a didactic proposal, its implementation with students from the National University (Costa Rica), and its evaluation through: (a) a questionnaire on perceptions about the use of the applets, and (b) the study of their didactic suitability. The results indicate that the proposal is positively perceived by the students, satisfactorily meeting the facets of didactic suitability, while identifying areas for improvement in each of them. The conclusion reaffirms the*

Cómo citar: Oviedo, K., Jiménez, B., Ramírez, J. y Calderón, M. G. (2025). Applets en GeoGebra para el estudio de transformaciones lineales desde el enfoque EOS. *Epsilon*, *119*, 37-57.

advantage of integrating technologies that allow for visualizing and manipulating mathematical concepts, such as the proposed applets, which can facilitate and enrich the learning of linear algebra.

Key words: *Linear transformations, Applets, GeoGebra, Ontosemiotic Approach.*

1. INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones apuntan las dificultades que tienen los estudiantes universitarios para aprender los conceptos abstractos que se estudian en un curso de Álgebra Lineal (Dorier et al., 1997; Oktaç y Gaisman, 2010; Sierpinska, 2000). El uso de diferentes lenguajes, la naturaleza abstracta y el formalismo de los conceptos son señalados como obstáculos que enfrentan los estudiantes. Dubinsky (1997) sostiene que, al igual que en otras áreas de las matemáticas universitarias, el aprendizaje del álgebra lineal implica superar la dificultad que representa el desarrollo de la comprensión conceptual en los estudiantes. Para abordar este desafío, propone la implementación de estrategias pedagógicas que favorezcan la construcción mental de objetos y procesos matemáticos, permitiendo a los estudiantes construir sus propias comprensiones sobre los objetos y procesos matemáticos, mediante el trabajo activo con ellos.

El uso de tecnologías para introducir y estudiar conceptos en matemáticas se ha convertido en una valiosa herramienta en los últimos años. Según Godino et al. (2021), en la investigación en didáctica de la matemática se le concede gran atención a los cambios derivados de los desarrollos tecnológicos, los cuales desafían las visiones tradicionales del currículo, la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación. El uso de tecnologías en la clase de matemática tiene influencias positivas (Baki, 2015) y generalmente tiene el objetivo de aprovechar las ventajas que ofrece el medio computacional para facilitar la exploración, cálculo, la experimentación, la resolución de problemas y la modelización matemática (Ortega, 2002). Es decir, una de las virtudes de las tecnologías es la posibilidad de que los estudiantes construyan sus propias comprensiones sobre conceptos y procesos matemáticos, manipulándolos, visualizando sus propiedades, proponiendo y probando ideas.

En este estudio se toma en cuenta tanto las dificultades inherentes al aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal, como los beneficios que la tecnología puede ofrecer para facilitar este proceso. Su objetivo fue diseñar, implementar y valorar el uso de applets en GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso universitario de Álgebra Lineal. La elección a priori de GeoGebra se fundamentó en su acceso gratuito, su facilidad de uso tanto para docentes como para estudiantes, y su gran utilidad para el análisis gráfico de conceptos.

Dada su relación con el diseño instruccional en educación matemática, el objetivo de investigación se abordó desde una perspectiva fundamentada en la noción de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y sus seis componentes (Godino, 2013). Esta noción y los indicadores empíricos que la estructuran fueron introducidos por Godino y sus colaboradores como parte de una teoría de la instrucción matemática desarrollada para mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

Diversas investigaciones han explorado el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales y otros conceptos del álgebra lineal (Gallo et al., 2019; Camacho y Oktaç, 2017; Podevils y Montenegro, 2021). No obstante, este estudio no solo se centra en el diseño e implementación de los applets, sino que también integra los componentes de la idoneidad didáctica del EOS como fundamento de la propuesta. Este enfoque enriquece el diseño e implementación de los applets y permite un análisis más profundo de los aspectos didácticos involucrados.

2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

2.1. Teoría de la idoneidad didáctica y sus componentes

El EOS es un marco teórico propio de la Didáctica de la Matemática que articula nociones sobre la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático, resaltando la naturaleza relacional y multidimensional de estos procesos, así como su complejidad (Godino, 2013). Dentro de este marco y como punto de partida de una teoría de diseño instruccional, la noción de idoneidad didáctica se propone como una herramienta que permite valorar la adecuación del proceso educativo enfocándose en la intervención de aula efectiva y puede aplicarse a una sesión de clase, un material didáctico, una unidad didáctica, un curso, o un currículo (Godino, 2013). Es decir, este enfoque está centrado en la mejora de la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel parcial como global.

Según Breda et al. (2018), la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje se entiende como el grado en que esta (o una parte de esta) reúnen ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales alcanzados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

En el trabajo de Godino (2013), la noción de idoneidad didáctica se describe a través de seis componentes, cuya articulación coherente y sistémica es requerida en un proceso de instrucción:

1. Idoneidad epistémica: Corresponde al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos-implementados respecto a un significado de referencia. Los componentes que permiten hacer operativa esta noción de idoneidad son las situaciones problema, los lenguajes, las reglas (definiciones, proposiciones o procedimientos), los argumentos y las relaciones.
2. Idoneidad cognitiva: Se refiere al grado en que los significados pretendidos-implementados se encuentren en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados. Sus componentes son los conocimientos previos, las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y el aprendizaje, considerando las mismas componentes de la idoneidad epistémica.
3. Idoneidad interaccional: Expresa el grado en que las trayectorias y configuraciones didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los conflictos presentados durante la instrucción. Los componentes que permiten hacer operativa esta idoneidad son la interacción docente-discente, la interacción entre alumnos, la autonomía y la evaluación formativa.
4. Idoneidad mediacional: Indica el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales que se requieren para desarrollar la enseñanza y el aprendizaje. Sus componentes incluyen los recursos materiales (manipulativos, ordenadores, calculadoras, entre otros), la cantidad de estudiantes y las condiciones de aula y tiempo.

5. Idoneidad afectiva: Se refiere al grado de implicación, interés y motivación del estudiantado en el proceso de estudio. Los componentes que articulan esta idoneidad son los intereses y necesidades, las actitudes y las emociones.
6. Idoneidad ecológica: Indica el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo institucional (centro, escuela y sociedad) y a las condiciones de su entorno. Sus componentes son la adaptación al currículo, la apertura hacia la innovación didáctica, la educación en valores, las conexiones intra-interdisciplinares y la adaptación socio-profesional y cultural.

Godino (2013) advierte que tales componentes de la idoneidad didáctica no deben considerarse como facetas independientes, pues se manifiestan interrelacionadas. A modo de ejemplo, este autor explica que emplear un recurso tecnológico (mediacional) puede permitir abordar ciertos temas, objetos, procesos o representaciones (epistémica-cognitiva), afectando las interacciones profesor-estudiantes (interaccional), e incluyendo el interés y la motivación estudiantil (afectiva), así como en el alcance de los aprendizajes (ecológica).

2.2. Teoría de la idoneidad didáctica y sus componentes

Uno de los componentes de la idoneidad epistémica, centrada en los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia, está constituido por las reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos) necesarias para el estudio cada tema. En el caso del estudio de las transformaciones lineales, según Weller et al. (2002), la construcción del concepto transformación lineal se fundamenta en una función definida entre dos espacios vectoriales, donde los objetos espacio vectorial y función se coordinan para construir una transformación. Para esto, un individuo necesita de una fórmula explícita que le permita tomar un vector del dominio y transformarlo con una regla de asignación definida para obtener un vector de salida. De acuerdo con esto es fundamental la definición de espacio vectorial. Esta definición, a través de la comprensión del concepto de función, permite que el individuo pueda determinar que la suma de dos elementos cualesquiera del espacio es un nuevo vector del espacio y que, por tanto, es posible determinar su imagen en dicho espacio (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

En cuanto a la idoneidad cognitiva, uno de sus componentes es el conocimiento previo de los estudiantes. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) apuntan que una de las nociones fundamentales para poder construir el concepto de transformación lineal es la noción de función. Dominando este concepto, el individuo puede abordar las funciones como objetos, desentrañando el proceso mediante el cual se construyó dicho objeto para aplicarlo a una situación específica. Esto le permitirá utilizar, de manera flexible y sin dificultad, los elementos del proceso o del objeto según lo requiera. Otros conocimientos previos que debe tener el estudiante son los conceptos de operación binaria y de combinación lineal, los cuales están muy relacionados con los conceptos de espacio vectorial y de vector, las operaciones producto por un escalar y suma vectorial, y el uso del cuantificador universal $\forall$ (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Respecto a la idoneidad interaccional, la resolución de conflictos cognitivos por medio de las acciones en la clase debe atender por ejemplo a las confusiones que se presentan al pasar de R^n y matrices a trabajar en un espacio vectorial abstracto (Aguilar y Vásquez, 2020). En general, los principales conflictos que se identifican en la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones lineales están relacionados con la naturaleza abstracta del contenido y el uso de diferentes tipos de lenguajes y representaciones utilizados en el discurso desarrollado en el aula (Rodríguez, 2002).

En el caso de la idoneidad mediacional, relacionada con el grado de adecuación de recursos materiales, en la enseñanza del álgebra lineal se recomienda utilizar recursos tecnológicos como complemento para ciertos temas. Por ejemplo, Campos et al. (2021) plantean que el empleo de un sistema de geometría dinámico, como GeoGebra, proporciona herramientas que facilitan los procesos del pensar matemáticamente, como la identificación de patrones y la formulación y justificación de conjeturas para un tópico específico dentro de un curso típico de Álgebra Lineal. Además, Karrer y Santos (2018) mencionan que el uso del software matemático permite visualizar, simultáneamente, las relaciones entre diferentes conceptos, realizar tratamientos dinámicos y gráficos, lo que posibilita un tratamiento diferente de los objetos matemáticos y propicia nuevas comprensiones de estos.

En relación con la idoneidad afectiva, que se enfoca en la implicación, el interés y la motivación de los estudiantes, Hernández y Juárez (2018) evaluaron el grado de satisfacción de estudiantes de matemáticas avanzadas, incluyendo álgebra lineal, en comparación con sus expectativas iniciales. Sus resultados mostraron que, entre todas las facetas de la idoneidad didáctica, la afectiva fue la única en la que la percepción de la experiencia de aprendizaje no coincidió completamente con las expectativas previas. Por otro lado, Gallego-López et al. (2018) determinaron que la incorporación de GeoGebra como herramienta de mediación en el aprendizaje del cálculo vectorial y el álgebra lineal en estudiantes universitarios contribuyó a mejorar tanto los procesos motivacionales como el aprendizaje autorregulado.

Por último, la idoneidad ecológica contempla la adaptación al currículo y la apertura hacia la innovación. El estudio del álgebra lineal está incluido en múltiples programas de estudio de diversas titulaciones universitarias, contemplando disposiciones particulares y diferentes grados de innovación. Por ejemplo, el programa de estudios del Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (BLEM, 2017) impartido en la Universidad Nacional (Costa Rica), incluye un curso de Álgebra Lineal en el tercer nivel de la carrera, que incluye el estudio de las transformaciones lineales. Este programa está diseñado por competencias, tomando en cuenta referentes nacionales e internacionales. Dentro de sus ejes curriculares establece el desarrollo del pensamiento lógico matemático, así como la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación, entre otros.

3. MARCO METODOLÓGICO

La metodología de este estudio se basó en los principios de la Investigación Basada en el Diseño (Brown, 1992; Kelly et al., 2008). Según De Benito y Salinas (2016), este enfoque busca promover la innovación educativa al abordar una problemática identificada en el contexto de enseñanza mediante la incorporación de un nuevo elemento. Para ello, se apoya en teorías científicas o modelos existentes que permiten diseñar, implementar y evaluar programas, materiales o estrategias didácticas. En este caso, se empleó la noción de idoneidad didáctica del EOS, junto con sus componentes e indicadores, como base para el desarrollo de applets para facilitar la comprensión de conceptos complejos en álgebra lineal.

Siguiendo este enfoque metodológico, la investigación se llevó a cabo en tres etapas: diseño, implementación y valoración-reflexión de la implementación y del diseño. En la fase de diseño, se construyeron los applets en GeoGebra para el estudio de las transformaciones lineales. Posteriormente, en la fase de implementación, estos applets se utilizaron en una clase de un curso universitario de Álgebra Lineal. En la fase de valoración-reflexión se exploraron las percepciones de los estudiantes sobre el uso de los applets en su aprendizaje y se utilizó la herramienta de Idoneidad Didáctica para analizar y reflexionar sobre posibles mejoras de la propuesta diseñada e implementada.

3.1. Categorías de análisis

Según correspondió en cada caso, para el diseño de los applets y su implementación, a modo de categorías de análisis, se utilizaron los siguientes indicadores señalados en el marco del EOS para los diferentes componentes de cada faceta de la idoneidad didáctica (Godino, 2013):

1. Idoneidad epistémica: muestra representativa de situaciones de aplicación, diferentes modos de expresión (verbal, simbólica, gráfica), situaciones de expresión e interpretación, definiciones claras y correctas, presencia de enunciados y procedimientos fundamentales del tema, situaciones de generación de definiciones, situaciones de argumentación y comprobación, evidencias de conexiones entre objetos matemáticos.
2. Idoneidad cognitiva: manejo de conocimientos previos (por estudio previo o reestudio), dificultad manejable del aprendizaje pretendido, inclusión de actividades de refuerzo, diversos modos y niveles de evaluación del logro de los aprendizajes, enfoque en comprensión conceptual, comunicativa, argumentativa y procedimental.
3. Idoneidad interaccional: reconocimiento docente de los conflictos (preguntas y respuestas), diversidad de recursos retóricos y argumentativos, favorecimiento del diálogo entre estudiantes, convencimiento de la validez de las ideas y conjeturas, situaciones en que los estudiantes asumen la responsabilidad de su aprendizaje (exploran, conjeturan, se comunican, investigan), observación sistemática del proceso de aprendizaje.
4. Idoneidad mediacional: uso de materiales manipulativos e informáticos, contextualización de definiciones y propiedades mediante modelos concretos y visualizaciones, adecuación del número de estudiantes, horario y condiciones de aula.
5. Idoneidad afectiva: actividades de interés para los estudiantes, situaciones para valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional, así como sus cualidades estéticas y precisas, promoción de la participación, la perseverancia, y la autoestima.
6. Idoneidad ecológica: correspondencia de contenidos con directrices curriculares, innovación basada en la investigación, integración de nuevas tecnologías, relación con contenidos intra e interdisciplinares.

De modo que, la idoneidad didáctica del diseño de los applets y de su implementación en el aula, incluyendo la percepción estudiantil, se consideró en términos de tales categorías de análisis.

3.2. Categorías de análisis

Según De Benito y Salinas (2016), el estudio de caso es una de las técnicas comúnmente utilizadas en la Investigación Basada en Diseño, y generalmente el investigador participa activamente en el proceso educativo intervenido. En concordancia con este enfoque, la implementación de los applets se llevó a cabo mediante un estudio de caso con un grupo de 12 estudiantes de un curso universitario de Álgebra Lineal impartido en 2023 en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional (Costa

Rica). Asimismo, el profesor del curso estuvo involucrado en el proceso de investigación como integrante del equipo de investigadores.

Este curso de Álgebra Lineal, ubicado en el tercer nivel del plan de estudios de la carrera, abarca tanto aspectos teóricos como prácticos relacionados con la teoría de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales reales de dimensión finita, operadores lineales y valores y vectores propios. Los estudiantes que matriculan este curso cuentan con conocimientos previos en principios matemáticos, análisis y geometría analítica.

Los applets diseñados se implementaron durante una clase del curso mediante una serie de actividades propuestas por el profesor. Aunque el grupo estaba conformado inicialmente por 18 estudiantes, seis estuvieron ausentes el día de la implementación, por lo que participaron 12 estudiantes en el estudio de caso. De estos, seis se identificaron con género masculino, cinco con femenino y uno con un género no especificado. Además, aunque los estudiantes habían ingresado a la carrera en distintos años (2019, 2020 y 2021), en 2023 todos cursaban el tercer nivel de la carrera. En ese momento, sus edades oscilaban entre 20 y 31 años, con una edad promedio de 23 años.

3.3. Cuestionario sobre la percepción estudiantil

Al implementar una herramienta tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje es importante explorar las opiniones de los usuarios. De modo que, se utilizó la técnica de cuestionario autoadministrado para recoger información específica sobre la percepción del estudiantado participante en la implementación de los applets diseñados. Se procedió según lo indicado por Gómez (2018): se indicaron los propósitos del estudio, se dio una explicación general del contenido del cuestionario y se entregó para ser respondido, permitiendo que se plantearan dudas o explicaciones al respecto.

El cuestionario fue diseñado por los investigadores. Se incluyeron dos apartados, el primero compuesto de preguntas abiertas sobre información general del estudiante, y el segundo por una serie de proposiciones relacionadas con el uso de los applets para el estudio de transformaciones lineales en el curso de Álgebra Lineal. También, se incluyó una pregunta abierta en la que se solicitó responder a la cuestión: ¿Cuál es su percepción sobre el uso de herramientas tecnológicas, particularmente uso de applets en GeoGebra, para el estudio del tema de transformaciones lineales?

En relación con las proposiciones se solicitó a los participantes su grado de acuerdo con estas, según una escala Likert de cinco niveles: muy en desacuerdo (1), en desacuerdo (2), indiferente (3), de acuerdo (4), y muy de acuerdo (5). En la sección de resultados de este artículo se presentan los enunciados de este segundo apartado del cuestionario.

Dado que el objetivo del cuestionario era conocer y describir las percepciones del estudiantado, sin pretender realizar inferencias o generalizaciones, el tamaño reducido de la muestra (12 estudiantes) no representó una limitación. La muestra se seleccionó mediante un muestreo no aleatorio por conveniencia, lo que significa que los participantes fueron elegidos de manera intencionada según la accesibilidad y disponibilidad del investigador (Hernández, 2021). En este caso, el criterio de selección fue la asistencia a la clase en la que se llevó a cabo la implementación de los applets. Asimismo, el carácter exploratorio descriptivo y local del estudio, lo ha eximido de la realización de un proceso de validación.

4. RESULTADOS

4.1. Descripción de los applets diseñados

El diseño de los applets estuvo a cargo de los investigadores. Se construyeron cuatro applets utilizando GeoGebra. Estos se centraron en el estudio de las transformaciones lineales. El primer applet se diseñó exclusivamente para verificar si una transformación cumple con las características de ser una transformación lineal en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Los restantes tres applets más se diseñaron para visualizar dos tipos de transformaciones lineales: reflexión y rotación, así como la composición de estas. Estos conceptos son tanto algebraicos como geométricos, lo que permite realizar una interpretación geométrica, que posibilita visualizar el efecto de la transformación en objetos en el plano. Estos applets se centran en transformaciones lineales en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Aunque GeoGebra tiene ya instalados comandos para crear rotaciones, reflexiones o simetrías, la construcción se hizo a partir de la definición de transformación lineal, y de la matriz asociada a una base específica del dominio, pues se consideró más conveniente para los objetivos propuestos.

4.1.1. Applet sobre propiedades de una transformación lineal

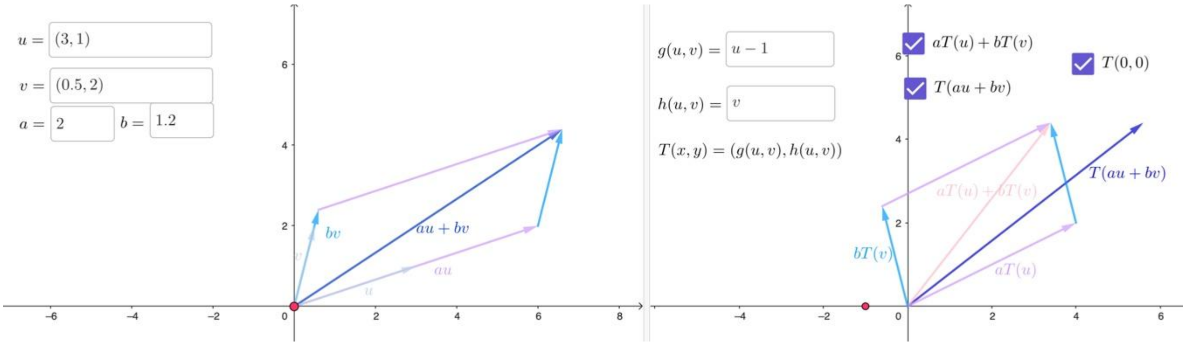
Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ debe satisfacer dos propiedades fundamentales, de manera que el incumplimiento de una de ellas indica que la transformación dada no es una transformación lineal. Estas propiedades son:

A) Aditividad: representada por $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para todo u, v en $\mathbb{R}^2$.
B) Homogeneidad: representada por $T(au) = aT(u)$, para todo u en $\mathbb{R}^2$ y para todo $a \in \mathbb{R}$.

El applet diseñado permite ingresar los vectores u y v, los escalares a y b, y la transformación que se desea analizar, para visualizar si se cumple con las propiedades. Particularmente la propiedad de que toda transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisface $T(0) = 0$, permite decidir si la transformación lineal dada no es lineal. El uso de esta propiedad se muestra en la Figura 1.

La Figura 1 (contiene enlace al applet) muestra un ejemplo de una transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (u - 1, v)$, donde de acuerdo con lo que se observa en la Figura 1, el vector obtenido de la suma de $1.2T(0.5,2) + 2T(3,1)$ (vector mostrado en color rosa) no coincide con la transformación $T(1.2(0.5,2) + 2(3,1))$ (vector mostrado en color azul). De manera que, al menos de manera hipotética se supone: (a) el uso del applet (lo mediacional) provee de una visualización geométrica, la cual, a la vez; (b) facilita y enriquece la enseñanza-aprendizaje en el momento de la clase (lo interaccional), (c) ayuda a la comprensión del alumnado (lo cognitivo), (d) fomenta su motivación (lo afectivo), (d) permite visualizar el efecto de las propiedades de una transformación lineal (lo epistémico). En particular, la propiedad $T(0) = 0$ (representada con el punto rojo) resulta muy útil para visualizar el efecto de que $T(0,0) = (0-1,0) = (-1,0) \neq (0,0)$.

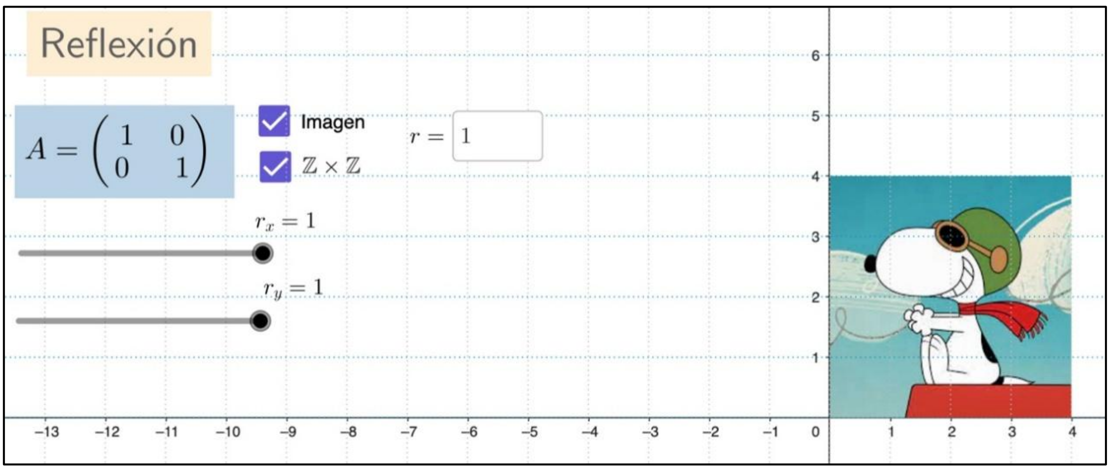
Figura 1
Applet transformaciones.



4.1.2. Applets sobre transformaciones lineales de tipo reflexión

La Figura 2 (contiene enlace al applet) muestra un applet que genera una reflexión con respecto al eje *x* o al eje *y*. De manera que, al mover los deslizadores puede apreciarse como se obtiene la respectiva matriz asociada a la transformación lineal vía multiplicación matricial. Es decir, el usuario del applet puede apreciar tanto la dinámica como la matriz que debe utilizar para multiplicar las coordenadas de cada punto en el plano para generar el efecto requerido. Este es un aspecto clave en los applets de visualización diseñados.

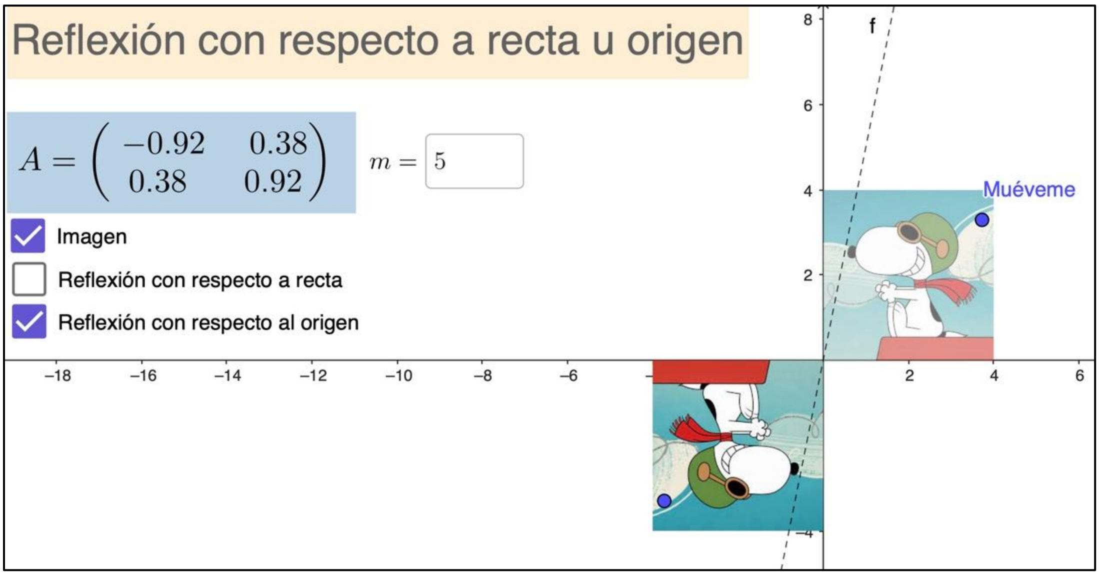
Figura 2
Applet reflexión.



Además de la reflexión, este applet permite escalar la imagen, es decir, ajustar su tamaño. Estas transformaciones son comunes en muchos libros de álgebra lineal, pero verlas en movimiento agrega un componente dinámico que, desde nuestra perspectiva, satisface las hipótesis presentadas, respecto al uso del applet (Figura 1), en el apartado anterior.

Se diseño otro applet (Figura 3, con enlace al applet) también relacionado con la reflexión, pero generalizada a cualquier recta que contenga al origen. A pesar de que visualmente es sencillo entender esta transformación, la manera de obtener la matriz de la transformación es más desafiante. En el caso de estudiantes de matemática, podría convertirse en un applet más atractivo en el sentido constructivo (la obtención de la matriz se puede ver en el siguiente enlace). Este applet también presenta la reflexión con respecto al origen, como un caso particular, el cual está representado en la Figura 3.

