

# Applets en GeoGebra para el estudio de transformaciones lineales desde el enfoque EOS

Katalina Oviedo Rodríguez

Universidad Nacional (Costa Rica), [katalina.oviedo.rodriguez@una.ac.cr](mailto:katalina.oviedo.rodriguez@una.ac.cr)

Byron Jiménez Oviedo

Universidad Nacional (Costa Rica), [byron.jimenez.oviedo@una.ac.cr](mailto:byron.jimenez.oviedo@una.ac.cr)

Jeremías Ramírez Jiménez

Universidad Nacional (Costa Rica), [jeremias.ramirez.jimenez@una.ac.cr](mailto:jeremias.ramirez.jimenez@una.ac.cr)

María Gabriela Calderón Torres

Universidad Nacional (Costa Rica), [maria.calderon.torres@una.ac.cr](mailto:maria.calderon.torres@una.ac.cr)

**Resumen:** *El aprendizaje del álgebra lineal presenta desafíos debido a la naturaleza abstracta de sus conceptos. Superar estas dificultades requiere estrategias que fomenten la construcción activa y autónoma de la comprensión por parte de los estudiantes. Desde una perspectiva de diseño instruccional, basada en la noción de idoneidad didáctica del EOS y sus componentes, en esta investigación se diseñó e implementó applets en GeoGebra para el estudio de las transformaciones lineales, en un curso universitario de Álgebra Lineal. Se realizó una Investigación Basada en el Diseño, que incluyó el diseño de una propuesta didáctica, su implementación con estudiantes de la Universidad Nacional (Costa Rica), y su valoración por medio de la aplicación de: (a) un cuestionario de percepciones sobre el uso de los applets y (b) el estudio de su idoneidad didáctica. Los resultados indican que la propuesta es percibida positivamente por el estudiantado, que esta satisface en buena medida las facetas de la idoneidad didáctica, a la vez que se identifican aspectos de mejora en cada una de ellas. Se concluye reafirmando la conveniencia de integrar tecnologías que permitan visualizar y manipular conceptos matemáticos, como los applets propuestos, que pueden facilitar y enriquecer el aprendizaje del álgebra lineal.*

**Palabras clave:** *Transformaciones lineales, Applets, GeoGebra, Enfoque Ontosemiótico.*

## GeoGebra applets for the study of linear transformations from the EOS approach

**Abstract:** *Learning linear algebra presents challenges due to the abstract nature of its concepts. Overcoming these difficulties requires strategies that promote active and autonomous construction of understanding by students. From an instructional design perspective, based on the notion of didactic suitability of the EOS and its components, this research designed and implemented GeoGebra applets for the study of linear transformations in a university-level Linear Algebra course. A Design-Based Research approach was conducted, which included the design of a didactic proposal, its implementation with students from the National University (Costa Rica), and its evaluation through: (a) a questionnaire on perceptions about the use of the applets, and (b) the study of their didactic suitability. The results indicate that the proposal is positively perceived by the students, satisfactorily meeting the facets of didactic suitability, while identifying areas for improvement in each of them. The conclusion reaffirms the*

*advantage of integrating technologies that allow for visualizing and manipulating mathematical concepts, such as the proposed applets, which can facilitate and enrich the learning of linear algebra.*

**Key words:** *Linear transformations, Applets, GeoGebra, Ontosemiotic Approach.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones apuntan las dificultades que tienen los estudiantes universitarios para aprender los conceptos abstractos que se estudian en un curso de Álgebra Lineal (Dorier et al., 1997; Oktaç y Gaisman, 2010; Sierpinska, 2000). El uso de diferentes lenguajes, la naturaleza abstracta y el formalismo de los conceptos son señalados como obstáculos que enfrentan los estudiantes. Dubinsky (1997) sostiene que, al igual que en otras áreas de las matemáticas universitarias, el aprendizaje del álgebra lineal implica superar la dificultad que representa el desarrollo de la comprensión conceptual en los estudiantes. Para abordar este desafío, propone la implementación de estrategias pedagógicas que favorezcan la construcción mental de objetos y procesos matemáticos, permitiendo a los estudiantes construir sus propias comprensiones sobre los objetos y procesos matemáticos, mediante el trabajo activo con ellos.

El uso de tecnologías para introducir y estudiar conceptos en matemáticas se ha convertido en una valiosa herramienta en los últimos años. Según Godino et al. (2021), en la investigación en didáctica de la matemática se le concede gran atención a los cambios derivados de los desarrollos tecnológicos, los cuales desafían las visiones tradicionales del currículo, la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación. El uso de tecnologías en la clase de matemática tiene influencias positivas (Baki, 2015) y generalmente tiene el objetivo de aprovechar las ventajas que ofrece el medio computacional para facilitar la exploración, cálculo, la experimentación, la resolución de problemas y la modelización matemática (Ortega, 2002). Es decir, una de las virtudes de las tecnologías es la posibilidad de que los estudiantes construyan sus propias comprensiones sobre conceptos y procesos matemáticos, manipulándolos, visualizando sus propiedades, proponiendo y probando ideas.