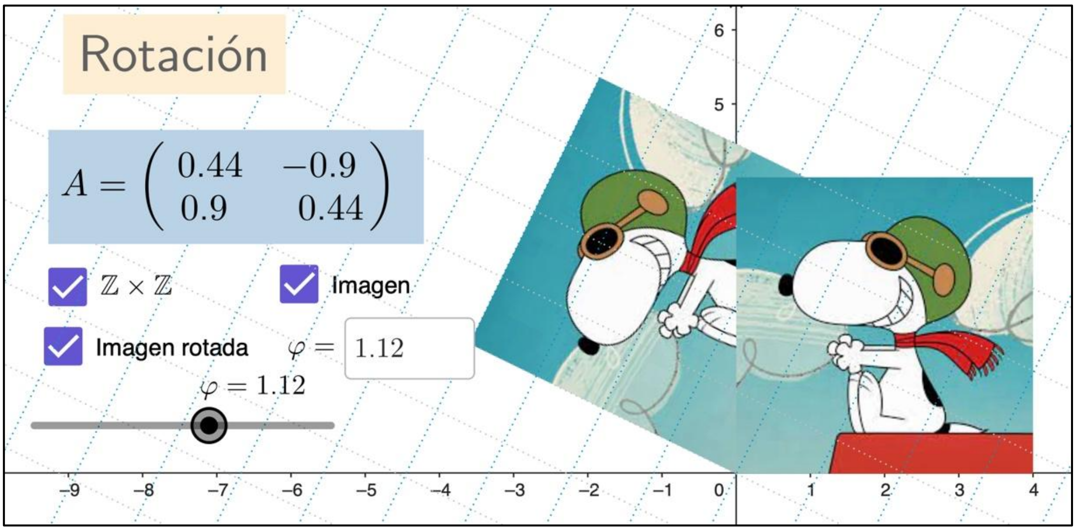
Figura 3
Applet reflexión con respecto a la recta y el origen.



4.1.3. Applet sobre transformaciones lineales de tipo rotación

Otro applet (Figura 4, contiene enlace al applet) se diseñó para visualizar una transformación común presentada en los libros de álgebra lineal: la rotación en el plano. Además de permitir la visualización de la dinámica implicada en la realización de las transformaciones, estos applets proveen la matriz de transformación.

Figura 4
Applet rotación.



La propuesta de estos applets representa un intento de fusionar la teoría matemática relacionada con el concepto de transformación lineal y el uso de herramientas tecnológicas que permiten la visualización de forma dinámica, con el fin de ofrecer una experiencia de aprendizaje enriquecida. En función de la herramienta teórica escogida para la valoración de estos applets, consideramos que en su diseño se satisfacen cada una de las facetas de la idoneidad didáctica, como fue referido en el applet presentado en la Figura 1, lo cual proporciona, a priori, un valor académico-didáctico a estos.

4.2. Descripción de la implementación de los applets en una clase

Durante una sesión de clases, se llevaron a cabo interacciones entre el docente y el estudiantado, en el momento de abordar el concepto de transformación lineal. El docente introdujo el concepto de transformación lineal y planteó preguntas dirigidas al estudiantado, que orientaran la discusión acerca de la interpretación geométrica de las propiedades de una transformación lineal. Más precisamente, el docente primero presentó la definición general de una transformación lineal. Luego, la discusión se enfocó en el caso de transformaciones lineales en el plano, tal y como se muestra en la Figura 5.

Figura 5

Definición de transformación lineal en el plano cartesiano.

Recuerde que una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ es una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

1. $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$, para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
2. $T(\alpha(x_1, y_1))) = \alpha T(x_1, y_1)$, para todo $(x_1, y_1), \in \mathbb{R}^2$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Posteriormente, el docente planteó algunas preguntas al estudiantado acerca del efecto que se podría obtener al aplicar una transformación lineal a diferentes conjuntos del plano, tales como rectas, curvas, o regiones bidimensionales, generando interrogantes en el estudiantado.

Para el desarrollo de las actividades, el estudiantado trabajó en parejas, en este caso, cada pareja tenía al menos un dispositivo electrónico con acceso a internet, que podía ser una computadora portátil, o una tableta digital. El profesor les envió por medio de una carpeta digital el documento guía para desarrollar la clase, y simultáneamente lo iba mostrando en la pizarra mediante el uso de un proyector digital.

El primer concepto abordado fue el de transformación lineal en el plano, luego se desarrollaron varias actividades con GeoGebra, que permitieran visualizar algunas propiedades geométricas, así como la relación entre una transformación lineal y un subespacio, en este caso, del plano cartesiano. Las actividades abordaron los siguientes ejemplos:

- Transformaciones no lineales.
- Reflexiones respecto de los ejes cartesianos.
- Reflexiones respecto de una recta cualquiera que pasa por el origen.
- Composición de reflexiones.
- Rotaciones.

El docente estuvo siempre observando y controlando la actividad para evitar que algunas personas integrantes de los equipos no estuvieran colaborando con el desarrollo de las actividades. Al inicio de la clase, se presentó la definición formal de transformación lineal, sin embargo, como es usual al abordar este tema, la definición es abstracta y algebraica, por lo que se suele perder de vista el carácter geométrico. En este caso, esto puede provocar que el estudiantado pierda de vista la relación entre el concepto de transformación lineal, y otros conceptos previos relacionados, como los vectores, los espacios vectoriales, su interpretación geométrica a partir de rectas y planos, descritas por medio de vectores directores y combinaciones lineales.

Una vez presentada la definición general, se iniciaron las actividades, comenzando con algunos experimentos sencillos. En esta primera actividad, se definía en GeoGebra la función $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $S(x, y) = (x^2, y)$, para observar primero mediante algunos experimentos que esta transformación no es lineal. Se realizaron tres experimentos, en uno de ellos se solicitó: "Grafique en GeoGebra algunas curvas y su respectiva imagen bajo S."

Seguidamente, se procedió a realizar otros experimentos con funciones que sí son transformaciones lineales, utilizando la definición a partir de la matriz de la transformación. El profesor inicialmente hizo la indicación para que las parejas de estudiantes escribieran las respectivas instrucciones en GeoGebra, en los dispositivos electrónicos, y mientras tanto verificó con cada pareja que estuvieran ejecutando la indicación. En algunos casos fue necesario dar algunas indicaciones adicionales para la escritura de los respectivos comandos. Una de las actividades se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Actividades relacionadas con la reflexión respecto de los ejes coordenados.

Actividad 4.2 *Grafique en GeoGebra algunas curvas, y su respectiva reflexión respecto de los ejes x y y, mediante la multiplicación matricial.*

Actividad 4.3 *Grafique la imagen del cuadrado de lado uno, bajo las reflexiones con los ejes, mediante la multiplicación matricial.*

Posteriormente, se extendió la construcción a reflexiones respecto de una recta arbitraria que pasa por el origen, mediante la construcción de la matriz de la transformación, sin embargo, en este caso se trabajó con una base apropiada, realizando luego el respectivo cambio de base. A partir de las dos actividades anteriores, el profesor preguntaba a los estudiantes acerca de los resultados, para establecer conjeturas respecto de la transformación de rectas, o figuras geométricas, en este caso un cuadrado, al ser aplicada una transformación lineal. La idea era que los estudiantes pudieran observar qué propiedades se preservan a través de la aplicación de una transformación lineal. Por ejemplo, que la imagen de una recta que pasa por el origen, bajo una transformación lineal, también es una recta que pasa por el origen, es decir, ambos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

De forma similar, se plantearon actividades para estudiar las rotaciones en el plano, definidas a partir de la construcción de la matriz asociada a la base canónica, esta es

$$[R_\theta]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

donde el subíndice $\mathcal{C}$ se refiere a la matriz en la base canónica. En este caso, se plantearon actividades similares a las anteriores, para que el estudiantado analizara el efecto de la aplicación de estas transformaciones. Esto se presenta en la Figura 7.

Figura 7

Actividades relacionadas con la reflexión respecto de los ejes coordenados.

Actividad 4.13 *Grafique en GeoGebra algunas curvas, y su respectiva rotación de ángulo θ respecto del origen, y en el sentido contrario al de las agujas del reloj, mediante la multiplicación matricial.*

Actividad 4.14 *Utilice el siguiente applet:* `https://www.geogebra.org/m/teqn6mar`*, elaborado en GeoGebra, para visualizar el efecto de la rotación en una imagen.*

Al final de cada bloque, se presentaba el applet creado previamente, para que los estudiantes también pudieran observar el efecto de la transformación en una imagen digital, como generalización de los experimentos realizados previamente. Esta parte final permitió visualizar el alcance que tienen los conceptos matemáticos abstractos y concretos estudiados con anterioridad en actividades cotidianas, como reflejar o rotar una imagen, mediante una aplicación, y que esto se puede realizar a partir del concepto de transformación lineal, y la matriz asociada a una base. Es importante destacar que, en la mayoría de los casos, las parejas establecieron conjeturas adecuadas respecto del comportamiento de las rectas al aplicarse una transformación lineal, no obstante, no se profundizó en propiedades geométricas más específicas, como la preservación o modificaciones de longitudes o medida angular.

4.3. Descripción de la percepción estudiantil sobre los applets

En la aplicación del cuestionario sobre la percepción estudiantil participaron los 12 estudiantes que asistieron a la clase en la que se realizó la implementación de los applets diseñados. En la Tabla 1, se presentan las siete proposiciones incluidas en el cuestionario. Para cada proposición se muestra la frecuencia absoluta de respuestas en cada nivel de acuerdo, así como el nivel de acuerdo promedio y su desviación estándar.

Tabla 1

Percepción estudiantil sobre el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales. Estadísticas y distribución absoluta de niveles de acuerdo.

Proposición	Nivel de acuerdo					Promedio	DE
	1	2	3	4	5		
1. Comprendo mejor el concepto de transformación lineal cuando puedo visualizarlo geométricamente por medio de GeoGebra.	0	0	0	6	6	4.5	0.52
2. El uso de applets en GeoGebra me ayuda a determinar, en ciertos casos, cuando una transformación es lineal o no.	0	0	3	3	6	4.25	0.87
3. Al utilizar los applets en GeoGebra comprendo mejor cómo actúa la multiplicación de una matriz (de reflexión, contracción, expansión y rotación) en los puntos del plano.	0	0	0	2	10	4.83	0.39
4. La utilización de recursos tecnológicos en el aula, por ejemplo, GeoGebra, facilitan mi proceso de aprendizaje en el tema de transformaciones lineales.	0	0	0	0	12	5.00	0.00

5. El uso de recursos tecnológicos como GeoGebra es un buen complemento a las explicaciones teóricas en el tema de transformaciones lineales.	0	0	0	1	11	4.91	0.29
6. Es importante visualizar algunas aplicaciones de transformaciones lineales (en la medida de lo posible) y no solamente el estudio del cálculo con transformaciones lineales como tal.	0	0	0	0	12	5	0.00
7. El uso de GeoGebra para visualizar la acción de las transformaciones en el plano ha hecho que considere más importante aprender de transformaciones lineales y de álgebra lineal.	0	0	1	3	8	4.58	0.66

En general, las percepciones del estudiantado coinciden en una valoración positiva para el uso de los applets en el estudio de transformaciones lineales. En la Tabla 1 se observa que la mayoría de los participantes seleccionaron los niveles “de acuerdo” o “muy de acuerdo” en cada proposición. También se observa que en ningún caso fueron seleccionados los niveles inferiores de la escala. Asimismo, en todos los casos, el nivel de acuerdo promedio es mayor que 4 y la desviación estándar respectiva es menor que 1. Es decir, los estudiantes consideran que el uso de los applets favorece la comprensión de conceptos y procesos asociados a las transformaciones lineales y facilitan su aprendizaje complementando lo tratado de manera teórica.

En cuanto a cada una de las proposiciones, de forma unánime o casi unánime, los estudiantes estuvieron “muy de acuerdo” con tres proposiciones (4, 5, 6), las cuales se refieren a: complementar la teoría, facilitar el aprendizaje, visualizar aplicaciones. Por lo que, estos aspectos son los mejor valorados, respecto al uso de los applets para el estudio de transformaciones lineales.

Además, verificar si una transformación es lineal y valorar la importancia de aprender sobre Álgebra Lineal son los aspectos que los estudiantes consideran menos relevantes, en comparación con el resto de los aspectos. Esto es observado en las dos proposiciones (2 y 7) referidas a estos asuntos, las cuales muestran menor acuerdo en cuanto a su valoración positiva.

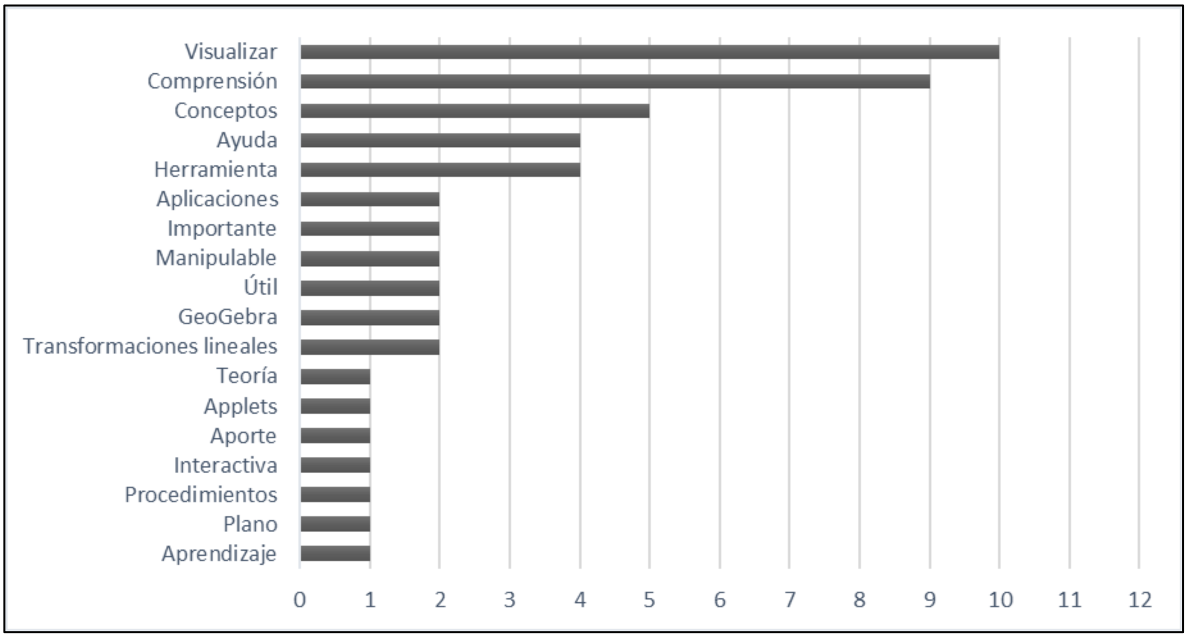
Por otro lado, en cuanto la pregunta abierta incluida en el cuestionario, las respuestas de los estudiantes se analizaron a través de la identificación de términos clave y el conteo de su frecuencia. En la Figura 8 se muestran los términos clave identificados y la frecuencia absoluta correspondiente a cada uno.

“Visualizar” y “Comprensión” fueron los términos mayormente señalados, seguidos de “Conceptos”, “Ayuda” y “Herramienta”. De manera que, la opinión más frecuente del estudiantado se relaciona con la manera en que la visualización, posibilitada por la herramienta tecnológica, ayuda a la comprensión, en particular de conceptos. Precisamente, dos términos, “Manipulable” e “Interactiva”, hacen referencia a cualidades que poseen los applets y que benefician la comprensión y el aprendizaje. En general, estos resultados coinciden con la valoración estudiantil altamente positiva sobre el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales que se refleja en la Tabla 1.

En resumen, la percepción del estudiantado sobre la implementación de los applets para el estudio de transformaciones lineales en el curso Álgebra Lineal fue positiva. Los estudiantes coinciden en que estas herramientas facilitan la comprensión y el aprendizaje de las transformaciones lineales, pues posibilitan la visualización, manipulación e interactividad, y actúan como complemento de la perspectiva teórica.

Figura 8

Percepción estudiantil sobre el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales. Distribución absoluta de términos clave.



4.4. Análisis de idoneidad didáctica de la propuesta

La propuesta de diseño e implementación de applets en GeoGebra para el estudio de transformaciones lineales en un curso universitario de Álgebra Lineal se analizó con base en las facetas, componentes e indicadores de la noción de idoneidad didáctica dentro del marco EOS. Tal y como se ejemplificó en el apartado 4.1.1, los applets fueron diseñados teniendo como referente el posible desarrollo de cada una de las facetas de la idoneidad didáctica (Godino, 2013). En consecuencia, se analiza la idoneidad de la propuesta de acuerdo con cada una de las facetas descritas en el apartado 3.1.

4.4.1. Idoneidad epistémica

El diseño de los applets se alinea con la idoneidad epistémica, ya que permite representar de manera visual y dinámica conceptos clave del álgebra lineal, como transformaciones lineales, reflexiones y rotaciones en el plano. Se observa que la propuesta incluye múltiples modos de expresión: verbal (explicaciones y definiciones), simbólica (representación algebraica de las transformaciones) y gráfica (visualización en GeoGebra). Además, en la implementación de los applets se promueven el uso de situaciones de interpretación y argumentación, pues los estudiantes deben analizar el efecto de las transformaciones en distintos objetos geométricos y verificar si cumplen con las propiedades de linealidad.

Asimismo, en el diseño de los applets se tomaron en cuenta conceptos relacionados y necesarios para el estudio de las transformaciones lineales. Entre ellos, se incluyen el concepto de función, espacio vectorial, multiplicación escalar, suma de vectores, igualdad de vectores y la definición formal de transformación lineal. Además, se consideró la propiedad $T(0) = 0$, la cual es de gran utilidad para determinar la no linealidad de una transformación. La incorporación explícita de estos conceptos en las actividades del applet permite reforzar el significado de las transformaciones lineales y su relación con otros elementos fundamentales del álgebra lineal.

El applet sobre propiedades de una transformación lineal permitió verificar condiciones fundamentales, como aditividad y homogeneidad, proporcionando evidencia clara sobre cuándo una transformación es o no lineal. Los applets de reflexión y rotación refuerzan la conexión entre la teoría algebraica y la interpretación geométrica, favoreciendo la comprensión conceptual.

Aunque los applets incluyen conceptos fundamentales para la comprensión de las transformaciones lineales, permiten la exploración de la linealidad a través de sus propiedades e incluyen múltiples tipos de representación, podría mejorarse su idoneidad epistémica ampliando el conjunto de situaciones problema de aplicación presentados.

4.4.2. Idoneidad cognitiva

Desde el punto de vista cognitivo, la propuesta atiende la necesidad de conectar el nuevo conocimiento con los conocimientos previos de los estudiantes. Según Roa-Fuentes y Oktaç (2010), el aprendizaje de transformaciones lineales requiere la comprensión previa de funciones, espacios vectoriales y operaciones como la combinación lineal. El diseño de los applets facilita este proceso al permitir la manipulación interactiva de estos conceptos, favoreciendo la construcción progresiva y significativa del significado de las transformaciones lineales.

La propuesta también considera la dificultad inherente a la abstracción del tema, ya que GeoGebra permite visualizar en tiempo real los efectos de las transformaciones. Esta característica ayuda a reducir la brecha entre la comprensión algebraica y su interpretación geométrica, lo que puede disminuir la carga cognitiva y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Aunque los applets permiten la manipulación interactiva e incluyen conceptos esenciales para la construcción del significado de las transformaciones lineales, su idoneidad cognitiva podría favorecerse incorporando actividades de refuerzo para los estudiantes con dificultades durante la implementación, como tutoriales adicionales o ejemplos guiados antes de la exploración libre.

4.4.3. Idoneidad interaccional

El diseño instruccional que incluye el uso de applets fomenta la interacción entre el docente y los estudiantes, así como el trabajo colaborativo entre pares. Durante la implementación, el docente planteó preguntas orientadas a la reflexión, promoviendo el diálogo y la formulación de conjeturas sobre el efecto de las transformaciones lineales. Además, se observa que la propuesta facilita la autonomía de los estudiantes, ya que los applets permiten la exploración individual y grupal sin depender exclusivamente de la instrucción del docente.

Asimismo, se tomaron en cuenta las dificultades del estudiantado en la comprensión de la definición de transformación lineal y cómo el uso de los applets puede contribuir a superarlas. Una de las principales dificultades consideradas está relacionada con la notación matemática, en particular con la interpretación de expresiones como $T(v)$, donde T representa una transformación y v representa un vector. Los estudiantes pueden experimentar confusión al diferenciar entre vectores y escalares, especialmente al interpretar expresiones como $au + bv$ (con $u, v \in \mathbb{R}^2$), que representa un vector y no un número real.

El uso de los applets facilita la superación de esta dificultad, ya que permite visualizar la transformación de los vectores en tiempo real, aclarando que los objetos manipulados corresponden a elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y no a números reales. Al interactuar con las representaciones gráficas y observar cómo las transformaciones afectan a diferentes conjuntos de vectores, los estudiantes pueden construir una mejor comprensión de la notación y del significado conceptual de las operaciones involucradas en las transformaciones lineales.

El uso de GeoGebra también permite desarrollar evaluación formativa, ya que los estudiantes pueden contrastar sus conjeturas con la representación gráfica proporcionada por la herramienta. Esto posibilita la identificación y resolución de conflictos semióticos en tiempo real, favoreciendo el aprendizaje.

Aunque en la implementación de los applets se fomenta la discusión entre pares y el intercambio de ideas, la idoneidad interaccional puede favorecerse incorporando retroalimentación automática dentro del diseño de los applets. Por ejemplo, si un estudiante ingresa una transformación que no es lineal, el applet podría proporcionar una explicación detallada del error.

4.4.4. Idoneidad mediacional

Desde el punto de vista mediacional, el uso de GeoGebra es pertinente, ya que proporciona un recurso visual e interactivo que complementa las explicaciones teóricas. La implementación en un entorno digital facilita la exploración autónoma de los conceptos y permite a los estudiantes experimentar con diferentes transformaciones sin limitaciones físicas o de tiempo.

El estudio de las transformaciones lineales no se aborda únicamente a través de la enseñanza tradicional mediante clases magistrales. Al incorporar los applets en la instrucción, se busca potenciar la idoneidad mediacional al permitir que los estudiantes manipulen directamente las representaciones gráficas y algebraicas de las transformaciones. Esto les brinda la oportunidad de incluir diferentes transformaciones en el applet y visualizar si cumplen o no con las condiciones de linealidad, por ejemplo.

Además, los applets permiten verificar empíricamente propiedades fundamentales, como el teorema $T(0) = 0$, mostrando que en toda transformación lineal la imagen del vector cero es el vector cero. Sin embargo, los estudiantes también pueden explorar casos en los que una transformación satisface esta propiedad, pero no es lineal, promoviendo así una comprensión más profunda de las condiciones necesarias para la linealidad. Este enfoque facilita el desarrollo del pensamiento crítico y fomenta la construcción de conocimiento a partir de la experimentación y la observación.

La planificación de las actividades en grupos favorece el acceso equitativo a los recursos, asegurando que todos los participantes puedan interactuar con las actividades propuestas.

Aunque los applets brindan una alternativa a la enseñanza magistral tradicional y se permite la experimentación libre y la exploración autónoma de conceptos, la idoneidad mediacional puede potenciarse agregando herramientas adicionales al diseño, tales como registro de respuestas y captura de imágenes.

4.4.5. Idoneidad afectiva

El análisis de la percepción estudiantil evidencia que los applets contribuyeron positivamente a la motivación y el interés por el aprendizaje del álgebra lineal. Los resultados del cuestionario muestran que los estudiantes valoran la visualización geométrica como un factor clave para la comprensión de los conceptos, destacando términos como "visualizar", "comprensión", "ayuda" e "interactiva".

La posibilidad de manipular dinámicamente las transformaciones y observar sus efectos en tiempo real parece haber generado una experiencia de aprendizaje más atractiva. Además, la percepción estudiantil refleja que la integración de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, facilita el proceso de aprendizaje y refuerza la confianza de los estudiantes en su comprensión del tema.

Aunque los applets permiten la visualización de conceptos abstractos, incrementando el interés y la motivación estudiantil, la idoneidad afectiva podría mejorarse incluyendo posibilidad de personalización de la experiencia (por ejemplo, elección de la representación visual), y elementos de gamificación (por ejemplo, indicadores de avance).

4.4.6. Idoneidad ecológica

El diseño e implementación de los applets se ajusta a las directrices curriculares y al enfoque por competencias del programa de estudios en el que se enmarca el curso de Álgebra Lineal. La propuesta promueve la innovación didáctica mediante el uso de tecnología, integrando herramientas digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además, se observa que los applets permiten establecer conexiones interdisciplinarias con otras áreas del conocimiento, como la geometría, facilitando una visión más integral del álgebra lineal. La adaptación de los contenidos a un formato digital también responde a las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas, alineándose con las demandas del contexto educativo actual.

Aunque los applets se ajustan a los lineamientos curriculares y fomentan la innovación en la enseñanza del álgebra lineal mediante el uso de tecnologías, la idoneidad ecológica se puede incrementar fomentando una mayor conexión con otras disciplinas (ingeniería, computación o economía).

5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DOCENTES

Este estudio permitió diseñar e implementar applets en GeoGebra como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso universitario de Álgebra Lineal. La incorporación de la noción de idoneidad didáctica del EOS como base de la propuesta enriqueció tanto su diseño como su implementación, permitiendo analizar con más detalle los aspectos didácticos involucrados en su construcción y uso.

El análisis de la idoneidad didáctica indicó que los applets cumplen con criterios de adecuación al proceso educativo y favorecen una intervención efectiva en el aula. Desde una perspectiva epistémica y cognitiva, permiten representar conceptos clave a través de distintas formas de expresión y favorecen la conexión con conocimientos previos, promoviendo un aprendizaje progresivo y significativo. En el plano interaccional, su implementación posibilita tanto el trabajo colaborativo como la autonomía estudiantil, mientras que, en el plano mediacional, constituyen un recurso tecnológico que facilita la exploración y la comprensión. A nivel afectivo, los estudiantes expresaron que los applets los motivaron y les ayudaron a comprender mejor los conceptos a través de la visualización y la interacción. Finalmente, en términos ecológicos, la propuesta se ajusta a los lineamientos curriculares y promueve el uso de herramientas digitales en la enseñanza del álgebra lineal. En conjunto, estos elementos sugieren que los applets en GeoGebra representan una estrategia didáctica con gran potencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Asimismo, a partir del análisis de los componentes de la idoneidad didáctica, se identificaron áreas de mejora que pueden potenciar aún más el impacto de estos recursos en futuras implementaciones. Entre las recomendaciones se encuentran: incorporar situaciones problema contextualizadas que permitan a los estudiantes explorar transformaciones lineales en escenarios reales; agregar retroalimentación automática dentro de los applets para ayudar a los estudiantes a identificar y corregir errores conceptuales; integrar estrategias de gamificación o personalización, aumentando la motivación y el compromiso; y explorar conexiones interdisciplinares, ampliando la aplicabilidad de estos conceptos en otras áreas del conocimiento.