En este estudio se toma en cuenta tanto las dificultades inherentes al aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal, como los beneficios que la tecnología puede ofrecer para facilitar este proceso. Su objetivo fue diseñar, implementar y valorar el uso de applets en GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso universitario de Álgebra Lineal. La elección a priori de GeoGebra se fundamentó en su acceso gratuito, su facilidad de uso tanto para docentes como para estudiantes, y su gran utilidad para el análisis gráfico de conceptos.

Dada su relación con el diseño instruccional en educación matemática, el objetivo de investigación se abordó desde una perspectiva fundamentada en la noción de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y sus seis componentes (Godino, 2013). Esta noción y los indicadores empíricos que la estructuran fueron introducidos por Godino y sus colaboradores como parte de una teoría de la instrucción matemática desarrollada para mejorar la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

Diversas investigaciones han explorado el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales y otros conceptos del álgebra lineal (Gallo et al., 2019; Camacho y Oktaç, 2017; Podevils y Montenegro, 2021). No obstante, este estudio no solo se centra en el diseño e implementación de los applets, sino que también integra los componentes de la

idoneidad didáctica del EOS como fundamento de la propuesta. Este enfoque enriquece el diseño e implementación de los applets y permite un análisis más profundo de los aspectos didácticos involucrados.

## **2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES**

### **2.1. Teoría de la idoneidad didáctica y sus componentes**

El EOS es un marco teórico propio de la Didáctica de la Matemática que articula nociones sobre la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático, resaltando la naturaleza relacional y multidimensional de estos procesos, así como su complejidad (Godino, 2013). Dentro de este marco y como punto de partida de una teoría de diseño instruccional, la noción de idoneidad didáctica se propone como una herramienta que permite valorar la adecuación del proceso educativo enfocándose en la intervención de aula efectiva y puede aplicarse a una sesión de clase, un material didáctico, una unidad didáctica, un curso, o un currículo (Godino, 2013). Es decir, este enfoque está centrado en la mejora de la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel parcial como global.

Según Breda et al. (2018), la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje se entiende como el grado en que esta (o una parte de esta) reúnen ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales alcanzados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

En el trabajo de Godino (2013), la noción de idoneidad didáctica se describe a través de seis componentes, cuya articulación coherente y sistémica es requerida en un proceso de instrucción:

1. **Idoneidad epistémica:** Corresponde al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos-implementados respecto a un significado de referencia. Los componentes que permiten hacer operativa esta noción de idoneidad son las situaciones problema, los lenguajes, las reglas (definiciones, proposiciones o procedimientos), los argumentos y las relaciones.
2. **Idoneidad cognitiva:** Se refiere al grado en que los significados pretendidos-implementados se encuentren en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados. Sus componentes son los conocimientos previos, las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y el aprendizaje, considerando las mismas componentes de la idoneidad epistémica.
3. **Idoneidad interaccional:** Expresa el grado en que las trayectorias y configuraciones didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los conflictos presentados durante la instrucción. Los componentes que permiten hacer operativa esta idoneidad son la interacción docente-discente, la interacción entre alumnos, la autonomía y la evaluación formativa.
4. **Idoneidad mediacional:** Indica el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales que se requieren para desarrollar la enseñanza y el aprendizaje. Sus componentes incluyen los recursos materiales (manipulativos, ordenadores, calculadoras, entre otros), la cantidad de estudiantes y las condiciones de aula y tiempo.

5. Idoneidad afectiva: Se refiere al grado de implicación, interés y motivación del estudiantado en el proceso de estudio. Los componentes que articulan esta idoneidad son los intereses y necesidades, las actitudes y las emociones.
6. Idoneidad ecológica: Indica el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo institucional (centro, escuela y sociedad) y a las condiciones de su entorno. Sus componentes son la adaptación al currículo, la apertura hacia la innovación didáctica, la educación en valores, las conexiones intra-interdisciplinarias y la adaptación socio-profesional y cultural.

Godino (2013) advierte que tales componentes de la idoneidad didáctica no deben considerarse como facetas independientes, pues se manifiestan interrelacionadas. A modo de ejemplo, este autor explica que emplear un recurso tecnológico (mediacional) puede permitir abordar ciertos temas, objetos, procesos o representaciones (epistémica-cognitiva), afectando las interacciones profesor-estudiantes (interaccional), e incluyendo el interés y la motivación estudiantil (afectiva), así como en el alcance de los aprendizajes (ecológica).