Los hallazgos de este estudio también tienen implicaciones importantes para la práctica docente en matemáticas, especialmente en la enseñanza del álgebra lineal, donde muchos estudiantes enfrentan dificultades debido a la abstracción, el formalismo y el uso de diversos significados y lenguajes matemáticos. En este sentido, este estudio reafirma la necesidad de adoptar estrategias pedagógicas que favorezcan la construcción activa de conceptos, permitiendo a los estudiantes desarrollar su comprensión a través del trabajo con los objetos y procesos matemáticos. La implementación de applets en GeoGebra en la enseñanza de las transformaciones lineales podría representar una alternativa didáctica que responde a estos desafíos, pues proporciona un entorno en el que los estudiantes pueden manipular, visualizar y explorar propiedades matemáticas de manera interactiva.

Desde la perspectiva del profesor de matemáticas, la integración de estas herramientas digitales implica una transformación en la enseñanza, donde el rol del docente evoluciona de expositor a facilitador del aprendizaje. En lugar de limitarse a explicar definiciones y procedimientos algebraicos, el docente puede generar un espacio en el que el estudiantado participa activamente realizando acciones implicadas en el uso de los applets.

Este estudio destaca la importancia de que los docentes desarrollen competencias en el uso de tecnologías digitales, no solo como apoyo complementario, sino como herramientas clave para transformar la enseñanza del álgebra lineal. Con una planificación adecuada, la integración de applets y otros softwares educativos podría fortalecer la interacción en el aula, mejorar la comprensión conceptual a través de la visualización y manipulación, y aumentar el interés de los estudiantes por el aprendizaje (Jiménez et al., 2023). De este modo, más que una propuesta de innovación, este estudio invita a reflexionar sobre la necesidad de seguir explorando y optimizando el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior.

Por último, es importante observar que, en este caso, las actividades se aplicaron una vez que ya se habían abordado algunos conceptos básicos relacionados con el tema, tales como la definición de transformación lineal, y matriz de una transformación lineal, pues el objetivo era profundizar los conceptos y proveer herramientas de visualización. Sin embargo, también se puede introducir el tema a partir de una actividad similar, para luego abordar los conceptos desde el punto de vista matemático. En ambos casos, debe quedar claro que ambas actividades complementan el aprendizaje de los temas, y que el uso de GeoGebra y las actividades dinámicas de visualización no sustituyen el abordaje matemático necesario para la comprensión de los conceptos estudiados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, E. B. y Vázquez, P. R. Z. (2020). Estudio exploratorio de la comprensión del concepto transformación lineal en alumnos universitarios. En L. Hernández, G. Kantún y J. Slisko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática* (pp. 60-77). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Baki, A. (2015). Integration of Technology into Mathematics Teaching: Past, Present and Future. En S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. (pp. 17-26). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_2

BLEM (2017). *Plan de estudios de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de educação matemática*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2

Camacho, G. y Oktaç, A. (2017). Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2 el uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Matematical Working Space* (pp. 253-266). University of Western Macedonia.

Campos, M., Torres, A. y Morales, L. (2021). Geogebra como medio para identificar patrones en la clase de álgebra lineal: una propuesta concreta. *Revista Universidad y Sociedad*, *13*(2), 528-537.

De Benito, B. y Salinas, J. M. (2016). La Investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa. *RiiTE Revista interuniversitaria de investigación en Tecnología Educativa*, (0), 44-59. https://doi.org/10.6018/riite2016/260631

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (1997). L'algèbre linéaire: l'obstacle de formalisme à travers diverses recherches de 1987 a 1995. En J. L. Dorier (Ed), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en questions* (pp. 105-147). La Pensée Sauvage éditions.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, R. D. Porter y A. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra* (pp. 85-106). MAA Notes

Gallego-López, F., Granados-López, H. y Sánchez-Sánchez, O. (2018). Influencia del GeoGebra en la motivación y autorregulación del aprendizaje del cálculo y álgebra en universitarios. *Revista Espacios*, *39*(17), 7-17.

Gallo, H. G., Verón, C. A. y Herrera, C. G. (2019). Interpretación de transformaciones lineales en el plano utilizando GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (24), 32-37.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Gómez, B. M. (2018). El*ementos de estadística descriptiva.* EUNED.

Jiménez, O. B., Oviedo, R. K, y Ramírez, J. J.(2023). Deduciendo aspectos de Cálculo Diferencial con GeoGebra: Una experiencia de aula. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (114), 135-147.

Hernández, C. y Juárez, M. (2018). Satisfacción de los estudiantes en un curso propedéutico de matemáticas en e-modalidades. *Apertura*, *10*(2), 6-19. https://doi.org/10.32870/ap.v10n2.1384

Hernández, O. (2021). Aproximación a los distintos tipos de muestreo no probabilístico que existen. *Revista Cubana de Medicina General Integral, 37*(3).

Karrer, M. y Santos, R. C. M. (2018). Núcleo, Imagem e Composição de Transformações Lineares: uma abordagem gráfica desenvolvida em ambiente computacional. *Research, Society and Development*, *7*(10), 1-23. https://doi.org/10.17648/rsd-v7i10.405

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovation and sciences, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* Routledge.

Oktaç, A. y Gaisman, M. T. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *RELIME Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(4), 373-385.

Ortega, P. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza del algebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE. *Revista complutense de educación, 13(2), 645-675*.

Podevils, L. y Montenegro, F. (2021). Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: tesis de Maestría en carreras de Ingeniería. *UNIÓN-Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *17*(62), 1-17.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13*(1), 89-112.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library* (pp. 209-246). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL*.

Epsilon – Revista de Educación Matemática 2025, nº 119, 59-70
Sección: Experiencias de aula

Construcción del concepto de mediatriz de un segmento mediante una actividad en GeoGebra

Matías Augusto López Prego
Instituto Politécnico Nacional, México, *mato.lopez77@gmail.com*

Clara Mayo Juárez
Instituto Politécnico Nacional, México, *cmayoj@ipn.mx*

Juan Gabriel Molina Zavaleta
Instituto Politécnico Nacional, México, *jmolinaz@ipn.mx*

Resumen: *El documento muestra el trabajo de tres grupos conformados por cuatro estudiantes cada uno, de entre 12 y 13 años de una clase de matemáticas de primer año de secundaria. La actividad tuvo como objetivo que los estudiantes comprendieran la definición de mediatriz de un segmento a partir de una actividad efectuada en el software GeoGebra en la que fueron realizando distintas consignas y arribando a ciertas conclusiones para luego construir ellos mismos el concepto de mediatriz de un segmento.*

Palabras clave: *GeoGebra, concepto de mediatriz, constructivismo, aprendizaje significativo, TIC.*

Construction of the bisector concept of a segment through an activity in GeoGebra

Abstract: *This paper shows the work of three groups consisting of four students each, aged between 12 and 13, from a first-year high school mathematics class. The activity aimed to help students understand the definition of the perpendicular bisector of a segment based on an activity carried out in the GeoGebra software in which they carried out different instructions and arrived at certain conclusions to then construct the concept of the perpendicular bisector of a segment themselves.*

Keywords: *GeoGebra, bisector concept, constructivism, meaningful learning, ICT.*

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se percibe como un proceso complejo. La introducción de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la educación, junto con las herramientas informáticas, ha llevado a algunos educadores a abordar esta complejidad mediante la creación de propuestas pedagógicas. Estas propuestas buscan facilitar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, aprovechando las posibilidades ofrecidas por las TIC. Las propuestas constructivistas han sido centrales en transformar la enseñanza de las matemáticas. El constructivismo piagetiano en la enseñanza de matemáticas ve el aprendizaje como la adaptación constante de esquemas conceptuales frente a conflictos cognitivos derivados de la interacción en el aula, resultando en la construcción del conocimiento matemático. Según Ausubel et al. (1983), el aprendizaje significativo surge

Cómo citar: López, M. A., Mayo, C. y Molina, J. C. (2025). Construcción del concepto de mediatriz de un segmento mediante una actividad en GeoGebra. *Epsilon, 119*, 59-70.

cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva del sujeto, lo que puede dar lugar a la modificación o reestructuración del conocimiento. Por lo que el aprendizaje significativo no parte de cero sino de conocimientos previamente adquiridos. Las contribuciones de estos autores destacan la importancia de organizar y secuenciar los contenidos considerando los conocimientos previos del estudiante. En el aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan de manera sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Glasersfeld (1991, como se citó en Martínez, 1999, pág. 493) escribe sobre dos temas fundamentales del constructivismo, estos son:

a) El conocimiento no es recibido pasivamente sino construido activamente por el sujeto de forma cognitiva.
b) La función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica.

Brooks y Brooks (1993; como se citó en Antúnez, 2003, pág. 39) establecen cinco principios fundamentales para las aulas de clases constructivistas:

a) Valorar los puntos de vista de los estudiantes.
b) Desafiar las suposiciones de los estudiantes a través de actividades en el aula.
c) Presentar problemas relevantes para los estudiantes.
d) Construir lecciones alrededor de conceptos primarios e ideas principales, enseñando tanto el núcleo como los detalles de los conceptos.
e) Evaluar el aprendizaje de los estudiantes diariamente en el contexto de la enseñanza, permitiendo corregir oportunamente el proceso de aprendizaje, en contraste con la evaluación al final de unidades o semestres, cuando sería difícil remediar resultados insatisfactorios.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, podemos pensar que todo conocimiento, incluido el matemático, se construye, en su totalidad o en parte, a través de un proceso de reflexión que es propio del estudiante por ser un incentivo para su involucramiento en el proceso de estudio. Este proceso implica la activación de las estructuras cognitivas de los estudiantes durante la construcción, ya que estas están en constante desarrollo, lo que lleva a una transformación de las ya existentes. En resumen, el aprendizaje implica una continua construcción del propio conocimiento por parte del estudiante.

2. OBJETIVO

Este trabajo tiene como objetivo mostrar cómo la secuencia didáctica propuesta, con determinadas consignas guiadas, ayuda al estudiante a construir por sí mismo o en grupo un determinado concepto. Una herramienta tecnológica mediadora para la realización de estas consignas es GeoGebra. A esta aproximación guiada haciendo uso de la herramienta tecnológica, en investigaciones sobre uso de tecnología en la enseñanza de la matemática, se le conoce como actividad exploratoria. Es un tipo de actividad matemática en la que se involucra a los alumnos. En este tipo de actividades se les dan indicaciones precisas a los alumnos con la intención de que cumplan los propósitos didácticos del profesor y no se pierdan en la amplia gama de ideas a las que los podría llevar la herramienta con actividades más abiertas y conceptuales (Zbiek et al., 2007). En determinadas ocasiones, por distintas causas, como es la falta de tiempo en los cursos o por ciertas características del grupo, los docentes enseñan una definición, concepto o alguna propiedad de manera expositiva en donde el conocimiento a enseñar se plasma en el pizarrón como algo acabado en el cual el estudiante no tuvo participación alguna. De acuerdo con Espinoza (2023, p. 14), esta visión educativa ha sido llamada la “visita de las obras” o la “visita de monumentos” (Chevallard, 2013), en la que cada trozo de conocimiento aportado por grandes matemáticos de diferentes épocas debe ser venerado y mostrado en la doctrina de la enseñanza de las matemáticas. El estudiante recita una fórmula o un teorema sin saber el origen de este concepto matemático y mucho menos su aplicación en el mundo real. No existe la posibilidad de crear una relación real entre el estudiante y el conocimiento matemático. De esta manera, por lo mencionado antes en la introducción, el conocimiento enseñado no resulta significativo, ya que difícilmente lo han comprendido, por lo que en muchos casos el estudiante no lo recordará debido a que este no surgió de una interacción entre estudiantes o estudiantes y profesor. En cambio, usando el paradigma constructivista, el aprendizaje por parte del estudiante resulta mucho más rico ya que él mismo construyó el conocimiento que se deseaba enseñar.

3. FICHA DE TRABAJO ENTREGADA A LOS ESTUDIANTES

A continuación, se presentan las actividades que forman la ficha de trabajo que realizaron los estudiantes.

MEDIATRIZ

Actividad 1. Para realizar en GeoGebra:

I. Deja la hoja en blanco, ocultando el sistema de ejes coordenados y la cuadrícula; y luego traza un **segmento** de recta de extremos A y B.

II. Selecciona la herramienta “**mediatriz”** y señala el segmento $\overline{AB}$.

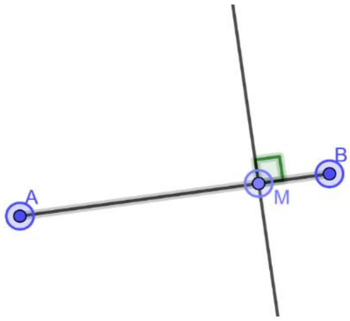
III. Ubica un punto $P \in mz_{\overline{AB}}$ y mide las distancias $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Mueve los puntos anteriores (A, P y B) y escribe tus observaciones.

IV. Marca el punto de **intersección** del segmento $\overline{AB}$ con la $mz_{\overline{AB}}$ y llámale M a dicho punto. Señala los **ángulos** $\widehat{PMA}$ y $\widehat{BMP}$ (respetando el orden de los puntos). **Mueve** los puntos anteriores (A, P y B) y escribe tus observaciones.

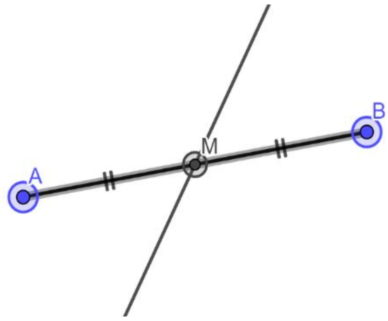
V. Define con tus palabras “mediatriz de un segmento” (de acuerdo a las conclusiones obtenidas).

VI. De acuerdo con las observaciones realizadas y el concepto de mediatriz que escribiste.¿Cuál de los siguientes casos corresponde a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$? Justifica tu respuesta.

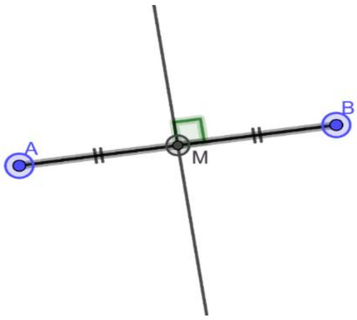
Caso 1



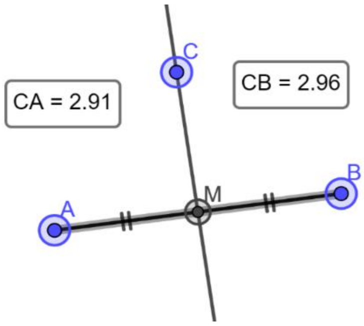
Caso 2



Caso 3



Caso 4



VII. Si se pide trazar la mediatriz de un segmento cualquiera utilizando útiles de geometría. ¿Puedes hacerlo? Y sin útiles de geometría, ¿Podrás realizarlo “lo más preciso posible”?

Las tareas en que se involucra a los estudiantes en la actividad 1 son, por un lado, que los alumnos propongan una definición de mediatriz con base en las tareas que atendieron al construirla; y por otra, verificar si los estudiantes después de realizar estas tareas pueden utilizar el concepto de mediatriz de un segmento.

4. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

Los estudiantes que participaron en la actividad tenían entre 12 y 13 años y estaban cursando el primer año de secundaria. El grupo estaba formado por 10 niñas y 11 niños. Es importante destacar que 4 niñas y 1 niño fueron finalistas en la olimpiada nacional de matemáticas y pertenecen al seleccionado nacional 2024, ellos 5 manejan un nivel superior al resto de la clase y además asisten horas extras a un taller de matemáticas.

5. DESARROLLO DE LA CLASE

5.1. Presentación del tema

La clase comenzó cuando los estudiantes se ubicaron en grupos y se le entregó la ficha de trabajo a cada estudiante en la cual iban a trabajar. El profesor comentó que iban a aprender el concepto de mediatriz de un segmento pero que la idea de la clase era que ellos mismos investigando con GeoGebra puedan llegar al concepto de mediatriz. En ese momento cabe destacar que muchos estudiantes se entusiasmaron ya que desde primaria manejan el programa y les gusta trabajar en él. Algunos estudiantes (los que participan en las olimpiadas y dos estudiantes argentinos) ya conocían el concepto de mediatriz, pero el profesor los colocó en grupos distintos para apoyar a otros estudiantes. Estos estudiantes tomaron con seriedad y responsabilidad el rol que el docente les estaba dando.

5.2. Desarrollo del tema

Luego de entregada la ficha se les pidió a los estudiantes que leyeran la actividad 1. La primera consulta que el profesor hizo fue si entendían lo que se pedía en GeoGebra y el uso de comandos. La respuesta de los estudiantes fue afirmativa, todos entendían qué debían hacer.

El profesor procedió a leer para todo el grupo la actividad I y las preguntas que surgieron fueron:

a) ¿Qué debemos observar?
b) ¿Lo anotamos con nuestras palabras?
c) ¿Lo discutimos como grupo y cada uno lo escribe en su hoja?
d) ¿ $mz_{\overline{AB}}$ es la mediatriz del segmento$\overline{AB}$?

A la pregunta a) se les contestó que leyeran lo que pedía la consigna y que realizaran las observaciones prestando atención a lo indicado.

A las preguntas b) y c) se les respondió que sí.

La pregunta d) la respondieron varios estudiantes diciendo que sí, mostrando que en el punto I al principio dice “mediatriz del segmento AB” y luego usa lenguaje simbólico. Luego de las preguntas se les indicó que, al finalizar las 7 consignas, se iban a revisar en forma oral, debatiendo las ideas de cada grupo y realizando una puesta a punto en el pizarrón.

Finalizando las explicaciones del docente a los estudiantes, trabajaron en forma autónoma.

El profesor no observó que los estudiantes tuvieran alguna dificultad al manejar el programa. Mientras los estudiantes realizaban la actividad 1, el profesor recorría los grupos para ver cómo iban trabajando. En el punto III el profesor notó que un grupo al ubicar el punto P lo “animaban” por lo que el punto se movía solo, entonces les llamó la atención que el punto desaparece y vuelve a aparecer. El profesor procedió a preguntarles ¿por qué pensaban que sucedía esto? Una respuesta fue: “La mediatriz debe ser infinita por eso no termina nunca y el punto vuelve a aparecer para que puedas verlo de nuevo”. En el punto IV los estudiantes presionaban los puntos en el otro sentido y el programa les indicaba el ángulo cóncavo. El profesor soló les mencionó que leyeran bien cómo se deben indicar y los estudiantes no tuvieron mayores problemas. Si bien los estudiantes no recordaban cómo referirse al ángulo cóncavo le decían “el del otro lado” “el que le falta a 90º para ser 360º”. En el punto V el docente comentó que la idea era que usaran las partes anteriores y escribieran una posible definición y que luego se iba a llegar entre todos a la definición formal. Se les volvió a pedir a los estudiantes de las olimpiadas que no resuelvan la tarea, sino que sólo guiaran a los otros integrantes del grupo. En el punto VII, el docente notó muchas dificultades al trazar la mediatriz sin útiles de geometría, pero no en cómo lo harían, sino en trazar una recta perpendicular. Es adecuado que los estudiantes sean capaces trazar la mediatriz sin útiles de geometría, debido a que, si lo hacen bien, están indicando saber que la misma pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular al mismo. La utilización de útiles no garantiza que manejen el concepto de mediatriz ya que muchas veces pueden realizar el trazado y la recta no podría pasar por el punto medio o no ser perpendicular. La idea de ubicar el punto medio por aproximación y trazar la perpendicular fue la más usada por los estudiantes, la idea formar los 90º en algunos estudiantes no estaba clara. El profesor notó que varios estudiantes presentaban problemas motrices. Luego que todos los grupos terminaron la actividad 1, el profesor procedió a trabajar puntualmente con los puntos III, IV, V, VI y VII. Se estimaba que la actividad 1 requería un máximo de 25 minutos, pero llevó entre 30 y 35 minutos. Si bien el uso de la tecnología tiene sus ventajas, al ser estudiantes de 12 y 13 años trabajando en grupo en una computadora cada cierto tiempo se distraían abriendo páginas web o algunos archivos que encontraban. Las veces que el profesor los observó, les llamó la atención para que continuaran con la actividad. Esto se podría corregir teniendo instalado un programa en la computadora del profesor en la que pueda manejar las demás, permitiendo solo abrir el programa a trabajar.

5.3. Cierre de la clase, puesta a punto de las actividades y análisis de las mismas

Para el cierre de la clase convinieron en forma grupal los puntos trabajados.

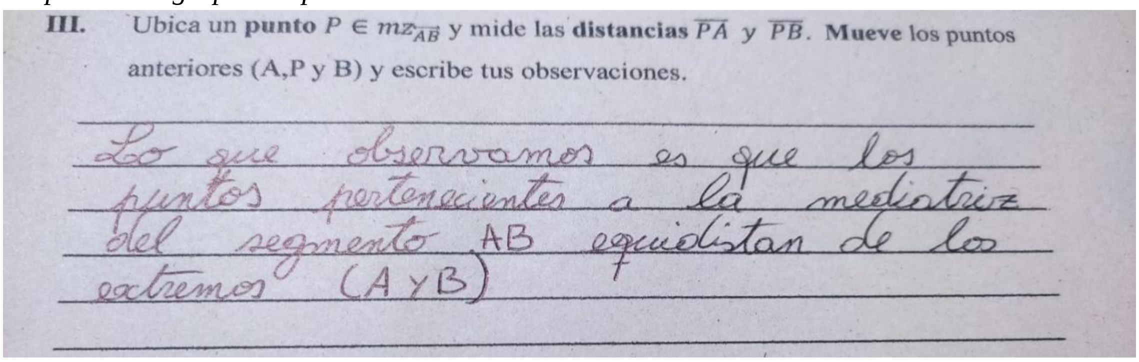
En el punto III, al preguntar a los estudiantes acerca de sus observaciones, ellos dijeron cosas como:

- Estudiante 1: “La distancia no cambia”
- Estudiante 2: “No importa donde este el punto P, si está en la mediatriz la distancia entre P y A es la misma que entre P y B”
- Estudiante 3: “Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento”.

Ante la última afirmación de unos de los estudiantes, el profesor preguntó “¿Qué es equidistar?”, ante esta pregunta siete estudiantes respondieron “estar a igual distancia”. El grupo en su totalidad comentó que la última afirmación es la “más formal” matemáticamente hablando.

Figura 1

Respuesta del grupo 1 al punto III de la actividad 1.

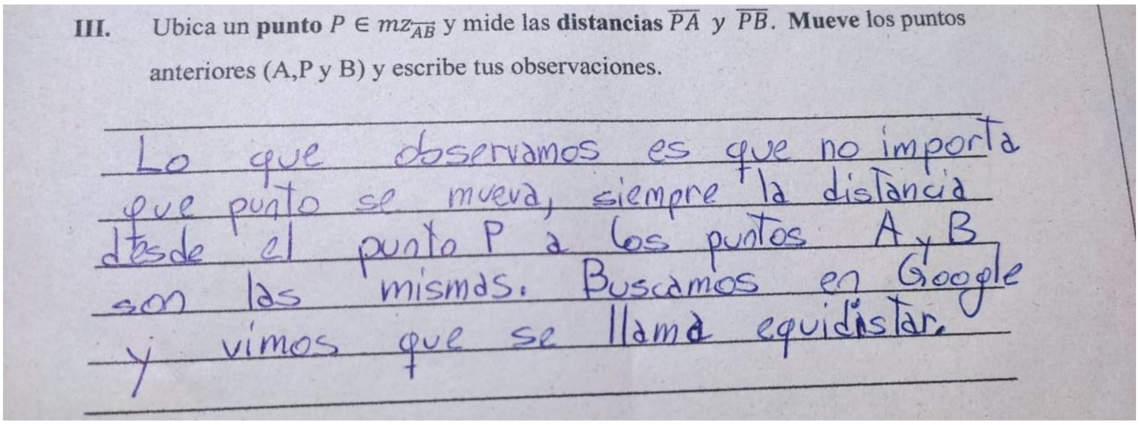


III. Ubica un **punto** $P \in mz_{\overline{AB}}$ y mide las **distancias** $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. **Mueve** los puntos anteriores (A,P y B) y escribe tus observaciones.

Lo que observamos es que los puntos pertenecientes a la mediatriz del segmento AB equidistan de los extremos (A y B)

Figura 2

Respuesta del grupo 2 al punto III de la actividad 1.



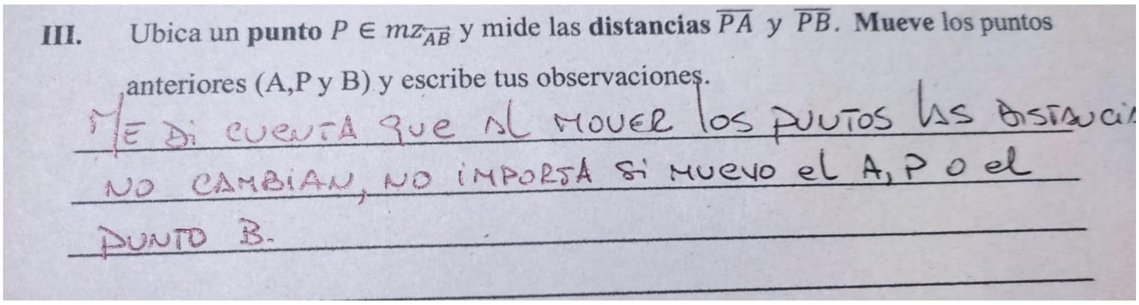
III. Ubica un **punto** $P \in mz_{\overline{AB}}$ y mide las **distancias** $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. **Mueve** los puntos anteriores (A,P y B) y escribe tus observaciones.

Lo que observamos es que no importa que punto se mueva, siempre la distancia desde el punto P a los puntos A y B son las mismas. Buscamos en Google y vimos que se llama equidistar.

El profesor para mostrar a los estudiantes lo que hizo el grupo que "animó" el punto P, compartió en el proyector la pantalla y les pidió que mostraran ese comando. Al presentar su construcción hubo muchas risas al ver que "desaparecía y aparecía" el punto P. La idea de que la mediatriz es infinita, que es una recta quedó en evidencia con la muestra de ese grupo. El profesor desconocía que los estudiantes conocían ese comando, resulto que sólo ese grupo lo conocía y el docente consideró oportuno mostrarlo en clase. En las figuras 1, 2 y 3 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 3

Respuesta del grupo 3 al punto III de la actividad 1.



III. Ubica un **punto** $P \in mz_{\overline{AB}}$ y mide las **distancias** $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. **Mueve** los puntos anteriores (A,P y B) y escribe tus observaciones.

ME DI CUENTA QUE AL MOVER LOS PUNTOS LAS DISTANCI
NO CAMBIAN, NO IMPORTA SI MUEVO EL A, P O EL
PUNTO B.

Por las tres imágenes, se puede apreciar que los estudiantes lograron concluir lo que se esperaba en el punto III. Algunos estudiantes manejaban el concepto de equidistar y otros lo buscaron en Google. Ante la consulta del profesor acerca de la búsqueda, los estudiantes mencionaron que habían escuchado una palabra que hacía referencia a "estar a igual distancia" y por este motivo decidieron buscarla.

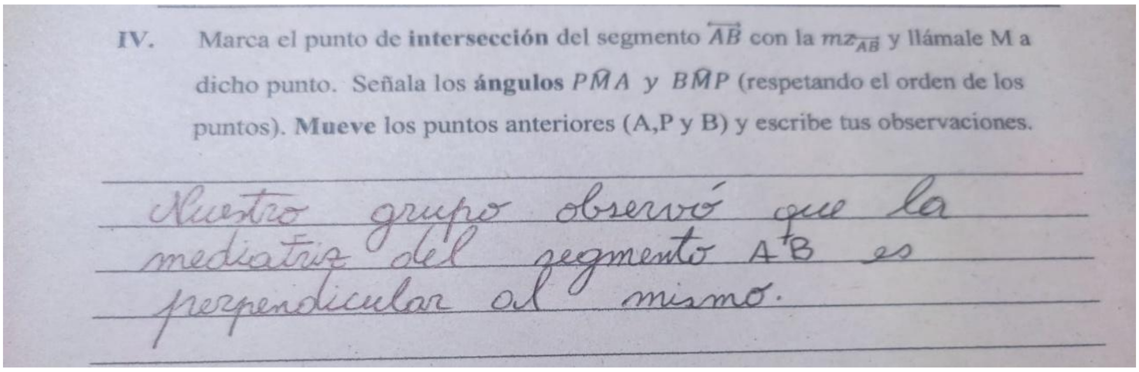
En el punto IV, cuando el profesor preguntó acerca de sus observaciones, ellos dijeron:

- Estudiante 1: "Siempre son rectos"
- Estudiante 2: "Siempre se forman 90º grados"
- Estudiante 3: "La mediatriz forma 90º con el segmento"
- "La mediatriz es perpendicular al segmento"

Al ser consultados por el profesor sobre estas afirmaciones, todos los estudiantes dijeron que todas eran correctas pero que la "más matemática" era la última. En las figuras 4, 5 y 6 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 4

Respuesta del grupo 1 al punto IV de la actividad 1.

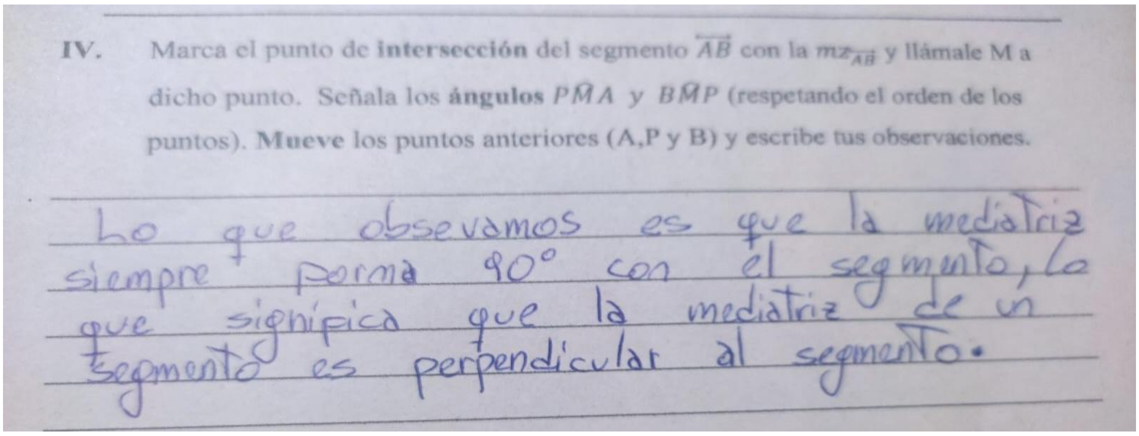


IV. Marca el punto de **intersección** del segmento $\overleftrightarrow{AB}$ con la $mz_{\overline{AB}}$ y llámale M a dicho punto. Señala los **ángulos** $P\hat{M}A$ y $B\hat{M}P$ (respetando el orden de los puntos). **Mueve** los puntos anteriores (A,P y B) y escribe tus observaciones.

Nuestro grupo observó que la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es perpendicular al mismo.

Figura 5

Respuesta del grupo 2 al punto IV de la actividad 1.

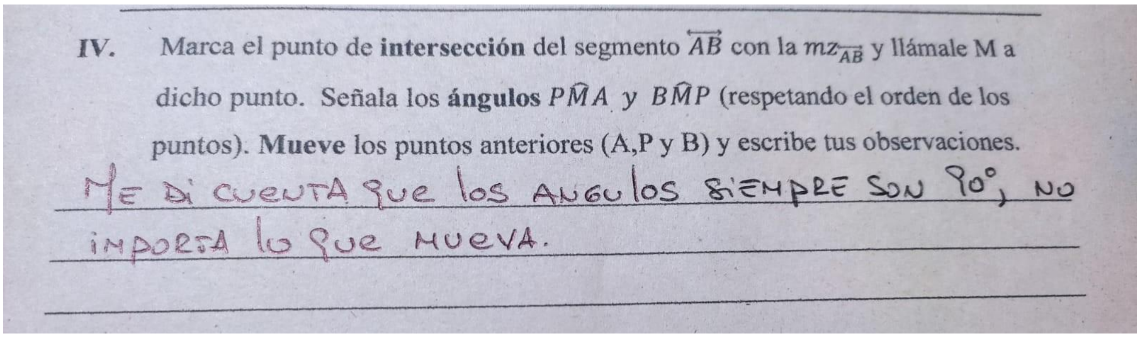


IV. Marca el punto de **intersección** del segmento $\overleftrightarrow{AB}$ con la $mz_{\overline{AB}}$ y llámale M a dicho punto. Señala los **ángulos** $P\hat{M}A$ y $B\hat{M}P$ (respetando el orden de los puntos). **Mueve** los puntos anteriores (A,P y B) y escribe tus observaciones.

Lo que obsevamos es que la mediatriz siempre porma 90° con el segmento, lo que signipica que la mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento.

Figura 6

Respuesta del grupo 3 al punto IV de la actividad 1.



IV. Marca el punto de **intersección** del segmento $\overleftrightarrow{AB}$ con la $mz_{\overline{AB}}$ y llámale M a dicho punto. Señala los **ángulos** $P\hat{M}A$ y $B\hat{M}P$ (respetando el orden de los puntos). **Mueve** los puntos anteriores (A,P y B) y escribe tus observaciones.

ME DI CUENTA QUE LOS ANGULOS SIEMPRE SON 90°, NO IMPORTA LO QUE MUEVA.

Por las tres imágenes, se puede apreciar que lograron concluir lo que se esperaba en el punto IV.

La idea de esta consigna era observar que la mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo, si bien se puede ver en las imágenes redacciones más formales que otras, se aprecia que la idea de perpendicular está clara. Ambos puntos, el III y el IV, van a servir para el punto V que se detallará a continuación.

En el punto V, cuando el profesor preguntó acerca de sus observaciones, ellos dijeron:

- Estudiante 1: "La mediatriz pasa por la mitad y forma 90º"

- Estudiante 2: "Es una línea que forma 90º y pasa por el punto medio"
- Estudiante 3: "Es la recta perpendicular al segmento por su punto medio"
- Estudiante 4: "Es un segmento que corta al segmento original a la mitad y es perpendicular"

El docente se detuvo a analizar estas respuestas mencionando ciertos detalles. Ante la segunda afirmación se le consultó acerca de la palabra "línea" y de inmediato el estudiante que dijo "línea" se corrigió afirmando "línea recta". Con respecto a la última afirmación, el docente les preguntó a los estudiantes "¿les parece que la mediatriz es un segmento?" y ocho estudiantes mencionaron que al trazar la mediatriz en GeoGebra el programa trazaba una recta. Al mostrarse en el proyector el caso del grupo que uso el comando "animación" pudieron verificar que es una recta y eso mismo sirvió para corregir la palabra segmento y usar la palabra recta. Todos los estudiantes estuvieron de acuerdo en que la tercera afirmación era la correcta y además de anotarse en el pizarrón, debieron anotarla en su hoja. En las figuras 7, 8 y 9 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 7

Respuesta del grupo 1 al punto V de la actividad 1.

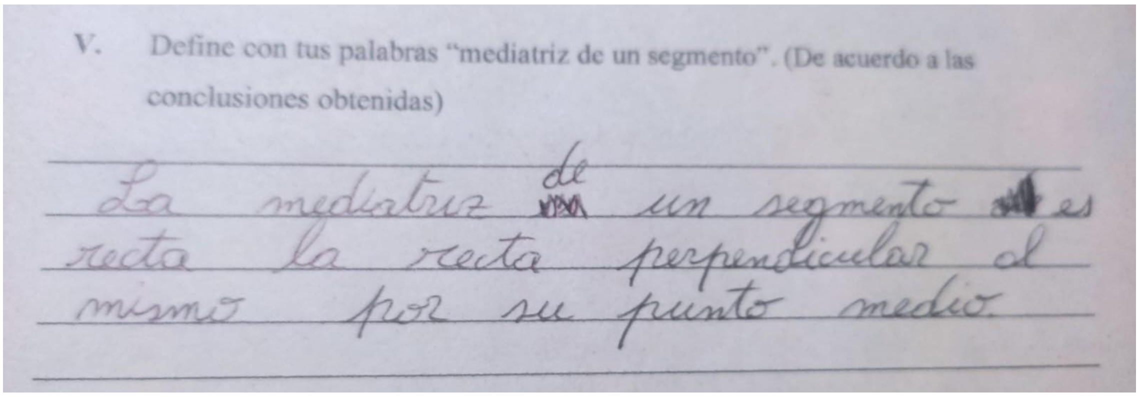


Figura 8

Respuesta del grupo 2 al punto V de la actividad 1.

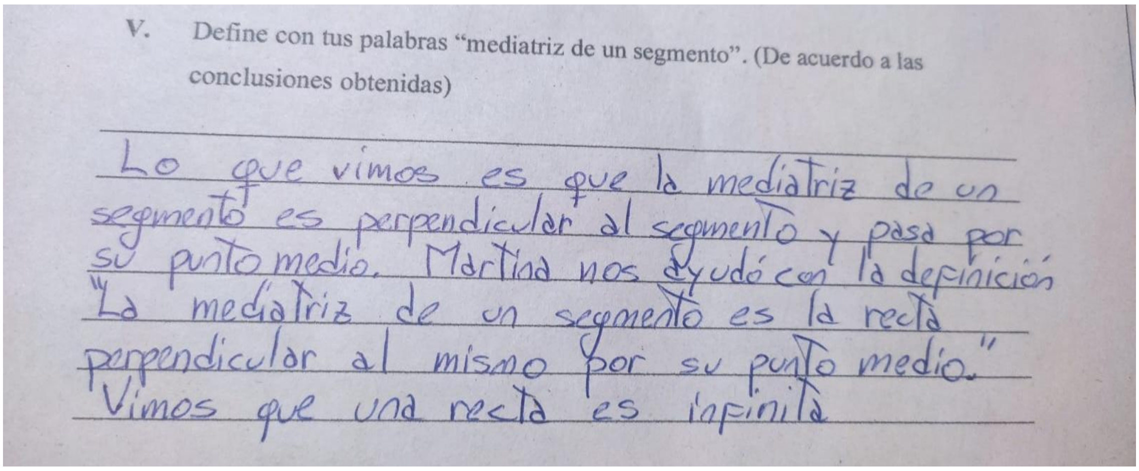
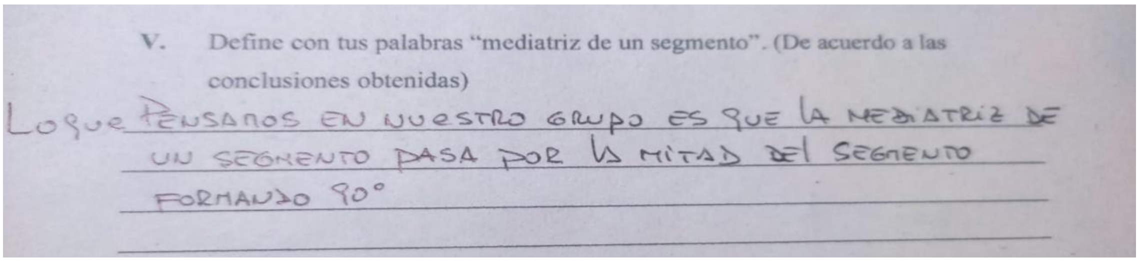


Figura 9

Respuesta del grupo 3 al punto V de la actividad 1.


V. Define con tus palabras "mediatriz de un segmento". (De acuerdo a las conclusiones obtenidas)

Lo que PENSAMOS EN NUESTRO GRUPO ES QUE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO PASA POR LA MITAD DEL SEGMENTO FORMANDO 90°

Se puede apreciar en las tres imágenes que el concepto de mediatriz está presente en los estudiantes. En las figuras 8 y 9 es donde se aprecia el mismo con más formalidad. Los estudiantes estuvieron de acuerdo como dije anteriormente y además de anotar la definición en el pizarrón la copiaron en su cuaderno.

En el punto VI, cuando el profesor preguntó acerca de sus observaciones, ellos dijeron:

- Estudiante 1: "Es la tercera"
- Estudiante 2: "La primera y segunda no por lo del ángulo y la mitad"
- Estudiante 3: "Sé que la primera y segunda no, que la tercera sí es, pero no sé del cuarto caso"

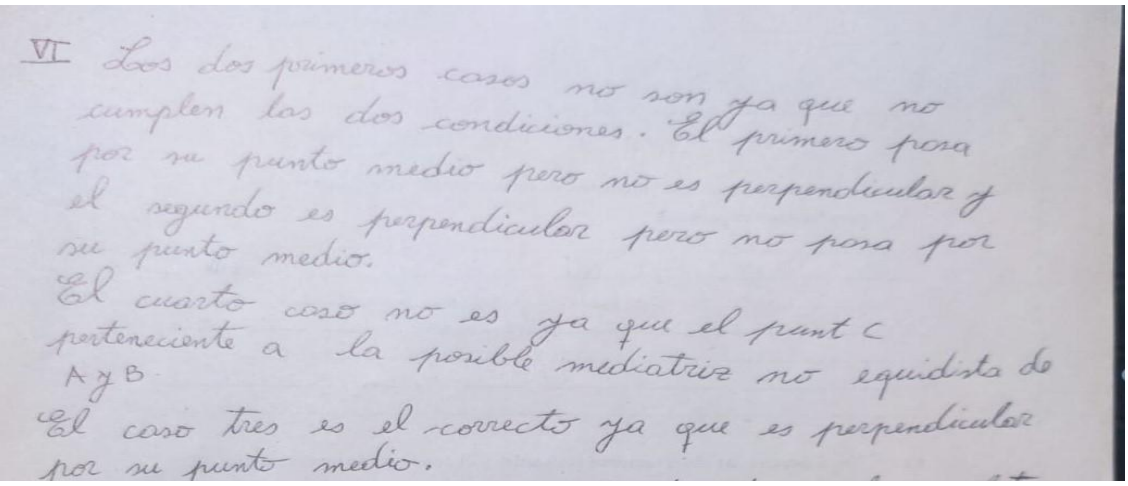
Si bien todos los estudiantes estuvieron de acuerdo en que el primer y el segundo caso no eran correctos, y esto al docente le pareció muy bueno ya que la idea de que la mediatriz es perpendicular al segmento por su punto medio se entendió, el docente, al consultarle a los estudiantes acerca de la tercera afirmación, notó que fue la pregunta que menos participación tuvo. Menos de la mitad de los estudiantes levantó la mano para decir lo que pensaba y algunas respuestas fueron:

- Estudiante 1: "Lo de igual distancia no se cumple"
- Estudiante 2: "Por el punto III"
- Estudiante 3: "Por lo que dijo el grupo de equidistar"

Con esas respuestas en forma oral, gran parte de los estudiantes comenzaron a notar las observaciones del punto III y pudieron apreciar porque el cuarto caso no es correcto. En las figuras 10, 11 y 12 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 10

Respuesta del grupo 1 al punto VI de la actividad 1.


VI Los dos primeros casos no son ya que no cumplen las dos condiciones. El primero pasa por su punto medio pero no es perpendicular y el segundo es perpendicular pero no pasa por su punto medio.

El cuarto caso no es ya que el punt C perteneciente a la posible mediatriz no equidista de A y B.

El caso tres es el correcto ya que es perpendicular por su punto medio.

Figura 11

Respuesta del grupo 2 al punto VI de la actividad 1.

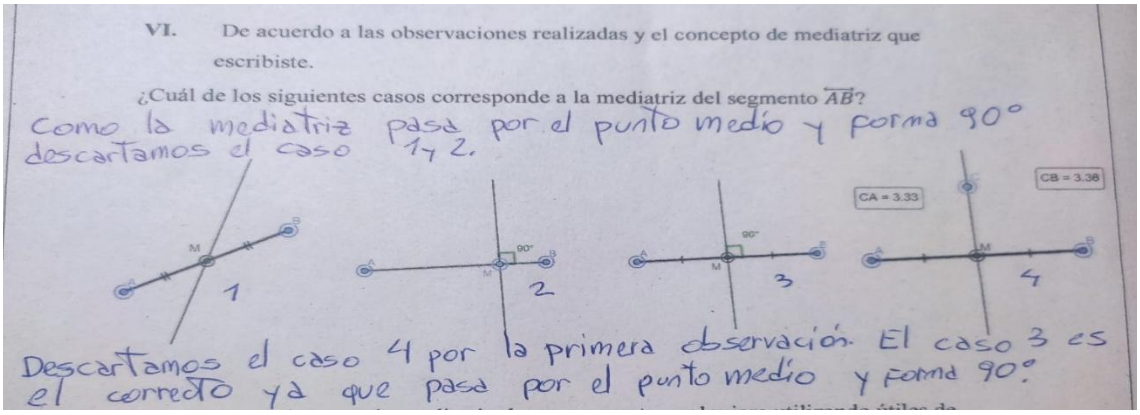
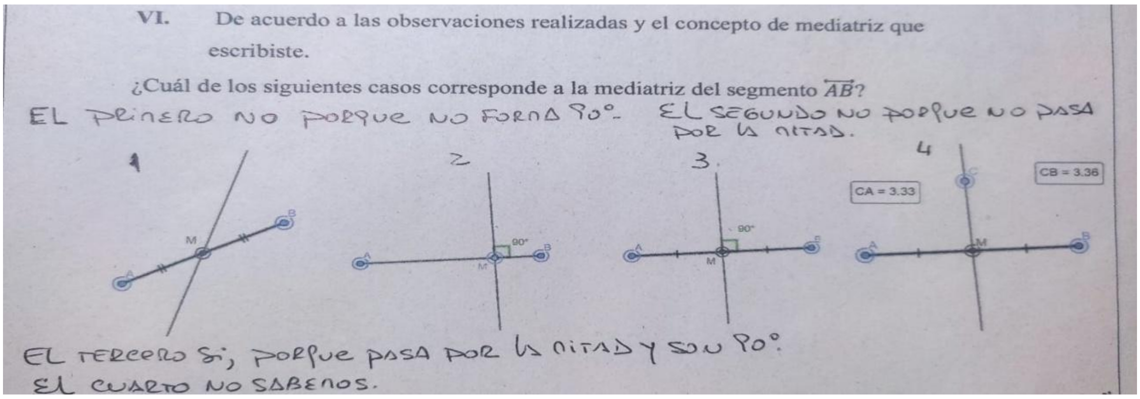


Figura 12

Respuesta del grupo 3 al punto VI de la actividad 1.



Por las tres imágenes, se puede apreciar que el análisis hecho por los grupos es correcto y es interesante ver como los casos 1 y 2 son descartados al haber realizado una aproximación donde no hay un ángulo de 90º en el caso 1 y no es el punto medio en el caso 2. El caso 4 no se puede realizar de esta manera. Cuando el docente pensó el caso 4 en GeoGebra trazó un ángulo de 91º, lo cual es muy difícil diferenciarlo con uno de 90º a simple vista, es por eso que el docente marcó las distancias con el fin de aplicar lo visto por los estudiantes en el punto III. En la figura 16, sucede algo similar salvo que el caso 4 no lo saben diferenciar. Un detalle por mencionar y que no parece menor es que un estudiante del seleccionado nacional de Matemáticas comenzó a intuir cierta idea de lugar geométrico al decir “el punto C está más cerca de A que de B, es por eso es que está de la mediatriz para el lado izquierdo” al decir eso hizo un gesto con las manos indicando la mediatriz con una mano y mostrando lo que sería un semiplano de borde la mediatriz. En este momento ya se estaba terminando la clase por lo que el docente no continuó con el punto VII ya que no se podría finalizar con el mismo. El docente comentó que el último punto de la actividad 1 lo iban a realizar los estudiantes en la siguiente clase y que podían investigar cómo trazar la mediatriz de un segmento.

6. COMENTARIOS FINALES

Si bien el docente no pudo trabajar todo lo pensado, que era trabajar con los siete puntos y terminar trazando la mediatriz de un segmento, se piensa que la idea de mediatriz quedó clara, la propiedad que dice que "los puntos pertenecientes a la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos de este" también.

Teniendo en cuenta lo mencionado en la introducción se puede apreciar que la interacción en el aula entre estudiantes y docente llevó a que se comprenda el concepto de mediatriz de un segmento por lo que los estudiantes lo aprendieron. Esto no se debe solo a la interacción mencionada, sino también a que este tipo de propuestas buscan facilitar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, aprovechando las posibilidades ofrecidas por las TIC.

Se puede apreciar que varios puntos mencionados por Brooks y Brooks (1993; como se citó en Antúnez, 2003, pág. 39) se reflejaron en el trabajo propuesto, por ejemplo: valorar los puntos de vista de los estudiantes, desafiar las suposiciones de los estudiantes a través de actividades en el aula y presentar problemas relevantes para los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antúnez, H. N. (2003). *La efectividad de la enseñanza constructivista de la aritmética y álgebra en el bachillerato* (Tesina de Licenciatura). Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Investigación Técnica, Chilpancingo.

Ausubel, D., Novak., J, D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Chevallard, Y. (2013). *Journal du Seminaire TAD/IDD*. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.

Espinoza, Y. (2023). *Diseño de una actividad de modelización matemática para la clase de Cálculo. El caso de la construcción de una barda semi-perimetral* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN.

Martínez, A. (1999). Constructivismo radical, Marco teórico de investigación y enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 493-502.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W. y Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In K. Lester Frank (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 1169–1207). IAP.

Epsilon – *Revista de Educación Matemática* 2025, nº 119, 71-82
Sección: *Experiencias de aula*

Software Wolfram Mathematica como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de teoría de grafos

Alan Uriel Gil Casas
Universidad Nacional Autónoma de México, alan.gil@unam.mx

Juan Gabriel Molina Zavaleta
Instituto Politécnico Nacional, jmolinaz@ipn.mx

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Instituto Politécnico Nacional, alerosas@ipn.mx

Resumen: *La presente experiencia de clase aborda la descripción de una secuencia didáctica para modelar problemas de teoría de grafos, apoyada en el uso del software Wolfram Mathematica para favorecer la enseñanza y aprendizaje en el cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Computación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. La secuencia se divide en cuatro actividades: i) escribir la solución de un problema, ii) resolver ejercicios de grafos, iii) usar comandos de Wolfram Mathematica para generar grafos, y iv) modelar un problema real. Los estudiantes lograron: i) establecer las conexiones entre la representación gráfica y la matriz de adyacencia de un grafo, ii) aplicar los comandos apropiados en Wolfram Mathematica para generar grafos y sus matrices de adyacencia, y trabajar con algunos de sus elementos, y iii) modelar situaciones reales utilizando grafos.*

Palabras clave: *aprendizaje, CAS, enseñanza, teoría de grafos.*

Wolfram Mathematica Software as a Tool for Teaching and Learning Graph Theory

Abstract: *The present class experience addresses the description of a didactic sequence to model graph theory problems, supported using the Wolfram Mathematica software to promote teaching and learning in the fourth semester of the Computer Engineering degree of the Faculty of Engineering of the Universidad Nacional Autónoma de México. The sequence is divided into four activities: i) writing the solution to a problem, ii) solving graph exercises, iii) using Wolfram Mathematica commands to generate graphs, and iv) modeling a real problem. Students were able to: i) establish the connections between the graphical representation and the adjacency matrix of a graph, ii) apply the appropriate commands in Wolfram Mathematica to generate graphs and their adjacency matrices, and work with some of their elements, and iii) model real situations using graphs.*

Key words: *CAS, graph theory, learning, teaching*.

1. INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de ingeniería en computación de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) cursan la asignatura obligatoria de Estructuras Discretas, en esta se estudia el tema de

Cómo citar: Gil, A. U., Molina, J. G. y Rosas, A. M. (2025). Software Wolfram Mathematica como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de teoría de grafos. *Epsilon*, *119*, 71-82.

teoría de grafos. La experiencia personal como docente, permite identificar que los estudiantes si bien no tienen problema en entender los conceptos básicos de la teoría de grafos, sí se les dificulta modelar un problema como grafo.

Debido al limitado tiempo del curso para abordar este tema, se buscaron alternativas didácticas que permitieran generar distintos tipos de grafos de forma práctica. Después de hacer una búsqueda de tecnología digital para la enseñanza de matemáticas, se decidió diseñar una didáctica apoyada en un Sistema de Álgebra Computacional (usualmente llamado CAS por sus siglas en inglés).

Por experiencias anteriores con el uso de esta tecnología digital se estableció una estrategia didáctica que consta de dos partes: una primera sesión con lápiz y papel durante la clase presencial y una segunda con el uso de Wolfram Mathematica para trabajo fuera de clase.

1.1. Sistemas CAS

El uso de tecnologías es muy común en la práctica docente actualmente, por ejemplo, tecnologías como los teléfonos inteligentes están presentes en las clases de matemáticas, especialmente en el nivel universitario; como señalan Borba et al. (2017), el rápido avance tecnológico supera a la investigación en educación matemática. En este trabajo se centra la atención en los CAS. El álgebra computacional es una disciplina de la computación científica que se sitúa en la intersección entre las matemáticas y las ciencias de la computación. Se enfoca en el diseño e implementación de algoritmos para el cálculo de objetos algebraicos.

Según Lamagna (2019), los CAS se pueden clasificar principalmente en dos: de propósito general y de propósito específico. Los sistemas de propósito general están diseñados para usarse en la mayoría de las áreas de las ciencias y de las matemáticas. Los CAS generales ofrecen principalmente la computación simbólica, la computación numérica, gráficas y programación. Los sistemas de propósito específico están diseñados para resolver problemas en un área específica de las ciencias o matemáticas como puede ser la teoría de grupos.