## 2.2. Teoría de la idoneidad didáctica y sus componentes

Uno de los componentes de la idoneidad epistémica, centrada en los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia, está constituido por las reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos) necesarias para el estudio cada tema. En el caso del estudio de las transformaciones lineales, según Weller et al. (2002), la construcción del concepto transformación lineal se fundamenta en una función definida entre dos espacios vectoriales, donde los objetos espacio vectorial y función se coordinan para construir una transformación. Para esto, un individuo necesita de una fórmula explícita que le permita tomar un vector del dominio y transformarlo con una regla de asignación definida para obtener un vector de salida. De acuerdo con esto es fundamental la definición de espacio vectorial. Esta definición, a través de la comprensión del concepto de función, permite que el individuo pueda determinar que la suma de dos elementos cualesquiera del espacio es un nuevo vector del espacio y que, por tanto, es posible determinar su imagen en dicho espacio (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

En cuanto a la idoneidad cognitiva, uno de sus componentes es el conocimiento previo de los estudiantes. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) apuntan que una de las nociones fundamentales para poder construir el concepto de transformación lineal es la noción de función. Dominando este concepto, el individuo puede abordar las funciones como objetos, desentrañando el proceso mediante el cual se construyó dicho objeto para aplicarlo a una situación específica. Esto le permitirá utilizar, de manera flexible y sin dificultad, los elementos del proceso o del objeto según lo requiera. Otros conocimientos previos que debe tener el estudiante son los conceptos de operación binaria y de combinación lineal, los cuales están muy relacionados con los conceptos de espacio vectorial y de vector, las operaciones producto por un escalar y suma vectorial, y el uso del cuantificador universal  $\forall$  (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Respecto a la idoneidad interaccional, la resolución de conflictos cognitivos por medio de las acciones en la clase debe atender por ejemplo a las confusiones que se presentan al pasar de  $\mathbb{R}^n$  y matrices a trabajar en un espacio vectorial abstracto (Aguilar y Vásquez, 2020). En general, los principales conflictos que se identifican en la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones lineales están relacionados con la naturaleza abstracta del contenido y el uso de diferentes tipos de lenguajes y representaciones utilizados en el discurso desarrollado en el aula (Rodríguez, 2002).

En el caso de la idoneidad mediacional, relacionada con el grado de adecuación de recursos materiales, en la enseñanza del álgebra lineal se recomienda utilizar recursos tecnológicos como complemento para ciertos temas. Por ejemplo, Campos et al. (2021) plantean que el empleo de un sistema de geometría dinámico, como GeoGebra, proporciona herramientas que facilitan los procesos del pensar matemáticamente, como la identificación de patrones y la formulación y justificación de conjeturas para un tópico específico dentro de un curso típico de Álgebra Lineal. Además, Karrer y Santos (2018) mencionan que el uso del software matemático permite visualizar, simultáneamente, las relaciones entre diferentes conceptos, realizar tratamientos dinámicos y gráficos, lo que posibilita un tratamiento diferente de los objetos matemáticos y propicia nuevas comprensiones de estos.

En relación con la idoneidad afectiva, que se enfoca en la implicación, el interés y la motivación de los estudiantes, Hernández y Juárez (2018) evaluaron el grado de satisfacción de estudiantes de matemáticas avanzadas, incluyendo álgebra lineal, en comparación con sus expectativas iniciales. Sus resultados mostraron que, entre todas las facetas de la idoneidad didáctica, la afectiva fue la única en la que la percepción de la experiencia de aprendizaje no coincidió completamente con las expectativas previas. Por otro lado, Gallego-López et al. (2018) determinaron que la incorporación de GeoGebra como herramienta de mediación en el aprendizaje del cálculo vectorial y el álgebra lineal en estudiantes universitarios contribuyó a mejorar tanto los procesos motivacionales como el aprendizaje autorregulado.

Por último, la idoneidad ecológica contempla la adaptación al currículo y la apertura hacia la innovación. El estudio del álgebra lineal está incluido en múltiples programas de estudio de diversas titulaciones universitarias, contemplando disposiciones particulares y diferentes grados de innovación. Por ejemplo, el programa de estudios del Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (BLEM, 2017) impartido en la Universidad Nacional (Costa Rica), incluye un curso de Álgebra Lineal en el tercer nivel de la carrera, que incluye el estudio de las transformaciones lineales. Este programa está diseñado por competencias, tomando en cuenta referentes nacionales e internacionales. Dentro de sus ejes curriculares establece el desarrollo del pensamiento lógico matemático, así como la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación, entre otros.

### 3. MARCO METODOLÓGICO

La metodología de este estudio se basó en los principios de la Investigación Basada en el Diseño (Brown, 1992; Kelly et al., 2008). Según De Benito y Salinas (2016), este enfoque busca promover la innovación educativa al abordar una problemática identificada en el contexto de enseñanza mediante la incorporación de un nuevo elemento. Para ello, se apoya en teorías científicas o modelos existentes que permiten diseñar, implementar y evaluar programas, materiales o estrategias didácticas. En este caso, se empleó la noción de idoneidad didáctica del EOS, junto con sus componentes e indicadores, como base para el desarrollo de applets para facilitar la comprensión de conceptos complejos en álgebra lineal.

Siguiendo este enfoque metodológico, la investigación se llevó a cabo en tres etapas: diseño, implementación y valoración-reflexión de la implementación y del diseño. En la fase de diseño, se construyeron los applets en GeoGebra para el estudio de las transformaciones lineales. Posteriormente, en la fase de implementación, estos applets se utilizaron en una clase de un curso universitario de Álgebra Lineal. En la fase de valoración-reflexión se exploraron las percepciones de los estudiantes sobre el uso de los applets en su aprendizaje y se utilizó la

herramienta de Idoneidad Didáctica para analizar y reflexionar sobre posibles mejoras de la propuesta diseñada e implementada.

### 3.1. Categorías de análisis

Según correspondió en cada caso, para el diseño de los applets y su implementación, a modo de categorías de análisis, se utilizaron los siguientes indicadores señalados en el marco del EOS para los diferentes componentes de cada faceta de la idoneidad didáctica (Godino, 2013):

1. Idoneidad epistémica: muestra representativa de situaciones de aplicación, diferentes modos de expresión (verbal, simbólica, gráfica), situaciones de expresión e interpretación, definiciones claras y correctas, presencia de enunciados y procedimientos fundamentales del tema, situaciones de generación de definiciones, situaciones de argumentación y comprobación, evidencias de conexiones entre objetos matemáticos.
2. Idoneidad cognitiva: manejo de conocimientos previos (por estudio previo o reestudio), dificultad manejable del aprendizaje pretendido, inclusión de actividades de refuerzo, diversos modos y niveles de evaluación del logro de los aprendizajes, enfoque en comprensión conceptual, comunicativa, argumentativa y procedimental.
3. Idoneidad interaccional: reconocimiento docente de los conflictos (preguntas y respuestas), diversidad de recursos retóricos y argumentativos, favorecimiento del diálogo entre estudiantes, convencimiento de la validez de las ideas y conjeturas, situaciones en que los estudiantes asumen la responsabilidad de su aprendizaje (exploran, conjeturan, se comunican, investigan), observación sistemática del proceso de aprendizaje.
4. Idoneidad mediacional: uso de materiales manipulativos e informáticos, contextualización de definiciones y propiedades mediante modelos concretos y visualizaciones, adecuación del número de estudiantes, horario y condiciones de aula.
5. Idoneidad afectiva: actividades de interés para los estudiantes, situaciones para valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional, así como sus cualidades estéticas y precisas, promoción de la participación, la perseverancia, y la autoestima.
6. Idoneidad ecológica: correspondencia de contenidos con directrices curriculares, innovación basada en la investigación, integración de nuevas tecnologías, relación con contenidos intra e interdisciplinarios.

De modo que, la idoneidad didáctica del diseño de los applets y de su implementación en el aula, incluyendo la percepción estudiantil, se consideró en términos de tales categorías de análisis.

### 3.2. Categorías de análisis

Según De Benito y Salinas (2016), el estudio de caso es una de las técnicas comúnmente utilizadas en la Investigación Basada en Diseño, y generalmente el investigador participa activamente en el proceso educativo intervenido. En concordancia con este enfoque, la implementación de los applets se llevó a cabo mediante un estudio de caso con un grupo de 12 estudiantes de un curso universitario de Álgebra Lineal impartido en 2023 en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional (Costa

Rica). Asimismo, el profesor del curso estuvo involucrado en el proceso de investigación como integrante del equipo de investigadores.

Este curso de Álgebra Lineal, ubicado en el tercer nivel del plan de estudios de la carrera, abarca tanto aspectos teóricos como prácticos relacionados con la teoría de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales reales de dimensión finita, operadores lineales y valores y vectores propios. Los estudiantes que matriculan este curso cuentan con conocimientos previos en principios matemáticos, análisis y geometría analítica.

Los applets diseñados se implementaron durante una clase del curso mediante una serie de actividades propuestas por el profesor. Aunque el grupo estaba conformado inicialmente por 18 estudiantes, seis estuvieron ausentes el día de la implementación, por lo que participaron 12 estudiantes en el estudio de caso. De estos, seis se identificaron con género masculino, cinco con femenino y uno con un género no especificado. Además, aunque los estudiantes habían ingresado a la carrera en distintos años (2019, 2020 y 2021), en 2023 todos cursaban el tercer nivel de la carrera. En ese momento, sus edades oscilaban entre 20 y 31 años, con una edad promedio de 23 años.