Los CAS han sido utilizados para elaborar prácticas docentes en distintos ámbitos. Morales y Panamá (2019) usan GeoGebra para enseñar álgebra y geometría en el primer y segundo semestre del bachillerato; demostrando que el aprendizaje tiene un incremento significativo en el segundo semestre respecto al primero. Ramírez (2020), también usa GeoGebra en un curso de matemáticas donde se evalúan contenidos sobre integración múltiple, en el cuarto año de la carrera de bachillerato y licenciatura de la enseñanza de matemáticas. Por su parte, Medina et al. (2017) utilizan Maxima para enseñar matemáticas numéricas en el segundo año de Ingeniería informática a 124 alumnos de distintos periodos. El uso de Maxima influye positivamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas numéricas. Vergara et al. (2016) usa Matlab para enseñar álgebra lineal en la licenciatura en matemáticas a 35 estudiantes. Al emplear Matlab, se observa que a los estudiantes se les facilita la comprensión y la solución de problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones lineales y otros temas. Por su parte, Williner (2016) utiliza Wolfram Mathematica para conocer sobre las manifestaciones de habilidades matemáticas en el aprendizaje cuándo se trabaja con el software y cuándo no, en el primer año de ingeniería en análisis matemático. Las actividades que diseñaron incluyen la construcción de tablas, la generación de gráficos y el cálculo de los valores para encontrar la pendiente de una recta secante. Los alumnos pasaron de usar Wolfram Mathematica como calculadora, a utilizarlo como un verdadero instrumento de trabajo.

1.1.1. Acerca de Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica es un software desarrollado hace más de 35 años, que incluye bibliotecas para muchas áreas de la computación (Vílchez, 2015; Vílchez-Quesada, 2019; Musyrifah et al., 2021). Se puede utilizar como un CAS y permite a los participantes desarrollar y probar sus soluciones en la nube a través de un navegador Web. Cuenta con una interfaz que permite publicar su trabajo a través de cuadernos que utilizan un lenguaje de programación propio.

En esta propuesta se presenta a la tecnología Wolfram Mathematica como una herramienta de estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la teoría de grafos, ya que es mucho más completa que otras opciones CAS que se revisaron como GeoGebra, Maxima o Matlab. Además de que la UNAM cuenta con una licencia de uso a través del correo institucional.

1.2. Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica que se presenta está diseñada con una estrategia híbrida como se ha mencionado (una parte a lápiz y papel y otra con tecnología). Se escogió esta estrategia por cuatro razones. La primera es que con base en la experiencia de otros semestres se notó que los estudiantes al utilizar el software directamente, mecanizan la solución sin pasar por una fase de conceptualización. La segunda razón es que el tema se plantea aprovechando la naturaleza dual de las matemáticas; Sfard (1991) aborda de dos formas la concepción de las matemáticas: como concepción estructural u objeto, y como concepción operacional o procesos. Por ejemplo, una función se define, en su concepción estructural, como una relación que se establece entre dos conjuntos; y en su concepción operacional, como un método o proceso que va de un origen a un destino. Mientras que una concepción operacional tiene que ver con acciones y algoritmos, una concepción estructural es más abstracta y menos detallada. La tercera es por el uso de Wolfram Mathematica como apoyo, y esto es siguiendo a lo que Jankvist et al. (2019) encontraron en una investigación al trabajar con estudiantes de secundaria, ellos se preguntaron lo que sucede cuando los procedimientos tradicionales son reemplazados por el uso de CAS. Una de las conclusiones que establecen es que "El uso de los CAS logra que la forma de trabajar con prueba y error sea mucho más eficiente para los estudiantes, lo que ocasiona que pierdan la habilidad de reconocer la naturaleza necesaria de las soluciones matemáticas" (p. 79). La cuarta y última razón obedece a un aspecto económico social, y es que no todos los estudiantes cuentan con un dispositivo electrónico para desarrollar las actividades durante la clase.

La idea es que una vez que el estudiante realice las actividades con lápiz y papel, se refuerce el aprendizaje del tema mediante el uso de Wolfram Mathematica a través de la comprobación rápida de sus soluciones y el desarrollo de retos adicionales. Turm y Barcel (2022) describen esta forma de proceder como un modo de uso que se hace de la tecnología en la clase de matemáticas para favorecer la práctica. Dado que la tecnología CAS ya tiene tiempo considerable en ser usada en la enseñanza (quizá alrededor de 40 años), existen una gran cantidad de trabajos de investigación al respecto, uno de los importantes es el de Lagrange (2005) en el que se reflexiona sobre distintos asuntos que surgen cuando una tecnología con capacidad CAS es llevada a la clase de matemáticas: por ejemplo, la necesidad de replantear las tareas matemáticas pues el uso de CAS podría volver obsoletas a las tareas tradicionales.

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta didáctica que utiliza Wolfram Mathematica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de grafos. Se plantean cuatro objetivos didácticos: i) identificar cómo los estudiantes expresan la solución de un problema, ii) establecer las conexiones entre la representación gráfica y la matriz de adyacencia de un grafo, iii) aplicar los comandos apropiados en Wolfram Mathematica para generar grafos y sus matrices de adyacencia, y trabajar con algunos de sus elementos, y iv) modelar situaciones reales utilizando grafos. Esta propuesta está dirigida a estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Computación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

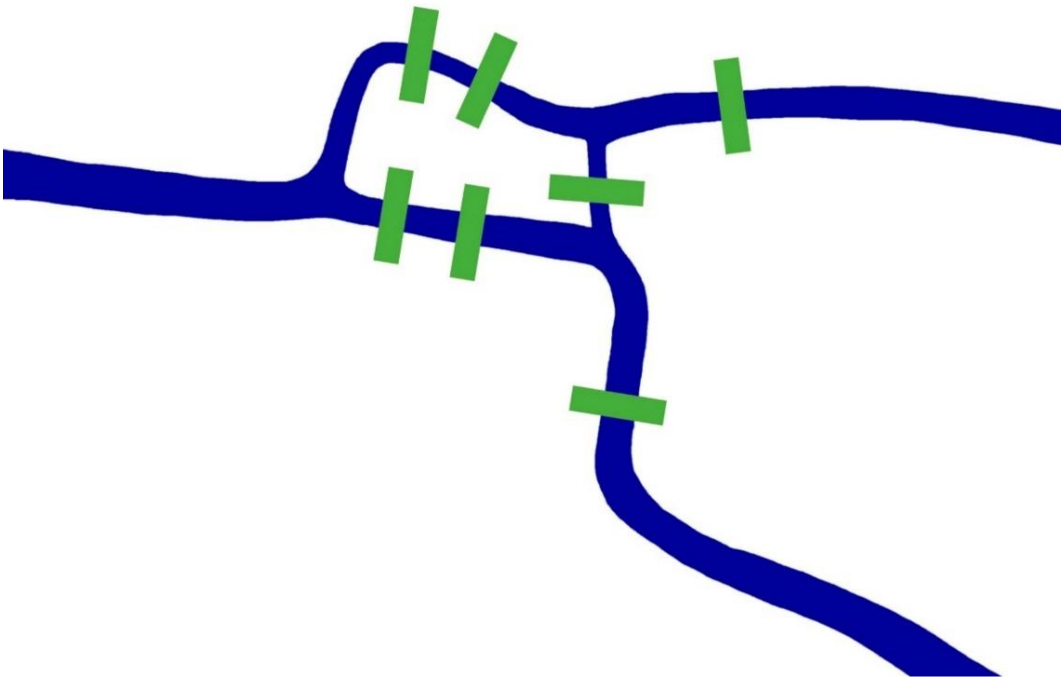
2. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La experiencia, que fue implementada de forma presencial en un grupo de 28 participantes, se divide en tres momentos: presentación del tema, desarrollo del tema y cierre.

2.1. Presentación del tema

Dentro del aula, en la clase presencial, se explica a los participantes la historia de los puentes de Königsberg en el año de 1700 y, con el proyector, se muestra en el pizarrón la Figura 1. Se plantea a los estudiantes las preguntas: ¿era posible cruzar cada uno de los puentes exactamente una vez?, ¿puedes probarlo? Se invita a los alumnos a que escriban las respuestas con lápiz en un papel.

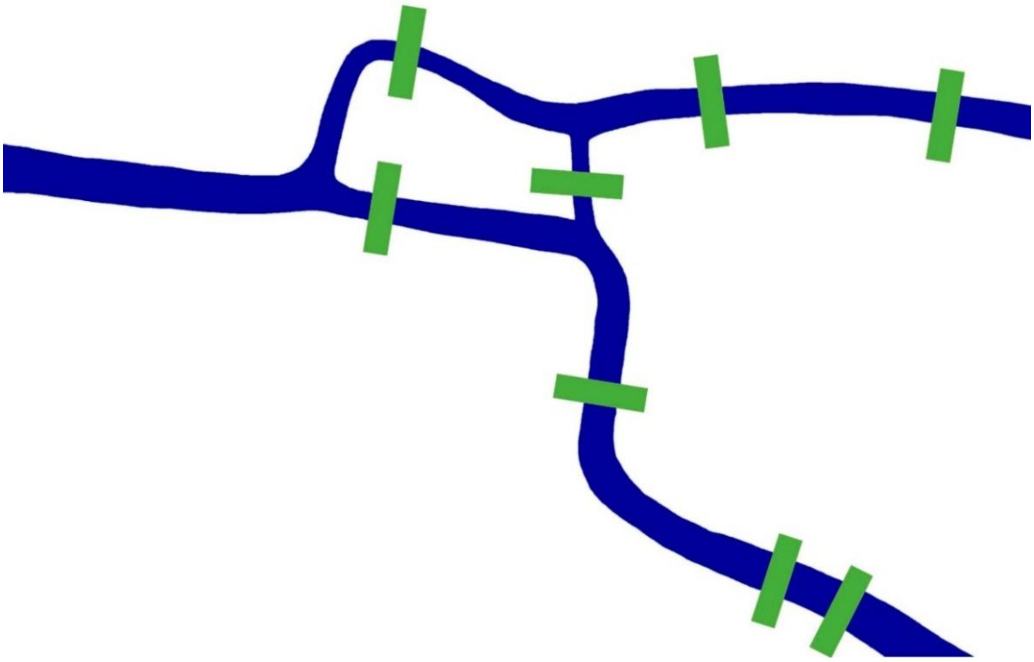
Figura 1
Problema de los puentes de Königsberg 1700.



Posteriormente, mediante el proyector, se les muestra la Figura 2. Se plantean las mismas preguntas: ¿es posible cruzar cada uno de los puentes exactamente una vez?, ¿puedes probarlo?

Figura 2

Problema de puentes actual.



El objetivo de esta actividad es conocer la manera con la que el participante aborda la solución del problema: un dibujo, un diagrama, prueba y error, etc.

En las figuras 3 y 4 se puede apreciar que los estudiantes hicieron un dibujo de la solución del problema y justificaron sus respuestas de manera textual. En la figura 3, el estudiante intentó mostrar una representación formal a través de etiquetas en vértices y aristas. En la figura 4 se puede apreciar que el alumno utilizó prueba y error para determinar la solución.

Figura 3

Evidencia de la solución de los dos problemas planteados.

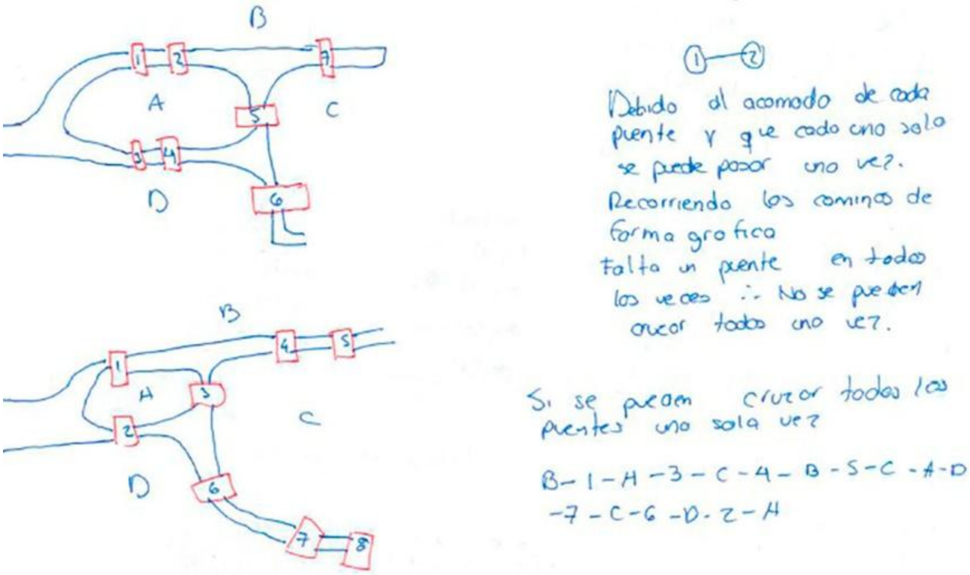
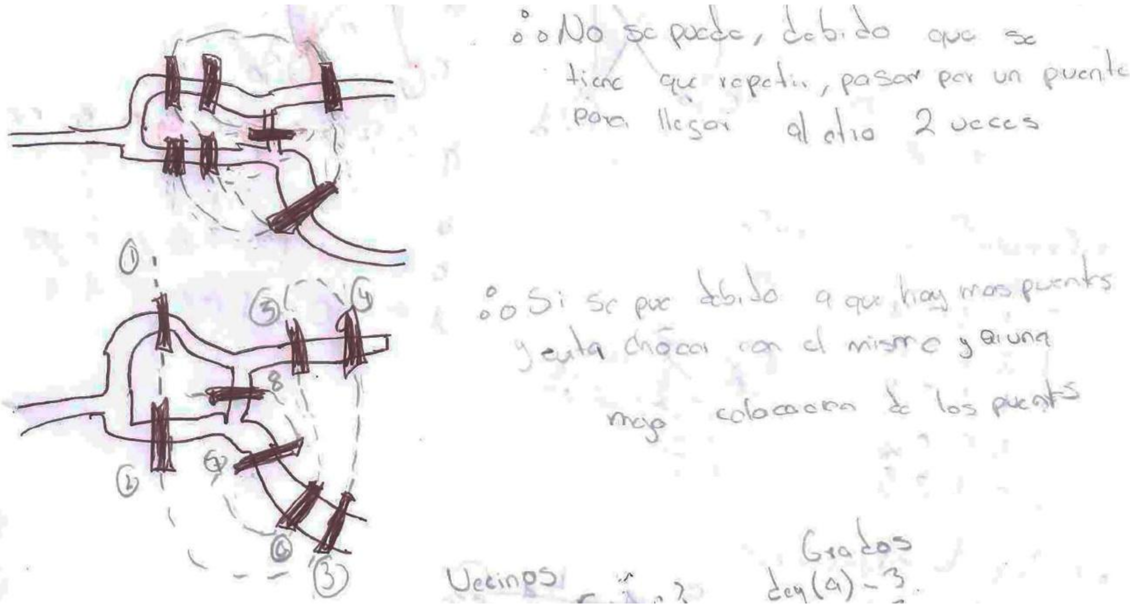


Figura 4
Evidencia de la solución de los dos problemas planteados.



2.1. Desarrollo del tema

Este segundo momento, desarrollo del tema, a su vez se divide en dos partes: una se realiza en clase y la otra fuera de clase, a continuación, se explica cada parte.

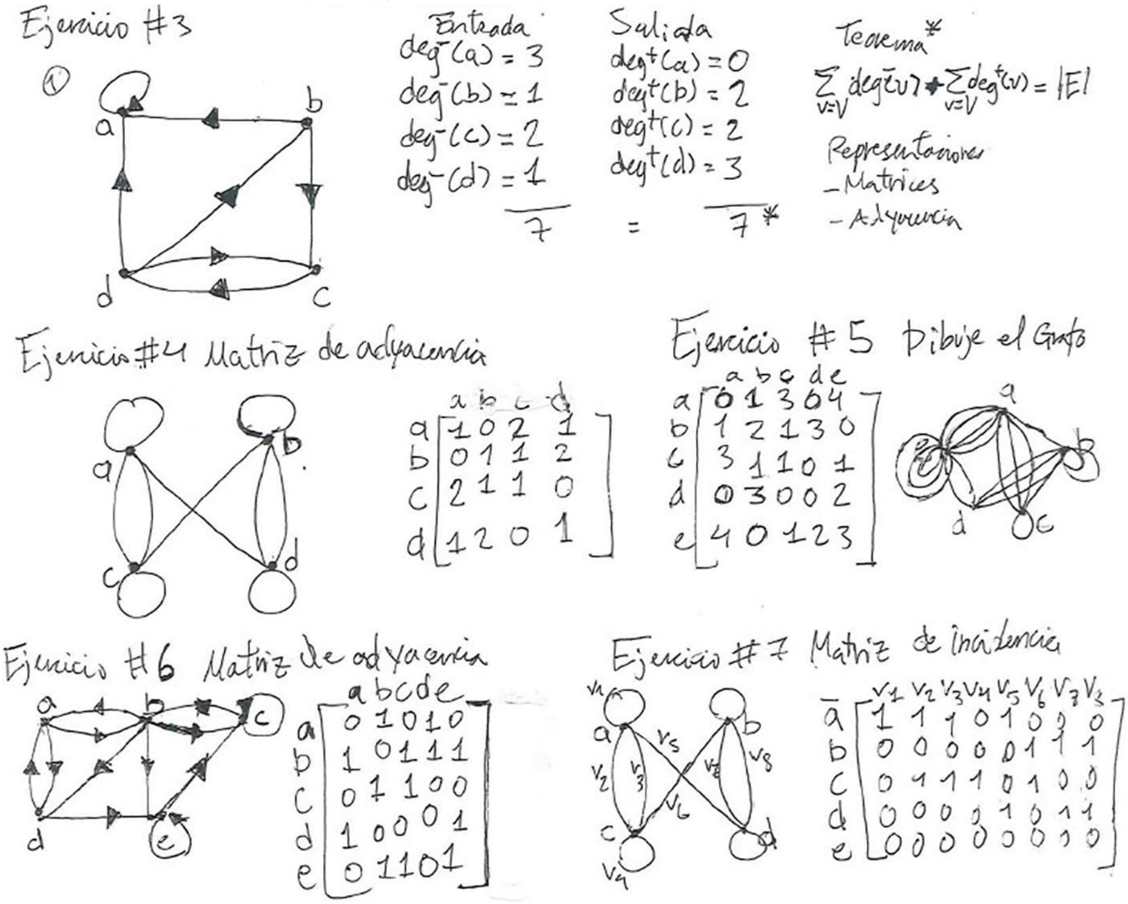
2.1.1. En clase

El profesor presenta a los estudiantes los temas a revisar de la teoría de grafos: conceptos, tipos de grafos, representación de grafos y subgrafos con el apoyo de un proyector. Posteriormente se plantean ejercicios que el estudiante debe resolver con lápiz y papel. En la figura 5 podemos ver estudiantes resolviendo los ejercicios en clase. El propósito de esta parte de la actividad es verificar si el participante comprende los temas que le fueron presentados.

Figura 5
Estudiantes resolviendo los ejercicios.

En la figura 6, al resolver los ejercicios #3: “Determinar los grados de entrada y salida del grafo”, #4: “Escribir la matriz de adyacencia del grafo”, #5: “Dibujar el grafo de la matriz de adyacencia”, #6: “Escribir la matriz de adyacencia del grafo dirigido” y #7: “Escribir la matriz de incidencia del grafo”, se puede apreciar que el estudiante ya utiliza la representación formal de un grafo. En la representación gráfica, coloca etiquetas a los vértices y aristas de los grafos, además de indicar la dirección de las aristas con flechas en el caso de grafos dirigidos. En la representación matricial, establece los nombres de los renglones y las columnas, además de colocar los corchetes adecuadamente.

Figura 6
Evidencia de la solución de los ejercicios.



2.1.2. Fuera de clase

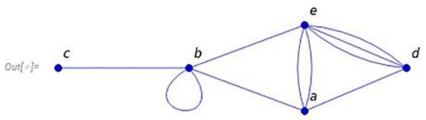
En la segunda parte de este momento, se trabajan tres cuadernos desarrollados en Wolfram Mathematica en la nube, ellos describen conceptos y tipos de grafos, representación de grafos y subgrafos. En cada cuaderno se plantean ejercicios que el estudiante debe resolver con la ayuda de Wolfram Mathematica y guardarlos en un nuevo cuaderno. Al estudiante se le solicita que comparta tres cuadernos con las soluciones solicitadas. El propósito de esta parte es que el participante compruebe la solución de los ejercicios con el uso de la herramienta.

Al resolver el ejercicio “Genera el grafo de la figura y determina su tipo” (ver Figura 7), el alumno generó un grafo utilizando la sintaxis de Wolfram Mathematica e indicó el tipo de grafo que es, además de justificar su respuesta. La notación para definir los vértices del grafo respeta las convenciones matemáticas tradicionales, sin embargo, la notación para definir las aristas no cumple con la convención. Si bien, utiliza las llaves para denotar el conjunto de aristas, no respeta el uso de paréntesis sustituyéndolos por corchetes. Esto podría causar dificultades a estudiantes que no estén familiarizados con la sintaxis de los lenguajes de programación; sin embargo, no fue un problema para los estudiantes de ingeniería en computación que cursan asignaturas de programación desde el primer semestre de la carrera.

Figura 7

Evidencia de la solución de los ejercicios de conceptos y tipos de grafos con Wolfram Mathematica.

```
In[•]:= Graph[{1, 2, 3, 4, 5}, {UndirectedEdge[1, 2], UndirectedEdge[1, 3], UndirectedEdge[1, 4], UndirectedEdge[3, 4], UndirectedEdge[3, 4] ,
   UndirectedEdge[3, 5], UndirectedEdge[4, 5], UndirectedEdge[4, 5], UndirectedEdge[4, 5], UndirectedEdge[1, 1]}, {
   VertexLabels → {3 → "a", 5 → "d", 4 → "e", 2 → "c", 1 → "b"}}, VertexLabelStyle → Directive[FontSize → 12, Black, Italic],
  EdgeStyle → Blue, VertexStyle → Blue]
```



Es un Pseudo grafo

Como se observa incluye al menos una arista que conecta a el mismo vértice b. A esta arista se le conoce como bucle.

En la Figura 8 observamos como, al resolver el ejercicio “Genera la matriz de adyacencia del grafo de la figura y comprueba el resultado con el comando AdjacencyGraph, el alumno generó una matriz de adyacencia y su representación gráfica. Aunque la notación para definir la matriz no cumple las convenciones matemáticas tradicionales de los corchetes, la notación para presentarla en pantalla sí lo hace. Además, la representación gráfica cumple con la forma de dibujar vértices y aristas.

Figura 8

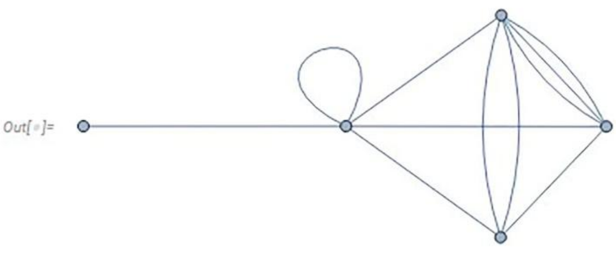
Evidencia de la solución de los ejercicios de representación de grafos con Wolfram Mathematica.

```
In[•]:= matrizA = { {0, 1, 0, 1, 2}, {1, 1, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 3}, {2, 1, 0, 3, 0}}
        MatrixForm[matrizA]
        AdjacencyGraph[matrizA]

Out[•]= {{0, 1, 0, 1, 2}, {1, 1, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 3}, {2, 1, 0, 3, 0}}
```

Out[•]//MatrixForm=

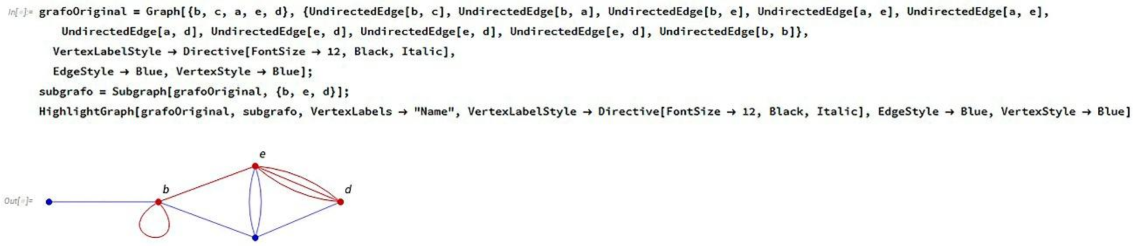
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



En la figura 9, al resolver el ejercicio “Genera el subgrafo que se forman con los vértices b, d y e del grafo de la figura” (misma que se muestra en la propia figura 9), el alumno definió un grafo con cinco vértices y generó un subgrafo con un subconjunto de tres vértices. Se tiene la misma situación que en el cuaderno de conceptos y tipos de grafos, ya que la notación para definir las aristas no cumple con las convenciones matemáticas tradicionales. Sin embargo, la manera de dibujar el grafo y la opción de resaltar los vértices que componen el subgrafo ayuda a una mejor comprensión del concepto de subgrafo.

Figura 9

Evidencia de la solución de los ejercicios de subgrafos con Wolfram Mathematica.



2.1.3. Cierre

En el tercer momento el profesor muestra a los alumnos, con ayuda del proyector, lo que se observa en la Figura 10. En este caso solicita que modelen la red de trenes planeada para el 2050 en México y que hagan una representación de ello. El propósito de esta parte es que dibujen el grafo con nodos y vértices, además de construir la matriz de adyacencia, y también comprobar si los estudiantes pueden aplicar los conceptos comprendidos en el modelado de un problema real. Esto sin decir explícitamente que tienen que hacerlo aplicando teoría de grafos.