### 3.3. Cuestionario sobre la percepción estudiantil

Al implementar una herramienta tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje es importante explorar las opiniones de los usuarios. De modo que, se utilizó la técnica de cuestionario autoadministrado para recoger información específica sobre la percepción del estudiantado participante en la implementación de los applets diseñados. Se procedió según lo indicado por Gómez (2018): se indicaron los propósitos del estudio, se dio una explicación general del contenido del cuestionario y se entregó para ser respondido, permitiendo que se plantearan dudas o explicaciones al respecto.

El cuestionario fue diseñado por los investigadores. Se incluyeron dos apartados, el primero compuesto de preguntas abiertas sobre información general del estudiante, y el segundo por una serie de proposiciones relacionadas con el uso de los applets para el estudio de transformaciones lineales en el curso de Álgebra Lineal. También, se incluyó una pregunta abierta en la que se solicitó responder a la cuestión: ¿Cuál es su percepción sobre el uso de herramientas tecnológicas, particularmente uso de applets en GeoGebra, para el estudio del tema de transformaciones lineales?

En relación con las proposiciones se solicitó a los participantes su grado de acuerdo con estas, según una escala Likert de cinco niveles: muy en desacuerdo (1), en desacuerdo (2), indiferente (3), de acuerdo (4), y muy de acuerdo (5). En la sección de resultados de este artículo se presentan los enunciados de este segundo apartado del cuestionario.

Dado que el objetivo del cuestionario era conocer y describir las percepciones del estudiantado, sin pretender realizar inferencias o generalizaciones, el tamaño reducido de la muestra (12 estudiantes) no representó una limitación. La muestra se seleccionó mediante un muestreo no aleatorio por conveniencia, lo que significa que los participantes fueron elegidos de manera intencionada según la accesibilidad y disponibilidad del investigador (Hernández, 2021). En este caso, el criterio de selección fue la asistencia a la clase en la que se llevó a cabo la implementación de los applets. Asimismo, el carácter exploratorio descriptivo y local del estudio, lo ha eximido de la realización de un proceso de validación.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Descripción de los applets diseñados

El diseño de los applets estuvo a cargo de los investigadores. Se construyeron cuatro applets utilizando GeoGebra. Estos se centraron en el estudio de las transformaciones lineales. El primer applet se diseñó exclusivamente para verificar si una transformación cumple con las características de ser una transformación lineal en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Los restantes tres applets más se diseñaron para visualizar dos tipos de transformaciones lineales: reflexión y rotación, así como la composición de estas. Estos conceptos son tanto algebraicos como geométricos, lo que permite realizar una interpretación geométrica, que posibilita visualizar el efecto de la transformación en objetos en el plano. Estos applets se centran en transformaciones lineales en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Aunque GeoGebra tiene ya instalados comandos para crear rotaciones, reflexiones o simetrías, la construcción se hizo a partir de la definición de transformación lineal, y de la matriz asociada a una base específica del dominio, pues se consideró más conveniente para los objetivos propuestos.

#### 4.1.1. Applet sobre propiedades de una transformación lineal

Una transformación lineal  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida sobre el cuerpo de los números reales  $\mathbb{R}$  debe satisfacer dos propiedades fundamentales, de manera que el incumplimiento de una de ellas indica que la transformación dada no es una transformación lineal. Estas propiedades son:

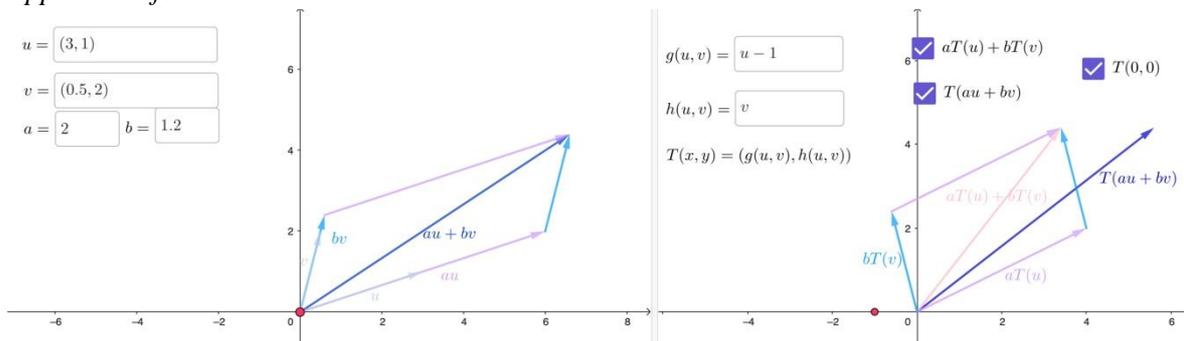
- A) Aditividad: representada por  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ , para todo  $u, v$  en  $\mathbb{R}^2$ .
- B) Homogeneidad: representada por  $T(au) = aT(u)$ , para todo  $u$  en  $\mathbb{R}^2$  y para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

El applet diseñado permite ingresar los vectores  $u$  y  $v$ , los escalares  $a$  y  $b$ , y la transformación que se desea analizar, para visualizar si se cumple con las propiedades. Particularmente la propiedad de que toda transformación lineal  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisface  $T(0) = 0$ , permite decidir si la transformación lineal dada no es lineal. El uso de esta propiedad se muestra en la Figura 1.

La Figura 1 (contiene enlace al applet) muestra un ejemplo de una transformación  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y) = (x - 1, y)$ , donde de acuerdo con lo que se observa en la Figura 1, el vector obtenido de la suma de  $1.2T(0.5, 2) + 2T(3, 1)$  (vector mostrado en color rosa) no coincide con la transformación  $T(1.2(0.5, 2) + 2(3, 1))$  (vector mostrado en color azul). De manera que, al menos de manera hipotética se supone: (a) el uso del applet (lo mediacional) provee de una visualización geométrica, la cual, a la vez; (b) facilita y enriquece la enseñanza-aprendizaje en el momento de la clase (lo interaccional), (c) ayuda a la comprensión del alumnado (lo cognitivo), (d) fomenta su motivación (lo afectivo), (e) permite visualizar el efecto de las propiedades de una transformación lineal (lo epistémico). En particular, la propiedad  $T(0) = 0$  (representada con el punto rojo) resulta muy útil para visualizar el efecto de que  $T(0, 0) = (0 - 1, 0) = (-1, 0) \neq (0, 0)$ .

**Figura 1**

Applet transformaciones.

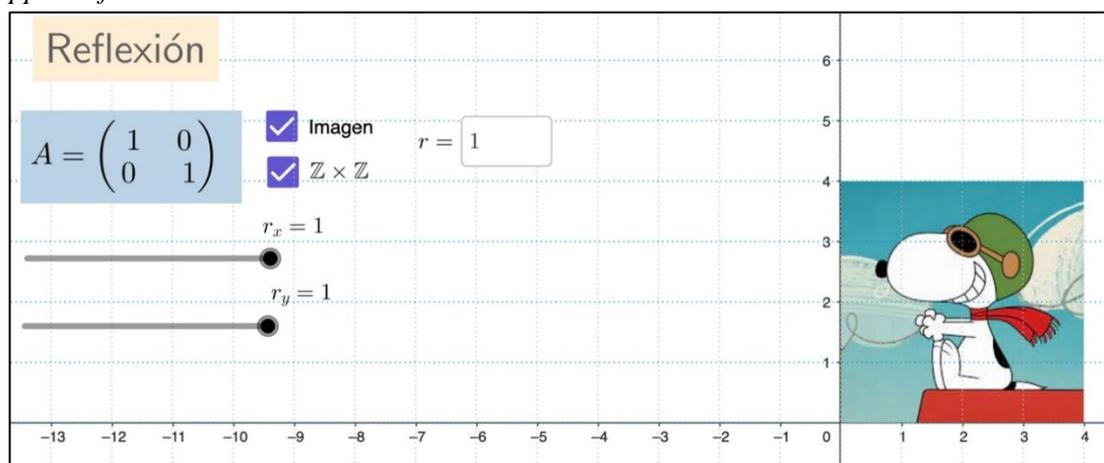


### 4.1.2. Applets sobre transformaciones lineales de tipo reflexión

La Figura 2 (contiene enlace al applet) muestra un applet que genera una reflexión con respecto al eje  $x$  o al eje  $y$ . De manera que, al mover los deslizadores puede apreciarse como se obtiene la respectiva matriz asociada a la transformación lineal vía multiplicación matricial. Es decir, el usuario del applet puede apreciar tanto la dinámica como la matriz que debe utilizar para multiplicar las coordenadas de cada punto en el plano para generar el efecto requerido. Este es un aspecto clave en los applets de visualización diseñados.

**Figura 2**

Applet reflexión.