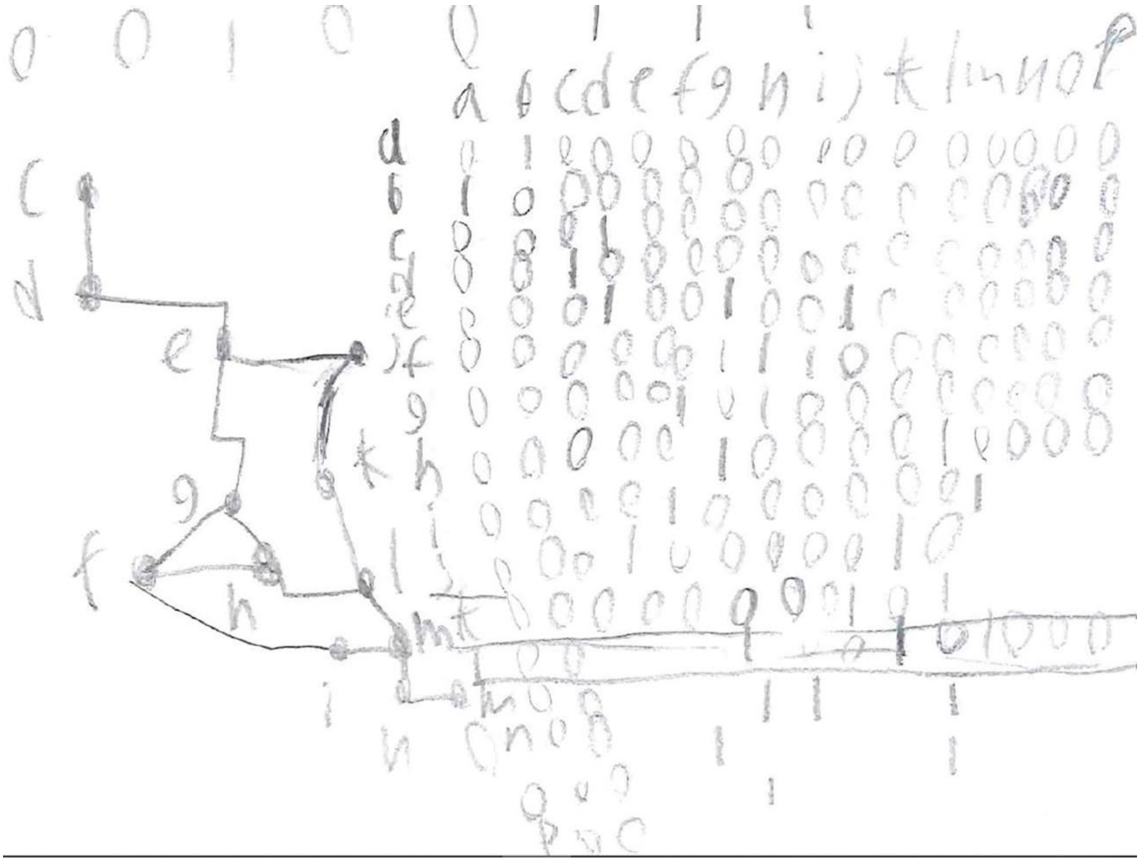
Figura 10

Red de trenes planeada para el año 2050 en México.

En la Figura 11 observamos como el alumno dibujó el grafo con etiquetas en los vértices y aristas no dirigidas, lo que es correcto porque las vías del tren generalmente van en dos direcciones. También construyó la matriz de adyacencia del grafo, aunque omitió el uso de notación de corchetes para su representación.

Figura 11

Evidencia con la solución del ejercicio de modelado



3. CONCLUSIONES

En la parte de presentación del tema, los estudiantes se mostraron participativos y funcionó de acuerdo con lo planeado. La mayoría utilizaron representaciones gráficas como las presentadas en las figuras 3 y 4, y describieron la solución a la que llegaron mediante prueba y error. Las dificultades que presentaron los estudiantes fueron que la mayoría no saben expresar sus ideas en papel, ya sea con notación de conjuntos, con relaciones o con matrices; tampoco saben modelar un problema. Esto no se puede superar en una sesión de una hora. Requiere un trabajo continuo por parte del estudiante. Una posible razón de esto es que los estudiantes no llevan asignaturas previas de modelado, ni metodología de sistemas por lo que es difícil para ellos hacerlo. Consideramos que en esta primera parte de lápiz y papel los estudiantes lograron realizar la mayoría de las cosas que se habían planteado en el diseño de la actividad, por lo que, aunque hubo algunas deficiencias pensamos que esta parte cumplió el objetivo de identificar cómo los estudiantes expresan la solución de un problema.

En el momento de desarrollo del tema, en la etapa presencial, los estudiantes se mostraron activos en el desarrollo de las soluciones y funcionó de acuerdo con lo planeado. Las dificultades que se presentaron fueron en el uso de notaciones formales para representar conjuntos y en los conocimientos previos con respecto a matrices que es un tema que se estudia en álgebra lineal en el primer semestre de la carrera. Estas dificultades se superaron repasando con ellos la notación de conjuntos y listando las propiedades de las matrices. La dificultad señalada es común, suele ser el resultado de la falta de práctica de lo aprendido en los primeros semestres en asignaturas posteriores. Consideramos que el objetivo de establecer las conexiones entre la representación gráfica y la matriz de adyacencia de un grafo, se cumplió en su mayoría.

En el momento de desarrollo del tema, en la parte del trabajo fuera de clase con el uso de Wolfram Mathematica, sólo 15 estudiantes realizaron la actividad debido a la premura en la entrega. Las dificultades que se presentaron fueron técnicas, en relación con el uso de la licencia del CAS y con el uso del lenguaje Wolfram Mathematica. Estas dificultades se superaron respondiendo las dudas por correo electrónico respecto a cómo obtener la licencia y con la documentación del lenguaje utilizado. Las evidencias que enviaron los estudiantes nos dejan ver que lograron cumplir el objetivo de aplicar los comandos apropiados en Wolfram Mathematica para generar grafos, sus matrices de adyacencia y trabajar con algunos de sus elementos.

En el momento de cierre, los participantes se mostraron nerviosos por el límite de tiempo de la actividad, pese a lo cual funcionó de acuerdo con lo planeado. Consideramos que la evidencia analizada permite ver que, aunque con algunas deficiencias, el objetivo de modelar situaciones reales utilizando grafos, casi se cumplió porque la mayoría de ellos dibujaron el grafo y su matriz de adyacencia como se espera. Otros no terminaron la matriz por falta de tiempo para el desarrollo del ejercicio.

Tomando en cuenta la experiencia docente, se pueden sugerir las siguientes estrategias: i) solicitar a los participantes que revisen sus conocimientos previos antes de la secuencia didáctica, ii) proporcionar a los alumnos la documentación del lenguaje de Wolfram Mathematica con antelación para su estudio fuera de clase, iii) incorporar el desarrollo de un problema integral de teoría de grafos, como una actividad preparatoria para el problema del modelado en el cierre, y iv) incrementar el tiempo destinado al desarrollo de la actividad en el cierre para que los estudiantes no se sientan presionados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Linares, S. y Sánchez, M. (2017). Digital Technology in Mathematics Education: Research over the Last Decade. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 222-233). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_14

Jankvist, U. T., Misfeldt, M. y Aguilar, M. S. (2019). What happens when CAS procedures are objectified? —the case of “solve” and “desolve.” *Educational Studies in Mathematics*, *101*(1), 67–81. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5

Lamagna, E. A. (2019). *Computer Algebra*. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781315107011

Medina, J. F., Arteaga, E. y del Sol, J. L. (2017). La enseñanza de las matemáticas, en la carrera de Ingeniería Informática, utilizando el software libre. *Universidad y Sociedad*, *9*(5), 219-225.

Morales, C. y Panamá, G. (2019). Experiencia de la enseñanza y aprendizaje del álgebra y geometría con ayuda de GeoGebra. En *Memorias de la I Jornada Ecuatoriana de GeoGebra* (pp. 129–139). Universidad Nacional de Educación.

Musyrifah, E., Rabbani, H., Sobiruddin, D. y Khairunnisa. (2021). Development of wolfram mathematica application-assistedlearning module on derivative in high school. *Journal of Physics: Conference Series*, *1836*, 012076. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012076

Ramírez, B. A. (2020). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *21*(1), 1-18. https://doi.org/10.18845/rdmei.v21i1.5341

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/bf00302715

Thurm, D. y Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: A multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, *109*, 41-63. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10072-x

Vergara, G., Avilez, A. y Romero, J. (2016). Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal. *Revista Matua*, *3*(1), 83-91.

Vílchez, E. (2015). Paquete VilGebra: recurso didáctico a través del uso del software Mathematica en el campo del álgebra linea. *Revista digital—Matemática, Educación e Internet*, *15*(1), 1-71.

Vílchez-Quesada, E. (2019). Estudio de caso: Estrategia de enseñanza y aprendizaje asistida por computadora para un curso de matemática discreta a través del uso del paquete VilCretas en el software Wolfram Mathematica. *Revista Electrónica Educare*, *23*(2), 1-25.

Williner, B. (2016). Análisis de una actividad didáctica en la que se usa la computadora como herramienta cognitiva. En A. De Giusti, I. Sattolo, J. Ierache y P. Pesado (Eds.), *XI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET 2016). Libro de actas* (pp. 301-310). Universidad Nacional de La Plata.

Epsilon – *Revista de Educación Matemática* *2025, nº 119, 83-90*
Sección: Experiencias de aula

Uso de la inteligencia artificial en la labor docente

Manuel Bullejos González
IES Generalife de Granada, *mbulgon594@g.educaand.es*

Resumen: *La inteligencia artificial (IA) está revolucionando el mundo tal y como lo conocemos hasta ahora. Si bien hace unos años escuchábamos hablar de ella como algo lejano, la realidad es que ya tenemos acceso a una infinidad de herramientas que proporcionan soluciones al momento mejorando nuestra productividad y optimizando procesos. Todos los sectores están experimentando un auge en este sentido. La IA en la Educación tampoco se queda atrás. El pensamiento computacional está favoreciendo al alumnado ya que se mejora la experiencia de usuario. Por su parte, para los docentes, es una oportunidad para innovar y adoptar aplicaciones que colaboren en la creación de aprendizajes inmersivos, eficientes y personalizados.*

Palabras clave: *ChatGPT, inteligencia artificial generativa, proceso de enseñanza y aprendizaje, tecnología educativa.*

Use of Artificial Intelligence in Education

Abstract: *Artificial intelligence (AI) is revolutionizing the world as we know it. While a few years ago we heard about it as something distant, the reality is that we now have access to a multitude of tools that provide immediate solutions, improving our productivity and optimizing processes. All sectors are experiencing a boom in this regard. AI in Education is no exception. Computational thinking is benefiting students by enhancing the user experience. For teachers, it is an opportunity to innovate and adopt applications that contribute to creating immersive, efficient, and personalized learning experiences.*

Key words: *ChatGPT, educational technology, generative artificial intelligence, teaching and learning process.*

1. JUSTIFICACIÓN

La llegada de la IA ha redefinido las funciones docentes y el proceso de aprendizaje. En el ámbito educativo, la IA ofrece oportunidades diversas, desde gestión escolar eficiente hasta la personalización del aprendizaje. Sin embargo, se deben abordar riesgos como sesgos algorítmicos y desigualdades en el acceso tecnológico. Aprender sobre la IA se convierte en un componente esencial para el profesorado, incluyendo su comprensión y aplicación ética, para aprovechar las ventajas de la IA en la educación y mitigar sus desafíos.

En la función docente, al igual que sucede en muchos ámbitos, la administración del tiempo es esencial para garantizar una educación efectiva. En este sentido, la IA puede ser una valiosa aliada que ayude a optimizar varias de las actividades diarias de los educadores. Entonces, ¿por qué no aprovechar la IA para facilitar la automatización de tareas administrativas, el análisis de grandes volúmenes de datos y la elaboración de informes a los docentes? ¿Por qué no utilizar la IA para la creación de recursos personalizados y accesibles? Por poner solo unos ejemplos, el profesorado puede utilizar la IA para la automatización de tareas administrativas (facilita el seguimiento de asistencia, gestión de calificaciones...), para la planificación de programaciones

Cómo citar: Bullejos, M. (2025). Uso de la inteligencia artificial en la labor docente. *Epsilon*, *119*, 83-90.

(ayuda a planificar programaciones más efectivas y alineadas con las necesidades del alumnado), para explorar métodos de enseñanza innovadores (utiliza la gamificación o el aprendizaje basado en proyectos, para mantener al alumnado comprometido y motivado) o para adaptarse a necesidades individuales (crea y adapta los recursos y materiales educativos según las necesidades de cada estudiante, promoviendo la inclusión y el aprendizaje personalizado).

Sambola (2023) presenta el estado de la IA en la Educación, utilizando un método de revisión exhaustiva de la literatura. Es inevitable que nos surjan varias preguntas ante los desafíos que supone la irrupción de herramientas como *Chat GPT* en la docencia: ¿Qué oportunidades brinda para mejorar la calidad de la docencia? ¿Estamos ante un punto de inflexión en la educación tal y como la conocemos? (Jiménez et al., 2023).

Respecto al alumnado, ya empieza a conocer el funcionamiento y el impacto en su vida diaria de la IA. Es esencial resaltar que el aprendizaje de la IA en los centros educativos no solo implica tecnología, sino también empoderar al alumnado con habilidades esenciales para enfrentar un futuro laboral en constante cambio.

En el contexto escolar actual, resulta evidente que aún no se ha logrado aprovechar plenamente las alternativas que la IA pone a disposición del profesorado y del sistema. Al aprovecharlas, tanto el profesorado como el sistema educativo en su conjunto pueden experimentar mejoras significativas en la calidad de la enseñanza y el aprendizaje, así como en la eficiencia de la administración y la toma de decisiones.

Interesados en llevar a nuestras aulas el uso de la Inteligencia Artificial, así como de analizar sus posibilidades y riesgos en la docencia, un grupo de docentes de secundaria solicitó al CEP de Granada realizar un Grupo de Trabajo siguiendo las *INSTRUCCIONES DE 11 DE SEPTIEMBRE 2023 DE LA DIRECCIÓN GENERAL DE TECNOLOGÍAS AVANZADAS Y TRANSFORMACIÓN EDUCATIVA PARA EL DESARROLLO DE GRUPOS DE TRABAJO*. El trabajo realizado a lo largo de esta formación ha proporcionado un mayor conocimiento de la temática para el profesorado y facilitado el enriquecimiento de tareas para el alumnado y el diseño de propuestas para el aula centradas en el uso de la IA. Describimos a continuación la propuesta de trabajo.

2. OBJETIVOS Y ACTUACIONES

Para articular esta autoformación se establecieron tres objetivos formativos y se definieron unas actuaciones para cada uno de los mismos que permitiesen al profesorado participante desarrollar una propuesta para el aula.

2.1. Objetivo 1

Conocer el concepto de Inteligencia Artificial, su historia y aplicación en diversos ámbitos, focalizando en su utilidad en la educación para crear situaciones de aprendizaje personalizadas en función de las características del alumnado, logrando que resulten motivadoras y despierten su curiosidad.

La actuación número 1 de este objetivo es el estudio del concepto de inteligencia artificial, su historia y aplicación en diversos ámbitos a través de la búsqueda de material de consulta (artículos, vídeos, infografías, etc.) y la creación de un foro donde intercambiar ideas, la cual se cumple a través de los siguientes indicadores:

- Se crea una clase en classroom llamada "Inteligencia Artificial" donde se pueden almacenar y consultar los artículos encontrados sobre esta temática.
- Se almacenan y consultan artículos, vídeos e infografías encontrados sobre el tema: en las siguientes entradas al foro se adjuntan vídeos sobre el concepto de la IA, así como artículos e infografías sobre su fundamento matemático y el big data. Se recopila en un documento un resumen de la evolución de la inteligencia artificial en las últimas décadas y un enlace al primer chatbot (Eliza). Además, se realiza una selección de vídeos y artículos sobre el uso de la IA en ámbitos como el de la alimentación, la agricultura, la sanidad, la cultura social, las ciudades inteligentes y por supuesto la educación. Por último, se comparte un documento resumen sobre el concepto de IA generativa, ventajas, desventajas y su evolución en las últimas dos décadas junto a artículos y vídeos relacionados.

La actuación número 2 de este objetivo consiste en la revisión del uso de la inteligencia artificial en la educación a través de la búsqueda de material audiovisual y programas informáticos. La llegada de la IA ha redefinido las funciones docentes y el proceso de aprendizaje. En el ámbito educativo, la IA ofrece oportunidades diversas, desde gestión escolar eficiente hasta la personalización del aprendizaje. Sin embargo, se deben abordar riesgos como sesgos algorítmicos y desigualdades en el acceso tecnológico. Aprender sobre la IA se convierte en un componente esencial para el profesorado, incluyendo su comprensión y aplicación ética, para aprovechar las ventajas de la IA en la educación y mitigar sus desafíos. Se adjuntan artículos, una encuesta, una guía ética e infografías sobre la IA en educación. Por último, se comparte un documento que explica el concepto de prompt y recopila los programas que podemos usar en educación en cinco bloques: texto, audio, imagen, vídeo y código fuente. Hay también una infografía con un ejemplo de aplicación en el aula de cada uno de ellos.

La actuación número 3 consiste en la realización de un debate: intercambio de opiniones sobre el material encontrado. Debatimos sobre el material encontrado, su utilidad y aplicación en nuestra labor docente. Cada integrante del grupo participa en el foro comentando algún programa, vídeo o aplicación (*Chat GPT*, *Bard* de Google, *DALL- E* para crear gráficos, *Copilot* de Windows, creación de un chatbot, vídeos con animación e incluso uno de felicitación navideña generado con IA). Para ello, se utilizan documentos recopilatorios con las ventajas y desventajas encontradas en los programas y aplicaciones probadas.

2.2. Objetivo 2

Estudiar y profundizar en el uso de la IA para optimizar las tareas de la labor docente referentes a la evaluación y seguimiento del rendimiento académico del alumnado (elaboración de rúbricas, material individualizado, atención a alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo…).

La primera actuación de este objetivo es el análisis de las tareas de nuestra labor docente susceptibles de optimizarse usando IA y la realización de pruebas usando programas de IA para elaborar rúbricas u otros instrumentos de evaluación. Para ello se analizan las tareas (generación de ejercicios, rúbricas de evaluación, programas de refuerzo a alumnado con necesidades específicas…) y se recoge en un documento compartido con el grupo para que todos los integrantes conozcan los programas más útiles. En dicho documento se pueden ver las pruebas con diferentes programas de IA y sus excelentes resultados (*Chat GPT, Bard, Chat sonic*, *Chat pdf, D-iD, Piggy, Conker*). Se usan básicamente para generar ejercicios, problemas, cuestionarios y rúbricas de evaluación. Nos llama especialmente la atención el programa *Piggy*, que genera una historia con imágenes a partir de cualquier concepto que le indiques.

La segunda actuación de este objetivo es la preparación de material para nuestras clases usando IA a través de la elaboración de relaciones de ejercicios y tareas, análisis de los programas utilizados y uso de la IA en la generación de material individualizado. Para ello, se preparan relaciones de ejercicios y tareas para nuestras clases mediante IA (trigonometría, ecuaciones y sistemas, binomio de Newton, geometría, creación de una mascota de la II Feria de Orientación Académica y Profesional, actividades de rol play e incluso un documento donde se reflejan las pautas a seguir en el desarrollo y resolución de un problema matemático). A continuación, se comentan los programas utilizados: si su funcionamiento es correcto o no, el coste económico (observando si hay periodo de prueba gratuito), y si se adaptan a las características de nuestro alumnado. Además, se hace uso de la IA para generar material individualizado que optimice la atención a alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo. Se comparte en el classroom un documento comparativo de los programas *Gemini* (anterior *Bard* de Google), *Chat Sonic* y *Chat Gpt* analizando sus pruebas y errores encontrados al generar problemas de ecuaciones para alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo de 1ºESO.

2.3. Objetivo 3

Aprender nuevas tecnologías móviles útiles para el diseño y descripción de tareas que permitan implementar la IA en nuestra labor docente en el aula como un nuevo recurso educativo que promueve la investigación, el desarrollo, la innovación y el aprendizaje colaborativo

La primera actuación de este objetivo es el desarrollo de una sesión usando inteligencia artificial en el aula (estudio de una aplicación o programa informático que pueda ser usado por el alumnado y utilización de esta tecnología en una sesión lectiva en el aula). Para ello, se estudia una aplicación móvil o programa de ordenador para presentarla al alumnado en una tarea de nuestra materia, comprobando que puede usarse en el aula de ordenadores si es el caso, detectando y solventando errores y fallos para evitar que ocurran en clase. Este punto es especialmente importante sobre todo al usar programas que requieren la autenticación del alumnado mediante un correo electrónico y contraseña.

Finalmente se lleva a cabo la sesión de trabajo en el aula utilizando la IA y se toman evidencias de su uso mediante fotos o vídeos. En resumen, hemos usado inteligencia artificial para crear imágenes con *leonardo.ai* y *copilot* (bing de google) y para vídeos la web *haiper* y la aplicación *invideo*. Llama la atención que estas dos últimas herramientas no estaban disponibles cuando se inició el grupo de trabajo, sino que han aparecido a posteriori. También hemos usado *Chat GPT* para generar ejercicios de geometría y trigonometría que han sido realizados por nuestro alumnado en el aula.

La última actuación llevada a cabo es la evaluación de su impacto en el proceso de enseñanza aprendizaje: valoración de la aceptación por parte del alumnado del uso de la IA y difusión en redes sociales de la experiencia. Se valora de forma muy positiva la aceptación por parte del alumnado de la nueva metodología (como puede comprobarse en los “me gusta” y comentarios del instagram del instituto). El coordinador realiza vídeos recopilatorios de las actividades con el programa *DaVinci Resolve* para su difusión en la web y redes sociales del centro. En el classroom de matemáticas del alumnado se comparte igualmente el video recopilatorio para que puedan visionarlo aquellos que no disponen de teléfono móvil o perfil en instagram, de forma que también puedan aportar comentarios de lo que les ha parecido la sesión lectiva.

3. DESARROLLO DEL TRABAJO

Como resultado de la actividad formativa se han generado materiales y recursos que pueden utilizarse de forma transversal en todos los niveles de secundaria y bachillerato de matemáticas y del alumnado del ciclo de formación profesional de apoyo a la dirección.

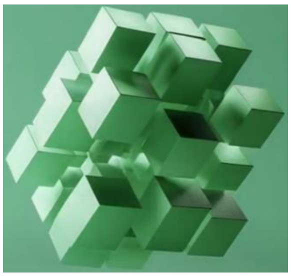
Junto al repositorio con gran cantidad de artículos, vídeos e infografías sobre el uso de la inteligencia artificial y su aplicación en el ámbito de la educación, se han desarrollado documentos de elaboración propia: documento resumen de la evolución de la inteligencia artificial en las últimas décadas, documento resumen sobre el concepto de IA generativa, ventajas, desventajas y su evolución en las últimas dos décadas, guía ética de uso y abuso de la IA, documento que explica el concepto de prompt y recopila los programas que podemos usar en educación en cinco bloques: texto, audio, imagen, vídeo y código fuente y documentos comparativos de diferentes IA usadas a la hora de la generación de ejercicios.

En relación a lo anterior, se han obtenido relaciones de actividades y tareas en diferentes ámbitos: sistemas y ecuaciones (diseñadas para alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo), trigonometría (tanto nivel bachillerato como secundaria en inglés), geometría, binomio de Newton, rol play, creación de un chat bot… Además, se ha utilizado la IA para elaborar documentos que ayuden al alumnado en su trabajo, como una guía donde se reflejan las pautas a seguir en el desarrollo y resolución de un problema matemático que puede extenderse a otro tipo de problemas no necesariamente de esa materia. Otros materiales elaborados ayudarán a cuestiones relativas a nuestra labor docente: situaciones de aprendizaje, rúbricas de evaluación e informes de evaluación.

Además, se ha utilizado la IA para obtener información matemática (por ejemplo, en relación con dos teoremas clásicos del cálculo infinitesimal, el teorema de Rolle y el teorema del Valor Medio) que fue de ayuda en la elaboración de apuntes del tema de aplicaciones de las derivadas, de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Con las webs de generación de imágenes se han creado portadas para temas de apuntes de bachillerato, imágenes (ver Figura 1) que representan varios poliedros regulares en un entorno tridimensional y cuerpos geométricos (estos últimos también en video). En apoyo al plan lector, se ha usado la IA para crear textos cortos y hacer una lectura comprensiva, además de unas preguntas relacionadas con la misma. Por último, se ha optimizado el logotipo del instituto y se ha creado una mascota de la II Feria de Orientación Académica y Profesional llamada “*Orientín”*.

Figura 1

Figuras geométricas generadas con IA



4. PUESTA EN PRÁCTICA Y RESULTADOS

Hay tres aspectos en los que el uso de la IA mejorará los procesos de enseñanza-aprendizaje actuales: gracias a ella se reducirán las tareas repetitivas, se fomentará la educación personalizada y se dará más relevancia al aprendizaje colaborativo.

El proceso de enseñanza no está exento de tareas repetitivas que roban al profesor tiempo y energía. La IA actual es capaz de automatizar muchas de estas tareas administrativas, como realizar evaluaciones de trabajo en casa o calificaciones de exámenes tipo quiz con una velocidad y precisión mayor que la del profesorado.

Al mismo tiempo que evalúa al alumno, esta tecnología también puede identificar lagunas de conocimiento y ofrecerle contenidos para cubrirlas e, incluso, detectar desde el comienzo del curso cuál será la evolución previsible de un estudiante, para actuar en consecuencia. Esto lleva a otra de las aplicaciones de uso en educación de la IA: el aprendizaje personalizado. Un objetivo difícil de llevar a cabo con las técnicas de enseñanza tradicional, pero que se sitúa en el centro del uso de las nuevas tecnologías en el aula. Algunas aplicaciones de la IA se orientan a diseñar unidades didácticas adaptables dinámicamente al estudiante. Ayuda a proporcionarles itinerarios de aprendizaje, contenidos personalizados y el feedback que cada estudiante necesita.

En cuanto al aprendizaje colaborativo, la IA también desarrolla algoritmos que facilitan el trabajo en equipo. Hoy por hoy sabemos que los estudiantes aprenden mejor, mantienen el conocimiento más tiempo y tienen una experiencia más satisfactoria cuando trabajan en equipo.

Por otro lado, las herramientas de IA plantean una serie de preocupaciones éticas debido a su capacidad para crear contenido falso y realista. Las IAs generativas pueden utilizar datos personales y recrear voces, rostros y otros elementos sin el permiso de los individuos. Además, podrían tener un impacto en la propiedad intelectual y los derechos de autor. La generación automatizada de obras artísticas, textos y música podría plantear cuestiones sobre la atribución y el reconocimiento adecuado de los creadores originales. Debemos enfocarnos en el buen uso de esta nueva tecnología.

La implantación de la IA también provocará un cambio en el rol del docente. No solo porque deberá aumentar sus conocimientos sobre tecnología; también porque podrá centrarse más en el alumno. Es lo que algunos denominan ya el 'maestro digital' porque una de sus herramientas de trabajo serán las aplicaciones. En los próximos años, tendremos una amplia variedad que apoyarán mucho a los docentes en la enseñanza. Se vislumbran aplicaciones como rutas de aprendizaje óptimas, geolocalización y servicios académicos, planeación y gestión académica en planteles educativos, entre otras. Este cambio en el rol docente pudo comprobarse en las sesiones lectivas dedicadas a trabajar cuerpos geométricos con alumnado de 1ºESO en el aula de ordenadores. El alumnado toma el control de los programas y aplicaciones, ya que no debemos olvidar que al tener 12 años son nativos digitales y han crecido totalmente familiarizados con las nuevas tecnologías. El docente se limita a guiar en el proceso de aprendizaje, dejando libertad al alumnado y en ocasiones aprendiendo y sorprendiéndose de los resultados obtenidos.

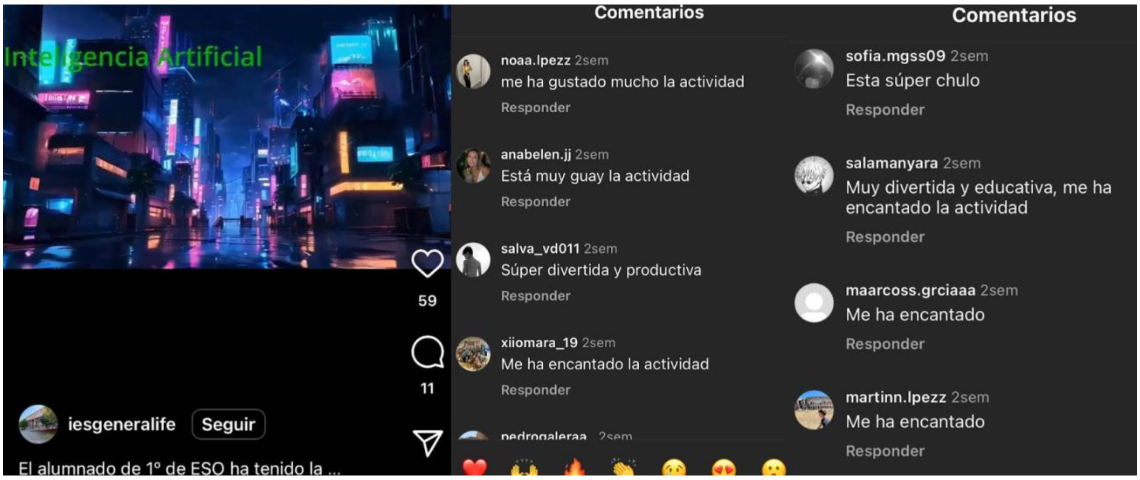
En los siguientes en laces pueden consultarse tanto el video recopilatorio de la sesión lectiva con IA como la difusión en la web y redes del centro:

- https://youtu.be/onpHZlrIHUc
- https://iesgeneralife.es/trabajando-con-la-ia-en-el-aula-de-matematicas/
- https://www.instagram.com/reel/C6JTrMkIjVs/?igsh=ZDR2MjVmcWttNHJi

En la Figura 2 mostramos una vista de esta difusión.

Figura 2

Difusión de video recopilatorio de la actividad en redes



5. DIFICULTADES Y CONCLUSIONES

La IA está en pleno desarrollo y eso ha llevado a que continuamente a lo largo del desarrollo del grupo de trabajo nos hayamos quedado “desfasados”. Por ejemplo, en el momento de escribir este artículo se acaba de lanzar la versión 4 de *Chat GPT* y durante la primavera aparecen las aplicaciones de vídeo *invideo* y *haiper* que eran desconocidas en otoño.

Al estar en continua mejora, en muchas ocasiones no produce resultados satisfactorios. El desarrollo de las IA’s debe ser más profundo para que su uso como complemento en el aula sea fiable. En la actividad de figuras geométricas, las aplicaciones de imagen y vídeo funcionan “bien” con indicaciones sencillas (por ejemplo, triángulo equilátero) pero si pretendes algo de mayor dificultad (por ejemplo, el baricentro o el incentro) se hacían un lío considerable y sacaba resultados que nada tenían que ver con lo solicitado. Ante este problema en la generación de imágenes, llegamos a la conclusión de que es un acierto pedir que la IA genere los prompts.

De igual forma, si profundizamos en conceptos matemáticos complejos, por ejemplo pidiendo que demuestre una determinada propiedad en relación con el producto escalar de vectores, la verdad es que el bucle en que entra *Chat GPT* es de órdago. Necesita mucho margen de mejora. Por cierto *Gemini* tampoco puede probar propiedades tan específicas.

En otros casos, se presentan soluciones en las relaciones de ejercicios con fallos considerables. Por tanto, aún es necesario tiempo para que la información obtenida mediante IA sea 100% correcta.

En varios casos nos hemos encontrado con la dificultad para utilizar algunas aplicaciones debido a que tienen un coste. La solución ha sido utilizar versiones de prueba que en muchos casos sólo permiten realizar un número limitado de imágenes o vídeos con una duración de máximo 2 o 4 segundos, lo cual es bastante escaso.

En el desarrollo de la actividad con el alumnado, es necesario que se autentiquen en las web y aplicaciones con una cuenta de correo y una contraseña. Algunas de las aplicaciones de imágenes no permiten el acceso con una cuenta institucional como es la que maneja el alumnado (@g.educaand.es) y se necesita una cuenta alternativa con dominio @gmail.com. En el caso de *Copilot*, al ser de Windows, la cuenta requerida tiene que ser de dominio @hotmail.com. Por tanto, es difícil que el alumnado tenga a su disposición tantas cuentas de correo distintas, ya que por lo general sólo utiliza la del instituto. Además, algunos no recuerdan su contraseña y el trabajo en el aula de ordenadores se complica desde el primer minuto ya que sin la autenticación y creación de un perfil las aplicaciones no permiten generar nada.

Relacionado con el punto anterior, actualmente nos encontramos con la prohibición de uso de teléfonos móviles en el centro. En muchos casos, cuando el alumnado intenta entrar por primera vez al correo en el ordenador, se le envía un código de verificación al teléfono móvil. En este punto, algunos no tienen el dispositivo en el centro y otros han pedido permiso para poder mirarlo, algo que se ha autorizado de forma totalmente excepcional. Esta situación provocó alguna queja por parte de los padres de aquellos alumnos que no pudieron autenticarse ya que sus hijos no tienen móvil.

Debe ser objeto de debate futuro la compatibilidad del uso puntual de aplicaciones móviles en el aula para poder aprovechar todas las ventajas y nuevas metodologías que ofrece la IA.

Como conclusión, es de resaltar en esta autoformación, por la relevancia y efecto que produce en la transformación educativa de los centros:

-La buena coordinación entre las distintas autoformaciones que se han desarrollado en el IES (especialmente con el programa CIMA) y la Formación en Centros, poniendo en práctica y aplicando todo lo aprendido para realizar los productos de ésta.

-La difusión realizada, tanto dentro como fuera del centro (web, redes sociales, publicación de videos de productos...) así como la capacidad de motivar e implicar al resto de profesores del claustro en el mismo, aunque no fueran integrantes del grupo.

-El aumento de motivación que todo ello ha generado en el alumnado, mostrándose totalmente receptivos e ilusionados ante esta nueva forma de presentación de los contenidos e implicándose en el desarrollo de las actividades planteadas de una forma totalmente diferente a la tradicional, ya que por lo general requieren moverse de su pupitre e interactuar con el ordenador y las nuevas tecnologías.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Instrucciones de 11 de septiembre de 2023 de la dirección general de tecnologías avanzadas y transformación educativa para el desarrollo de grupos de trabajo. https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/delegate/content/118108b0-e5f9-4a7b-aab6-4c25236276ed/Instrucciones%20Formaci%C3%B3n%20Centros

Jiménez, L., López-Gómez, J. A., Martín Baos, J. A., Romero, F. y Serrano-Guerrero, J. (2023). ChatGPT: reflexiones sobre la irrupción de la inteligencia artificial generativa en la docencia universitaria. *Actas de las Jenui, vol. 8. 2023* (pp. 113-12).

Sambola, D. -M. (2023). Inteligencia Artificial en la Educación: Estado del Arte. *Revista del Caribe Nicaragüense, 79,* 13-26.

Epsilon – *Revista de Educación Matemática* 2025, nº 119, 91-109
Sección: Actividades de la SAEM Thales

Las matemáticas escondidas en el juego del SET

Bruno Castro Conde
Alumno de ESTALMAT, *brucascon@gmail.com*

Resumen: *Las matemáticas están presentes en nuestra vida cotidiana. El SET es un juego de cartas, aparentemente sencillo, en el que podemos encontrar muchas matemáticas; desde combinatoria o congruencias, hasta una interpretación geométrica del juego que he realizado con GeoGebra. Os invito a que las descubráis.*

Palabras clave: *probabilidad, combinatoria, juego, GeoGebra, congruencias, SET.*

The hidden mathematics in the SET game

Abstract: *Mathematics is undoubtedly present in our daily lives. SET is a card game, apparently simple, in which we can find a lot of mathematics. From combinatorics or congruences, to a geometrical interpretation of the game that I have made with GeoGebra. I invite you to discover them.*

Key words: *probability, combinatorics, game, GeoGebra, congruence, SET.*

1. INTRODUCCIÓN

El SET es un juego de cartas creado en 1974. Este juego de percepción visual consiste en formar patrones. Se puede jugar de forma individual o en grupo. El objetivo del juego es encontrar patrones llamados “sets”, que definiremos más adelante. Mi interés por este juego proviene de distintos ámbitos: En primer lugar, en mi familia siempre se ha dado una situación que propiciaba el interés por juegos de mesa y de percepción visual. En segundo lugar, este juego en específico es uno muy conocido por aficionados a las matemáticas. Digo esto porque suele ser un juego recurrente en las sesiones de ESTALMAT, un proyecto dedicado a la detección y estimulación del talento matemático. Este hecho ha producido un aumento significativo en mi interés por las matemáticas, y al tener la oportunidad de elegir un tema de trabajo propio no me lo pensé dos veces.

2. OBJETIVOS

El objetivo de la exploración será el de ir trabajando distintas preguntas en cada una de las distintas variaciones del juego que se explicarán más tarde para después generalizar nuestra investigación. Entre las preguntas a las que iré contestando se encuentran:

- ¿Cuántas cartas tiene cada baraja según las características atribuidas?
- ¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?
- ¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?
- ¿Cuál es el mínimo número de cartas necesarias para que, siempre que se tome esa cantidad de cartas cualesquiera, haya mínimo una manera de que todas se puedan agrupar en sets sin que sobre ninguna?

Cómo citar: Castro Conde, B. (2025). Las matemáticas escondidas en el juego del SET. *Epsilon, 119, 91-109.*

- ¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?
- ¿Existe solo un set posible para cada carta o pareja de cartas …?
- ¿Existe una visión geométrica del juego?

¿Cómo funciona una partida de set?

En el juego convencional los jugadores se colocan alrededor del espacio de juego, a la misma distancia del centro para mantener una igualdad de condiciones, ya que el juego precisa tocar las cartas a menudo. En la preparación, un árbitro o uno de los jugadores colocará las cartas en el tablero, que es el lugar donde se posicionan las cartas, ya sea en una mesa u otro tipo de superficie. Se colocan 12 cartas, y cuando uno de los jugadores ve un set en el tablero debe decir en voz alta la palabra "SET", para después tocar las tres cartas que lo componen. Si el resto de jugadores lo consideren válido el set irá al mazo de cartas ganadas del jugador y se colocarán tres cartas nuevas en el tablero. Si el set no es válido, el jugador deberá "pagar" tres cartas de su mazo y las cartas que había tocado regresarán a su lugar original. Si no se encuentra ningún set se colocan otras tres cartas junto con las que queden en la mesa y así sucesivamente hasta que haya un máximo de 21 cartas en mesa. El juego termina cuando se acaba la baraja.

Herramientas y programas utilizados

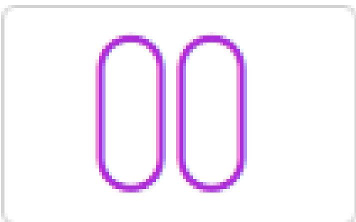
A lo largo de la exploración se utilizará el programa GeoGebra con el fin de expresar geométrica y espacialmente algunas cuestiones. No se utilizará ningún otro recurso digital.

En el juego original cada una de las cartas se definen por 4 características: cantidad, color, relleno y forma. Cada característica en una carta se presenta de 3 formas posibles distintas:

- Color de la carta: rojo, morado, verde.
- Cantidad de figuras en la carta: 1, 2, 3.
- Forma de las figuras: círculo, rombo, gusano.
- Relleno de las figuras: en blanco, liso, rayado.

Las cartas del Set tienen 4 características: color, número, forma y tipo de relleno.
En el caso de la Figura 1 son: color (morado), número (dos), forma (diremos, abusando del lenguaje, que es circular) y relleno (en blanco).

Figura 1
Carta del juego SET.



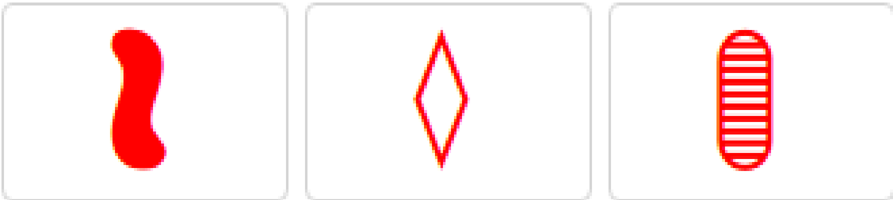
Es importante aclarar que no existen dos cartas iguales, es decir, cada carta es única de manera que, si nos basamos en el juego original, dos cartas distintas no pueden tener las mismas cuatro características.

¿Cuándo se forma un set?

Un set consiste en un subconjunto de tres cartas en el que las características, evaluadas una a una, son iguales en cada carta o diferentes en todas ellas. Por ejemplo, en la Figura 2 vemos un posible SET, ya que, en la variable del color, cada una de las cartas es de color rojo; en la cantidad de número, todas cuentan con solo una; y en las otras dos características, forma y relleno, las tres cartas difieren, por lo que se ha formado un SET.

Figura 2

Conjunto de cartas que forman un set.



Un ejemplo de un conjunto que no constituirá un set está en la siguiente imagen, ya que mientras que comparten la misma forma y distintos números, ya que no cumplen las normas para las características de color o relleno porque no son o todas iguales o todas diferentes.

Figura 3

Conjunto de cartas que no forman un set.

3. DESARROLLO DE LA EXPLORACIÓN

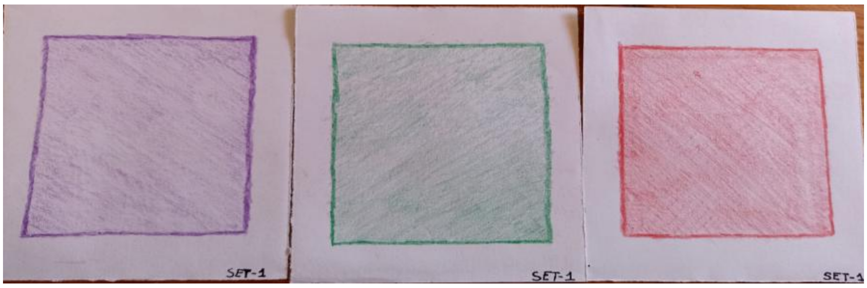
Para estudiar las matemáticas del juego vamos a plantear una serie de casos hipotéticos en los que las cartas se crean en función de otras características. En lugar del juego original, al que se llegará más tarde con sus 4 características, se partirá desde una baraja de cartas con 1, 2 o 3 características respectivamente con el fin de observar de manera más clara la posterior generalización a las preguntas previamente planteadas.

3.1. SET-1

¿Qué es un SET-1?

Llamaremos SET-1 a la baraja hipotética de cartas creada a partir de una sola característica, que puede tomar un valor entre tres distintas posibilidades. En la Figura 4 se observa una baraja de SET-1 donde la característica "color" es la única presente y toma valores verde, rojo o morado.

Figura 4
Baraja de SET-1 de elaboración propia.



¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?
Como hay una sola característica, entonces deducimos que las cartas no se pueden repetir en una baraja y como hay tres colores habrá tres cartas.

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?
De forma obvia cada carta puede formar parte de un único set.

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?
Se puede crear un sólo set, el que cuenta con las tres cartas de la baraja.

¿Cuál es el mínimo número de cartas [...] agrupar en sets sin que sobre ninguna?
En este caso, el mínimo número de cartas es de tres, la baraja al completo, ya que con menos cartas no se puede formar set alguno.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?
Aunque se pueda usar la fórmula de casos favorables / casos posibles, en este caso es trivial, hay un 100% de probabilidad, es decir, es el suceso seguro.

¿Existe sólo un set posible para cada carta o pareja de cartas?
Sí, en este caso para cada carta y pareja de cartas coincide la respuesta, ya que solamente hay uno posible.

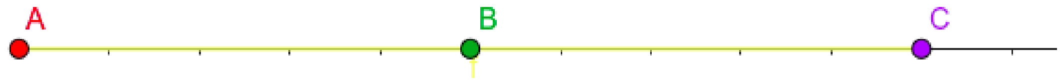
Visión geométrica del juego:
La visión geométrica que podemos encontrar para esta baraja es una expresión de las cartas y sets en una dimensión (porque tiene una característica). Esta dimensión es una recta, y analíticamente realizaremos una función dándole un valor a cada carta para poder graficar el juego.

- Denotaremos al color rojo con un 0
- Denotaremos al color verde con un 1
- Denotaremos al color morado con un 2

Así, podemos expresar cada carta como un punto en una línea: los puntos serán C (0), C (1) y C (2). Si existe una línea que une a tres cartas se forma un set. En este caso la línea o set se ha expresado en amarillo en la imagen.

Figura 5

Recta del juego SET-1 de elaboración propia en GeoGebra.



Para comprobar analíticamente que existe un set se pueden tratar módulos y congruencias, aunque en esta baraja no se hará por trivialidad.

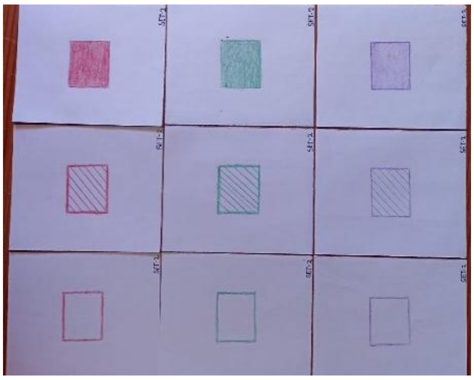
3.2. SET-2

¿Qué es un SET-2?

Definimos SET-2 como el conjunto de cartas creadas a partir de las variaciones de dos características, que pueden tomar entre 3 distintas posibilidades cada una. Como podemos ver en la siguiente imagen, se toman como variables el color, que puede ser rojo, verde o morado; y el relleno, que puede adquirir un valor en blanco, rayado o liso. Se mantienen la forma y el número de las figuras (1 cuadrado).

Figura 6

Baraja del SET-2 de elaboración propia.



¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

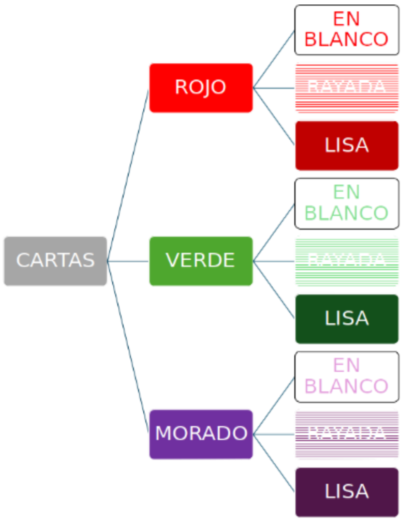
Como ahora existen dos características, las cartas no se pueden repetir en una baraja y cada carta toma 3 posibles valores, mediante combinatoria se puede calcular que hay

$$3 \text{ (colores)} \cdot 3 \text{ (formas)} = 9 \text{ cartas en la baraja}$$

Puede ser interesante verlo con un diagrama de árbol, como muestra la Figura 7. En el diagrama de árbol se observa de manera clara que cada carta puede tomar un valor en la característica "color" entre rojo, verde o morado. Una vez tomado este valor, cada carta se ha subdividido en tres categorías para la característica "relleno": en blanco, rayada o lisa, pero manteniendo el color previamente adquirido. De esta forma se llega también a que en la baraja del SET-2 debe haber nueve cartas.

Figura 7

Diagrama de árbol de las cartas del SET-2.



¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta podrá formar parte de 4 posibles sets. Se toma una carta para su estudio, en este caso tomaremos el cuadrado relleno rojo. Expresemos entonces los 4 sets que existen.

Figura 8

Baraja del SET-2 con todos los sets posibles para una carta.

Los sets que se muestra en la Figura 8, están señalados en naranja, azul, verde y morado. Ninguna carta se encuentra en dos sets distintos, ya que cuando se parte del cuadrado lleno rojo y se elige otra carta (el cuadrado en blanco verde, por ejemplo), la tercera queda determinada, porque las características "color" y "relleno" son diferentes, con lo que la tercera será morada de relleno rayada.

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Si cada set tiene 3 cartas, mediante combinaciones y permutaciones se obtiene que para la primera carta hay 9 posibilidades, para la segunda hay 8 y la tercera queda determinada. Hay que tener en cuenta que el orden no importa y que estamos contando cada set 6 veces, por lo que habrá un total de:

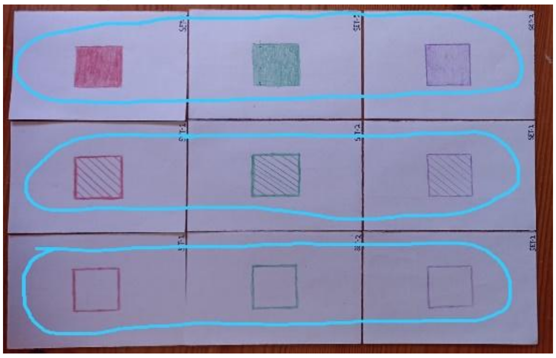
$$\frac{9 \cdot 8}{6} = 12 \text{ sets distintos posibles.}$$

¿Cuál es el mínimo número de cartas [...] agrupar en sets sin que sobre ninguna?

Para que no sobre ninguna el número de cartas debe ser múltiplo de 3, ya que un set se forma con tres cartas, por lo que cualquier otra sobraría. Como las cartas son aleatorias, la única manera de controlar que se puedan hacer sets es coger la baraja al completo (las nueve cartas). En esta baraja, una posible distribución sería la siguiente:

Figura 9

Posible distribución de cartas en función de sets.



¿Cuál es la probabilidad de tomar tres cartas cualesquiera de una baraja y que formen un set?

En este caso la probabilidad de que tomando tres cartas cualesquiera se forme un set, será 1/7, ya que las dos primeras cartas son aleatorias e indiferentes, pero para la tercera carta solamente hay una posible para que se cumpla la condición de formación de un set entre los 7 restantes (no contaremos a las dos ya escogidas). Siguiendo la expresión de casos favorables entre los posibles, la probabilidad será de 1/7 o un porcentaje del 14,285714%.

¿Existe sólo un set posible para cada carta o pareja de cartas?

La diferencia entre el número de sets posibles para cartas o pareja de cartas aumenta, ya que cada pareja de cartas solamente creará un set, mientras que por la pregunta anterior se sabe que hay 4 sets posibles para cada carta.

Visión geométrica del juego:

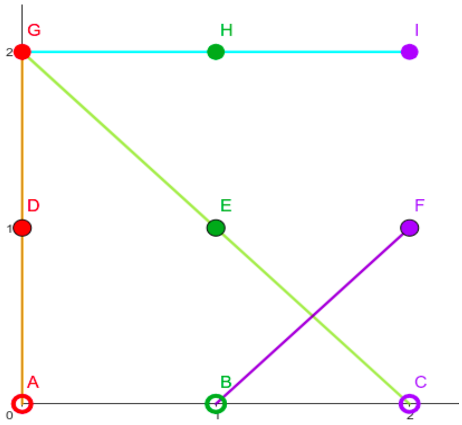
En este caso, la visión geométrica del juego y de los sets cambian, ya que existen dos características (color y relleno), con lo que al realizar el cambio para graficar las cartas cada variable tomará valores entre 0, 1 y 2, transformando el juego a dos dimensiones. Asignamos un valor a cada característica no mencionada antes.

- El relleno en blanco será 0,
- El relleno rayado será 1,
- El relleno liso será 2.

Así, podemos expresar cada carta como un punto en un plano en GeoGebra como muestra la Figura 10.

Figura 10

Gráfico del SET-2 en GeoGebra con los sets de la carta G. (Elaboración propia)



En la Figura 10 también se observan todos los sets de la carta G (roja y rellena) al igual que en la Figura 8. Analíticamente, un set se producirá si y sólo si el conjunto de tres puntos que se toma produce como resultado de su suma una congruencia con 0 en Z_3 para cada variable. Habría que sumar las componentes de los puntos individualmente. Tomemos como ejemplo los puntos G (0,2), B (1,0) y F (2,1). La suma por componentes será:

$$\Sigma x \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [2 + 0 + 1] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$

Por esto, tanto analíticamente como geométricamente, se cumple que para estas tres cartas existe un set. Sin embargo, si se toman las cartas G (0,2), H (1,2) y F (2,1), que se sabe que no forman un set, ya que:

$$\Sigma x \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [2 + 2 + 1] = 5 \equiv 2, para\ Z_3$$

En este caso, no se obtiene 0 en la suma de cada componente, y queda probado que no ocurre un set.

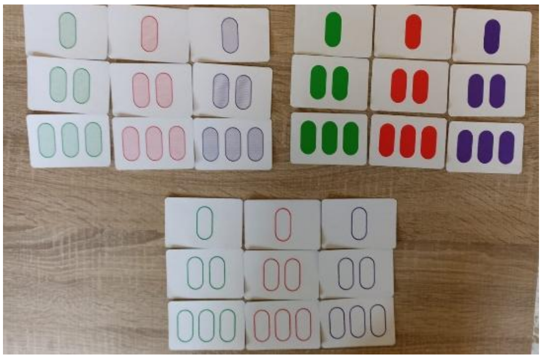
3.3. SET-3

¿Qué es un SET-3?

Se define el SET-3 como la baraja de cartas creada a partir de tres variables distintas. Además del color y el relleno, esta nueva baraja contará con la característica "número", que puede cobrar un valor entre 1, 2 o 3 figuras. Para un SET-3 se mantendrá la característica "forma" asumiendo una forma circular para todas las cartas, como se muestra en la Figura 11.

Figura 11

Baraja de cartas de SET-3.



Se puede ver que, al igual que el SET-2 se podía formar con tres SET-1 distintos expresados en dos dimensiones, un SET-3 se formará a partir de la unión de tres SET-2 diferentes en su número de figuras que se expresan en otra dimensión. Estos SET-2 podrían ser los siguientes:

Figuras 12, 13 y 14

Distintos SET-2 en la baraja de SET-3.

¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

Como ahora existen tres características, las cartas no se pueden repetir en una baraja y cada carta toma tres posibles valores, mediante combinatoria se puede calcular que hay:

3 (colores) · 3 (formas) · 3 (número de figuras) = 27 cartas en la baraja

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta puede intervenir en 13 sets posibles. Tomamos una carta para estudiarla, con lo que existe un total de 26 cartas restantes en la baraja. Una vez se elige una segunda carta para realizar un set, por las características del juego la tercera queda determinada, y cómo sería indiferente tomar esta tercera carta como la segunda, ya que cada pareja de cartas sólo admite otra para formar set, existe entonces una cierta correspondencia en el juego.