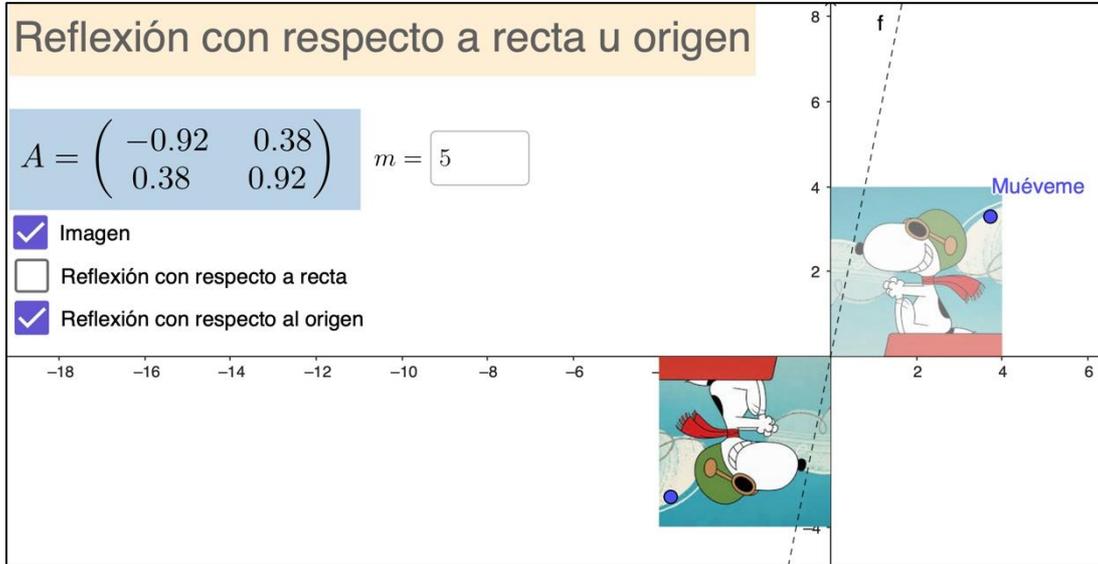
Además de la reflexión, este applet permite escalar la imagen, es decir, ajustar su tamaño. Estas transformaciones son comunes en muchos libros de álgebra lineal, pero verlas en movimiento agrega un componente dinámico que, desde nuestra perspectiva, satisface las hipótesis presentadas, respecto al uso del applet (Figura 1), en el apartado anterior.

Se diseñó otro applet (Figura 3, con enlace al applet) también relacionado con la reflexión, pero generalizada a cualquier recta que contenga al origen. A pesar de que visualmente es sencillo entender esta transformación, la manera de obtener la matriz de la transformación es más desafiante. En el caso de estudiantes de matemática, podría convertirse en un applet más atractivo en el sentido constructivo (la obtención de la matriz se puede ver en el siguiente

[enlace](#)). Este applet también presenta la reflexión con respecto al origen, como un caso particular, el cual está representado en la Figura 3.

**Figura 3**

*Applet reflexión con respecto a la recta y el origen.*

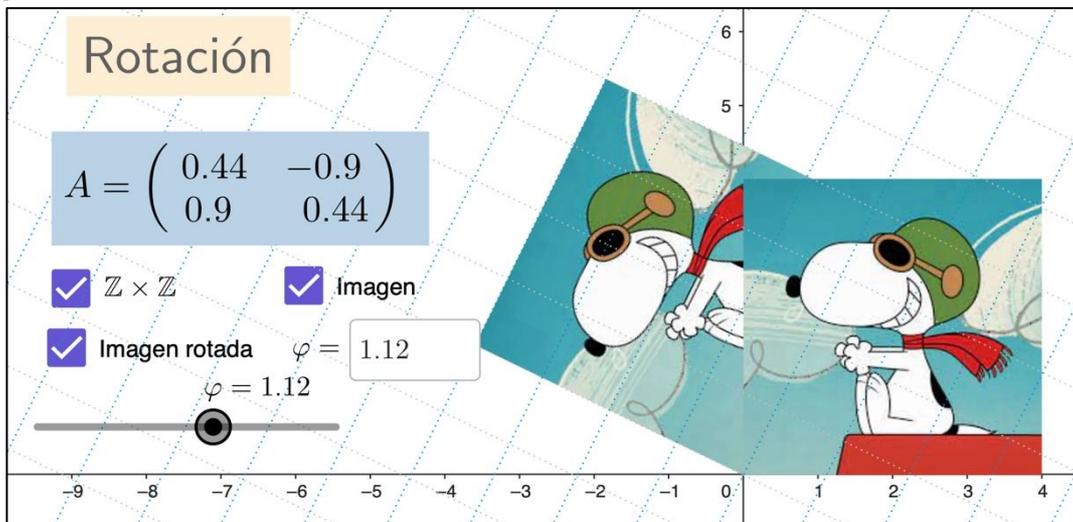


#### 4.1.3. Applet sobre transformaciones lineales de tipo rotación

Otro applet (Figura 4, contiene enlace al applet) se diseñó para visualizar una transformación común presentada en los libros de álgebra lineal: la rotación en el plano. Además de permitir la visualización de la dinámica implicada en la realización de las transformaciones, estos applets proveen la matriz de transformación.