Pongamos como ejemplo la carta de un círculo verde rayado. Si se elige una segunda carta (tres círculos rojos rellenos), la tercera queda determinada (dos círculos morados en blanco):

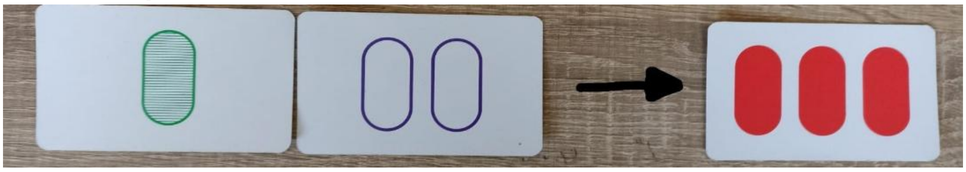
Figura 15

Grupo de 2 cartas que determinan una tercera.

Sin embargo, cuando se elige esta tercera como segunda (dos círculos morados en blanco), la tercera queda determinada de la misma manera que en la situación anterior (tres círculos rojos rellenos), con lo que existe una posible conmutación de las cartas. Además, tres cartas darán un set específico si y sólo si esas cartas son las mismas (es decir, dará igual el orden de estas, pero no habrá otras tres con las que se obtenga el mismo set).

Figura 16

Grupo de 2 cartas que determinan una tercera.



Entonces, para las 26 cartas restantes se obtendrá que existe un set por cada dos cartas de manera única. Por ello existirán

$$\frac{27-1}{2} = 13 \text{ sets distintos posibles para cada carta.}$$

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Cada set tiene tres cartas, con lo que se utilizará la fórmula combinatoria para el caso en el que no importa el orden y las cartas no se repiten. Para contar todos los casos entonces tenemos que

$$\frac{m!}{(m-n)!\ \cdot\ n!}$$

dónde m es el número de cartas en la baraja y n es el número de "huecos" a rellenar, que para todas las barajas será de dos porque un set se forma con tres cartas y la tercera siempre queda determinada por las 2 anteriores, con lo que existirán:

$$\frac{27!}{(27-2)!\cdot 2!} = \frac{27\cdot 26\cdot 25!}{25!\cdot 2\cdot 1} = \frac{27\cdot 26}{2} = 27\cdot 13 = 351 \text{ sets distintos}$$

En este número hemos contado tres veces cada set, ya que para la fórmula no se han tenido en cuenta las permutaciones que pueden existir con las tres cartas, sólo con dos de ellas, por lo que el resultado final de los sets distintos creados con esta baraja será de:

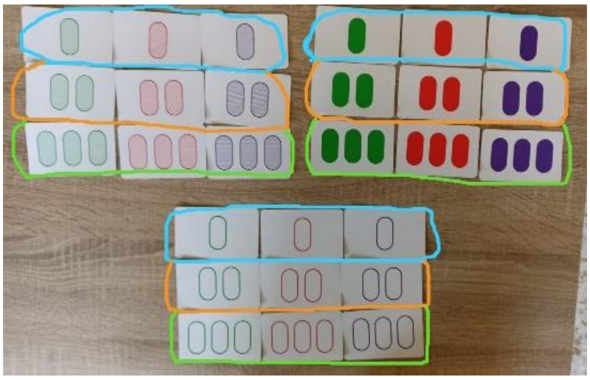
$$\frac{351}{3} = 117 \text{ sets distintos para esta baraja.}$$

¿Cuál es el mínimo número de cartas no nulo [...] en sets sin que sobre ninguna?

Siguiendo el razonamiento expresado en el SET anterior, y sabiendo que este número deberá ser múltiplo de 3, debido a que las cartas son aleatorias y se debe cumplir siempre, sólo existirá un caso en el que estas condiciones se den: con las 27 cartas. En esta baraja, una posible distribución sería la siguiente:

Figura 17

Posible distribución de las cartas del SET-3 en función de los sets.



En este posible caso la distribución se ha realizado sistemáticamente manteniendo en todos los sets el relleno y el número de figuras, pero variando el color en ellos.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?

$$\frac{CASOS\ FAVORABLES}{CASOS\ POSIBLES} = \frac{1}{27-2} = \frac{1}{25} = 4\%$$

Al igual que en la baraja anterior, se sabe que las dos primeras cartas que se escojan son irrelevantes al set, pero la tercera queda determinada por ambas cartas. Con el ejemplo de la Figura 15 se observa de manera sencilla. Las dos primeras cartas son irrelevantes por sí solas, y es la tercera la que crea el set, por lo que la probabilidad será de una carta (2 círculos morados en blanco) entre las 25 cartas restantes que quedan en la baraja (las dos que ya se han elegido no se encuentran dentro de la baraja porque en un set no hay repetición posible). Se puede observar un patrón en la probabilidad de que estas tres cartas formen un set, ya que se aprecia una disminución considerable respecto a las otras barajas, y parece que la probabilidad conforme se toma un número mayor de características tiende a 0 en el infinito.

¿Existe sólo un set posible para cada carta o pareja de cartas?

Esta pregunta no será contestada de nuevo de ahora en adelante porque como ya se ha demostrado, para cada pareja de cartas solamente existirá un set posible siempre, mientras que en función de la baraja hipotética que se coja (SET-1, SET-2, SET-3, …), una única carta tendrá muchos más sets posibles. Es importante incidir en el hecho en este caso son 13, y si bien en la probabilidad de que al tomar tres cartas cualesquiera se da un patrón de disminución al aumentar las cartas de la baraja, en el número de sets que puede crear una carta se observa un cierto aumento progresivo respecto a las otras barajas.

Visión geométrica del juego:

En este caso, la visión geométrica del juego y de los sets vuelven a cambiar, ya que existen otra característica además del color y relleno, el número de figuras. Al realizar el cambio para graficar las cartas se transformará el juego a 3 dimensiones. Asignando un valor a cada característica no mencionada antes obtenemos que:

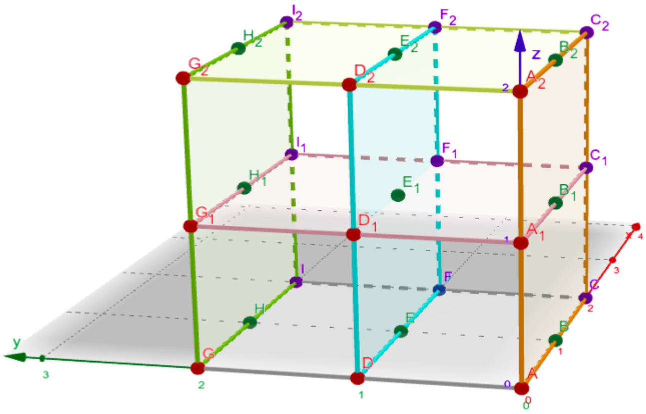
- Para un número de figuras 1 el eje z mostrará un punto en z=0

- Para un número de figuras 2 el eje z mostrará un punto en z=1
- Para un número de figuras 3 el eje z mostrará un punto en z=2

Así, podemos expresar cada carta como un punto en un espacio tridimensional de elaboración propia en GeoGebra, donde vemos una especie de cubo:

Figura 18

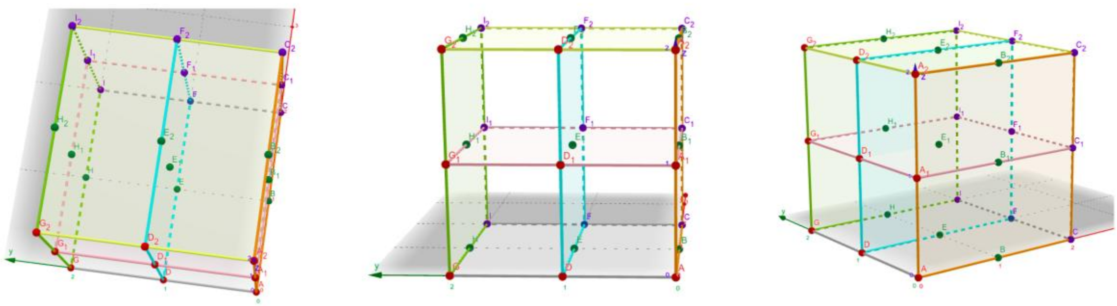
Espacio tridimensional del SET-3 de elaboración propia en GeoGebra.



En este espacio se han expresado todas las cartas en función de sus correspondientes coordenadas asignadas

Figuras 19, 20 y 21

Distintas vistas del espacio tridimensional del SET-3.



Las figuras muestran tres posibles vistas del cubo para comprender mejor la visión geométrica de SET-3. Además de los puntos también se expresan como planos (en Z_3) los que limitan con dos características a los puntos. Los planos de las Figuras 19, 20 y 21 coloreados en amarillo, rosa y gris tienen por ecuación z=0, 1 ó 2 y muestran un SET-2 en el que sólo varía el color o el relleno. Los planos verticales verde, azul y naranja, (mantienen la coordenada del eje y constante), muestran un SET-2 en el que varía el color y el número de figuras. Faltan 3 planos que no se han graficado para comprender la naturaleza de la geometría con mayor facilidad, pero si se toman todos los puntos rojos, verdes o morados, se obtendrían 3 planos que mantienen la coordenada del eje x constante y varían el relleno y el número de figuras.

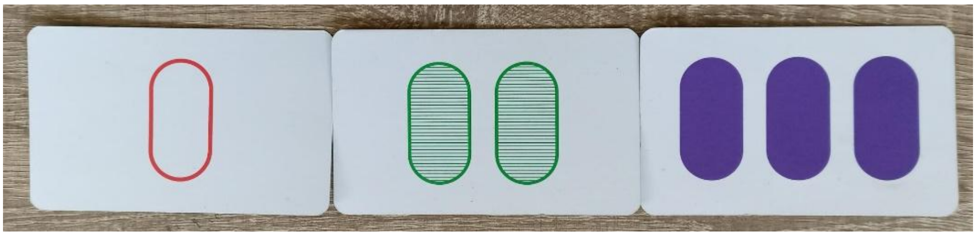
Resumiendo, un set se producirá si y sólo si el conjunto de tres puntos que se toma produce como resultado de su suma una congruencia con 0 en Z_3 para cada variable. Habría que sumar las componentes de los puntos individualmente para evaluarlo. Tomemos como ejemplo los puntos de la Figura 15: $E_0(1,1,0)$, $G_2(0,2,2)$ y $C_1(2,0,1)$. La suma por componentes será:

$$\Sigma x \rightarrow [1 + 0 + 2] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [1 + 2 + 0] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma z \rightarrow [0 + 2 + 1] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$

Por esto, para estas tres cartas se cumple que existe un set. Para ayudar de manera visual a ver un set en el espacio tomaremos las cartas $A_0(0,0,0)$, $E_1(1,1,1)$ e $I_2(2,2,2)$. En la realidad estas cartas son las siguientes:

Figura 22

Cartas físicas de los puntos elegidos.



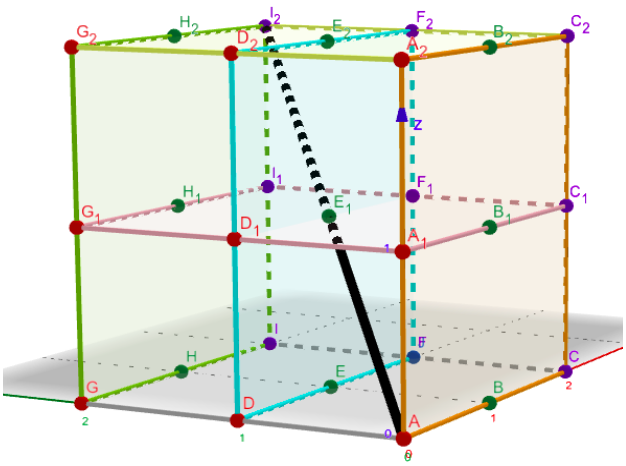
En todas las características difieren, así que se forma un set. Analíticamente se obtiene que

$$\Sigma x \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma z \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$

Por lo que se cumple que existe un set. Por último, geométricamente también existe una línea recta que une a los tres puntos. Esta línea recta es infinita en Z_3, lo que a su vez confirma que para cada dos cartas existirá una sola tercera que complete el set.

Figura 23

Espacio tridimensional del SET-3 con el set formado por las cartas A_0, E_1 e I_2.



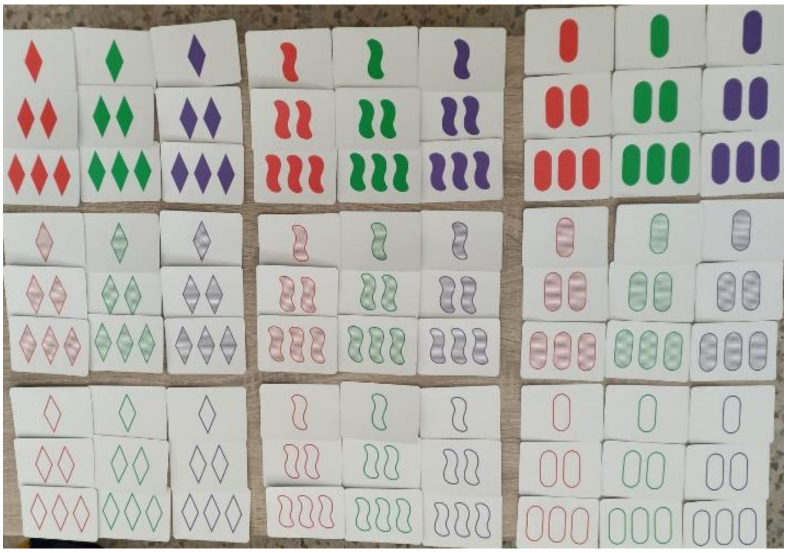
3.4. SET-4 / El juego original

¿Qué es un SET-4?

El juego original consta de cartas creadas a partir de variaciones en sus cuatro características: color, relleno, número de figuras y forma. No hay ninguna característica que se mantenga para el juego original (como en el SET-1, SET-2 o SET-3), sino que las 4 son variables.

Figura 24

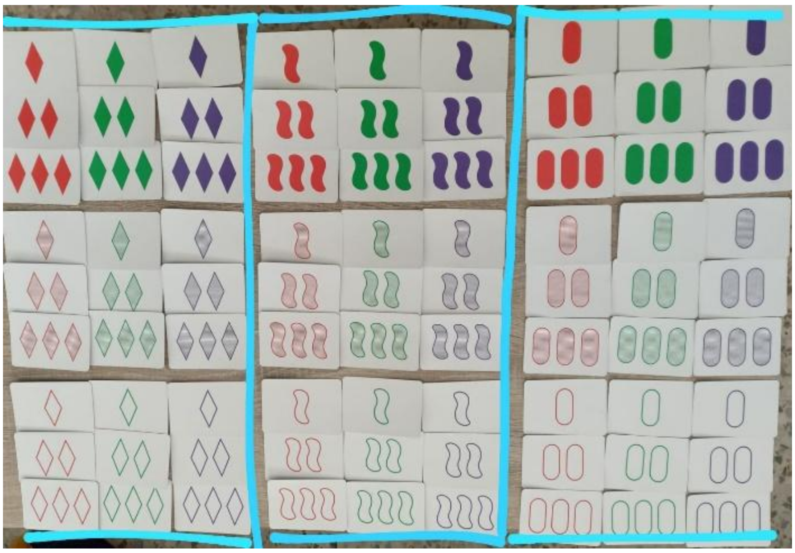
Baraja del juego original/SET-4.



El SET-2 se puede formar con tres SET-1 distintos expresados en otra dimensión, el SET-3 se forma a partir de la unión de tres SET-2 diferentes en su número de figuras que se expresan en otra dimensión. El juego original entonces serán tres SET-3 que varíen la forma.

Figura 25

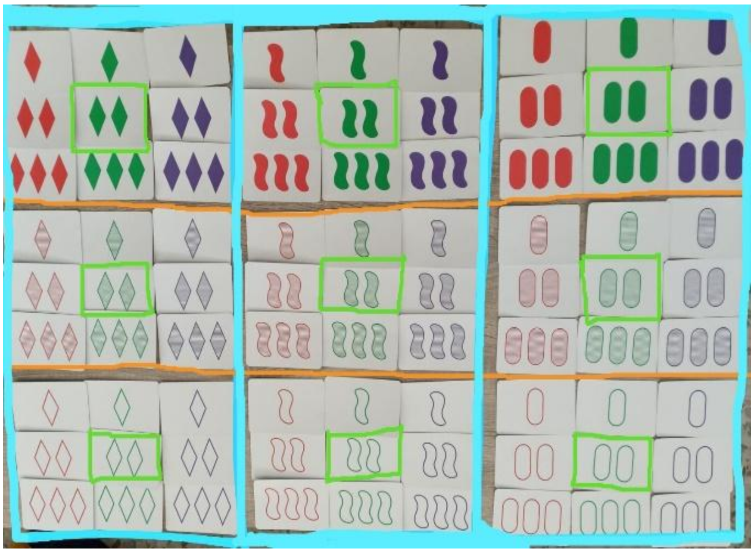
Baraja del SET-4 dividida en 3 sub-SET-3.



Además, como estos SET-3 pueden subdividirse en SET-2 de distintas maneras, el juego se puede reducir. Esta reducción es la que se ha tomado en consideración para trabajar las distintas matemáticas del juego desde la base más fundamental para después lograr comprender el juego al completo.

Figura 26

Subdivisiones de la baraja original en posibles SET-2.



En la imagen se pueden observar las tres barajas de SET-3 separadas por líneas azules, en las que las líneas naranjas crean otras subdivisiones para conformar posibles SET-2. Sin embargo, a pesar de que puedan parecer los únicos SET-2 por el procedimiento que se ha seguido, en verde se han rodeado cada una de las cartas que existen dos figuras verdes, y como hay dos características que varían (el relleno y la forma), se trata de un SET-2.

¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

Se puede ver en la imagen, existen 4 características que toman 3 posibles valores así que existen:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81 \text{ cartas en la baraja.}$$

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta podrá realizar 40 sets posibles. Como ya hemos explicado anteriormente en el SET-3, si se toma una carta de la baraja quedan 80 restantes, por las propiedades del juego ya mencionadas (la tercera carta siempre está determinada por una pareja, un set siempre es el mismo sin importar el orden, …), esta carta elegida podrá formar un set con cada una de las restantes, sets que se han contado dos veces.

Por ello, para cada una de las cartas de una baraja del juego original existirán

$$\frac{81-1}{2} = 40 \text{ sets posibles para cada carta.}$$

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Utilizando de nuevo la fórmula utilizada en el SET-3 pero tomando como consideración las repeticiones que se dan al contar todos los sets, el resultado final de los sets distintos que existan en la baraja original será:

$$\frac{m!}{3 \cdot (m-n)! \cdot n!} \rightarrow \frac{81!}{3 \cdot 79! \cdot 2!} = \frac{81 \cdot 80}{6} = 1080$$

Existirán 1080 sets distintos en la baraja del juego original.

¿Cuál es el mínimo número de cartas no nulo [...] en sets sin que sobre ninguna?

Siguiendo el razonamiento expresado en los apartados anteriores, la única posibilidad de que esta condición se cumpla siempre será al tomar la baraja al completo.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?

$$\frac{CASOS\ FAVORABLES}{CASOS\ POSIBLES} = \frac{1}{81-2} = \frac{1}{79} = 0.0126582\ldots \approx 1{,}26\%$$

Visión geométrica del juego:

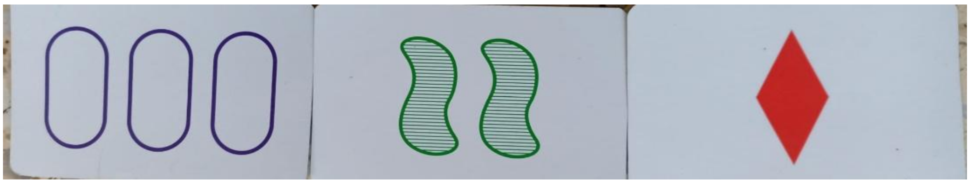
La visión geométrica para el juego original limita al observador a la hora de expresarla, ya que vivimos en un mundo de tres dimensiones (4 si se cuenta el tiempo), por lo que es difícil de explicar. En el SET-4 se sigue el mismo procedimiento que antes, y en un nuevo eje a 90 grados de distancia de los ejes x, y, z se mostrará la variable "forma". Se asigna un valor a cada característica de forma, con lo que:

- Designaremos con un 0 a la forma circular.
- Designaremos con un 1 a la forma de gusano.
- Designaremos con un 2 a la forma de rombo.

No se expresará entonces de manera gráfica el SET-4 por las limitaciones ya comentadas con anterioridad. Se puede entender como 3 cubos que varían en el tiempo. Si se observa la Figura 18, en la que la forma círculo es constante, para un instante de tiempo específico todos los puntos serán círculos (cuando t = 0, por ejemplo). Si se espera, todos los puntos tendrán forma de gusano para t = 1 (no son instantes de tiempo reales, pero puede ayudar a visualizar la geometría del juego). Sin embargo, cuando t sea igual a 2, los puntos serán todos cartas con la característica forma en la variación rombo. Como todos los ejes están en Z_3, el eje del tiempo también lo estará, y como si fuera un ciclo o bucle después de t = 2 todas las cartas habrán adquirido la forma circular para empezar en t = 0 de nuevo.

Resumiendo, sí que se cumplirá que un set se produce si y sólo si la suma de los 3 puntos del conjunto resulta en una congruencia con 0 en Z_3 para cada variable. Se siguen sumando las componentes de los puntos individualmente. Tomaremos los puntos $P_1(2,0,2,0)$, $P_2(1,1,1,1)$ y $P_3(0,2,0,2)$. Este ejemplo tiene las siguientes cartas:

Figura 27
Cartas físicas de los puntos elegidos.



Analíticamente realizamos el estudio y obtenemos que:

$$\Sigma x \rightarrow [2 + 1 + 0] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma z \rightarrow [2 + 1 + 0] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma t \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$

Por lo tanto, para estas tres cartas se cumple que existe un set.

3.5. SET-N

¿Qué es un SET-N?

Una vez descritos todos los tipos de baraja hasta llegar a la baraja original se generaliza y se contestarán a las preguntas que han guiado la exploración para el SET-N. Este SET-N es la baraja que se crea para N características o dimensiones en cada una de las cartas. No entraremos a hablar en profundidad de las posibles barajas y sus implicaciones, sino que como curiosidad se tratará este tema contestando a las cuestiones base de la exploración. No obstante, es un campo sobre el que se invita a cualquier persona interesada a seguir indagando.

¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

Para N características, con la fórmula combinatoria correspondiente se obtiene que existen 3^N distintas cartas en la nueva baraja.

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta podrá realizar $\frac{3^N-1}{2}$ posibles sets, donde las explicaciones pertinentes quedan en los apartados anteriores.

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Utilizando la fórmula que se ha desarrollado a lo largo de la investigación se obtiene que:

$$\frac{m!}{3 \cdot (m-n)! \cdot n!} \rightarrow \frac{3^N \cdot (3^N-1)(3^N-2)!}{3 \cdot (3^N-2)! \cdot 2!} = \frac{3^N \cdot (3^N-1)}{6}$$

Existirán $\frac{3^N \cdot (3^N-1)}{6}$ sets distintos en una baraja de N características.

¿Cuál es el mínimo número de cartas no nulo [...] en sets sin que sobre ninguna?

Como hemos razonado anteriormente, la respuesta no varía por mucho que se aumente indefinidamente el número de características, ya que siempre será necesario tomar la baraja al completo, por lo que el número mínimo de cartas es 3^N.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?

$$\frac{CASOS\ FAVORABLES}{CASOS\ POSIBLES} = \frac{1}{3^N - 2}$$

La probabilidad tiende a 0 conforme N tiende a infinito, mientras que cuando N tiende a 0, la probabilidad es negativa, -1, lo que se presta a interpretaciones, pero en la práctica es una situación imposible, ya que una baraja debe tener al menos una característica para existir.

Visión geométrica del juego:

La visión geométrica para la baraja de N características es muy difícil de imaginar. Las nociones generales son que cada nueva característica toma tres valores diferentes en un nuevo eje que debe encontrarse a 90º de todos los demás ejes. El "espacio" a imaginar se encuentra relativamente confinado porque se encuentra en Z_3, así que cada nueva característica que se añada hasta llegar a N deberá relacionar cada variación con un número del 0 al 2.

De manera analítica no cambia el funcionamiento, sino que se pueden sumar las componentes de 3 puntos de manera individual. Si es congruente con 1 ó 2 en Z_3 no existirá set, mientras que si el sumatorio de todas las coordenadas es congruente con 0, sí que se producirá un set.

4. CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN FINAL

En el desarrollo de esta exploración se han llevado a cabo los objetivos planteados al inicio, ya que se ha analizado el trasfondo matemático del juego "set" a partir de las preguntas planteadas. Este método ha sido eficaz, ya que ha permitido conocer aspectos ocultos de las matemáticas en las que se sustenta dicho juego. Investigando los distintos casos hipotéticos y variaciones del número de características de las cartas se ha logrado conseguir una comprensión suficiente como para después lograr generalizar para un número indeterminado de características. Como se sospechaba, el juego posee una amplia base matemática que se ha tratado de poner en manifiesto en esta investigación.

Personalmente, no esperaba encontrar tantas matemáticas ocultas en el juego, y me han ido surgiendo preguntas al profundizar cada vez más sobre el "set". Por otra parte, el hecho aplicar conceptos y fórmulas matemáticas a un juego con el que he crecido me parece fascinante, porque verdaderamente me ha hecho darme cuenta de que las matemáticas están mucho más presentes en la sociedad y en la actualidad de lo que pensamos, no sólo en informática y teoría abstracta, sino también en este 'sencillo' juego de cartas. La teoría de juegos es una rama de las matemáticas muy atractiva precisamente por esta razón. Animo a cualquier lector a que trate de saciar su curiosidad y a que siga investigando, porque la curiosidad mueve el mundo y en la investigación se encuentra la base de nuestro conocimiento.

A lo largo de esta exploración se ha dejado alguna cuestión sin responder y sobre las que merece la pena indagar. Por ejemplo:

- ¿En qué medida se pueden comparar los SET-2 dentro de un SET-3 con los SET-1 dentro de un SET-2? ¿Es esta comparación válida para todas sus formas y SETS?
- ¿Cuál es el número máximo de cartas que pueden existir en una baraja para las que no pueda existir ningún set?

- Si las barajas admitieran repeticiones de las cartas, ¿cómo cambiarían las respuestas a las preguntas, así como el juego?

Se dan estas preguntas como una especie de guía, pero existen otras muchas esperando a ser contestadas.

En conclusión, los resultados de esta exploración matemática han sido claramente satisfactorios y han cumplido en gran medida con los objetivos que se buscaban alcanzar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Davis, B. L. y Maclagan, D. (2003). *The card game set*. https://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf

Goldberg, T. E. (2016). Algebra From Geometry in the Card Game SET, *The College Mathematics Journal*, *47*(4), 265-273.

Ibáñez, R. (2016). *Matemáticas en el juego de cartas set (1), Cuaderno de Cultura Científica*. https://culturacientifica.com/2016/06/15/matematicas-juego-cartas-set-1/

Pellegrino, G. (1971). Sul massimo ordine delle calotte in $S_{4,3}$, *Matematiche (Catania), 25*, 149-157.

Van Lint, J. H. y Wilson, R. M. (2001). *A course in combinatorics (2nd edition).* Cambridge University Press

epsilon