**Figura 4**

*Applet rotación.*



La propuesta de estos applets representa un intento de fusionar la teoría matemática relacionada con el concepto de transformación lineal y el uso de herramientas tecnológicas que

permiten la visualización de forma dinámica, con el fin de ofrecer una experiencia de aprendizaje enriquecida. En función de la herramienta teórica escogida para la valoración de estos applets, consideramos que en su diseño se satisfacen cada una de las facetas de la idoneidad didáctica, como fue referido en el applet presentado en la Figura 1, lo cual proporciona, a priori, un valor académico-didáctico a estos.

## 4.2. Descripción de la implementación de los applets en una clase

Durante una sesión de clases, se llevaron a cabo interacciones entre el docente y el estudiantado, en el momento de abordar el concepto de transformación lineal. El docente introdujo el concepto de transformación lineal y planteó preguntas dirigidas al estudiantado, que orientaran la discusión acerca de la interpretación geométrica de las propiedades de una transformación lineal. Más precisamente, el docente primero presentó la definición general de una transformación lineal. Luego, la discusión se enfocó en el caso de transformaciones lineales en el plano, tal y como se muestra en la Figura 5.

### Figura 5

*Definición de transformación lineal en el plano cartesiano.*

Recuerde que una transformación lineal en  $\mathbb{R}^2$  es una función  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

1.  $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$ , para todo  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,
2.  $T(\alpha(x_1, y_1)) = \alpha T(x_1, y_1)$ , para todo  $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  y para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Posteriormente, el docente planteó algunas preguntas al estudiantado acerca del efecto que se podría obtener al aplicar una transformación lineal a diferentes conjuntos del plano, tales como rectas, curvas, o regiones bidimensionales, generando interrogantes en el estudiantado.

Para el desarrollo de las actividades, el estudiantado trabajó en parejas, en este caso, cada pareja tenía al menos un dispositivo electrónico con acceso a internet, que podía ser una computadora portátil, o una tableta digital. El profesor les envió por medio de una carpeta digital el documento guía para desarrollar la clase, y simultáneamente lo iba mostrando en la pizarra mediante el uso de un proyector digital.

El primer concepto abordado fue el de transformación lineal en el plano, luego se desarrollaron varias actividades con GeoGebra, que permitieran visualizar algunas propiedades geométricas, así como la relación entre una transformación lineal y un subespacio, en este caso, del plano cartesiano. Las actividades abordaron los siguientes ejemplos:

- Transformaciones no lineales.
- Reflexiones respecto de los ejes cartesianos.
- Reflexiones respecto de una recta cualquiera que pasa por el origen.
- Composición de reflexiones.
- Rotaciones.

El docente estuvo siempre observando y controlando la actividad para evitar que algunas personas integrantes de los equipos no estuvieran colaborando con el desarrollo de las actividades. Al inicio de la clase, se presentó la definición formal de transformación lineal, sin embargo, como es usual al abordar este tema, la definición es abstracta y algebraica, por lo que se suele perder de vista el carácter geométrico. En este caso, esto puede provocar que el

estudiantado pierda de vista la relación entre el concepto de transformación lineal, y otros conceptos previos relacionados, como los vectores, los espacios vectoriales, su interpretación geométrica a partir de rectas y planos, descritas por medio de vectores directores y combinaciones lineales.

Una vez presentada la definición general, se iniciaron las actividades, comenzando con algunos experimentos sencillos. En esta primera actividad, se definía en GeoGebra la función  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $S(x, y) = (x^2, y)$ , para observar primero mediante algunos experimentos que esta transformación no es lineal. Se realizaron tres experimentos, en uno de ellos se solicitó: “Grafique en GeoGebra algunas curvas y su respectiva imagen bajo S.”

Seguidamente, se procedió a realizar otros experimentos con funciones que sí son transformaciones lineales, utilizando la definición a partir de la matriz de la transformación. El profesor inicialmente hizo la indicación para que las parejas de estudiantes escribieran las respectivas instrucciones en GeoGebra, en los dispositivos electrónicos, y mientras tanto verificó con cada pareja que estuvieran ejecutando la indicación. En algunos casos fue necesario dar algunas indicaciones adicionales para la escritura de los respectivos comandos. Una de las actividades se muestra en la Figura 6.

### Figura 6

*Actividades relacionadas con la reflexión respecto de los ejes coordenados.*

**Actividad 4.2** *Grafique en GeoGebra algunas curvas, y su respectiva reflexión respecto de los ejes  $x$  y  $y$ , mediante la multiplicación matricial.*

**Actividad 4.3** *Grafique la imagen del cuadrado de lado uno, bajo las reflexiones con los ejes, mediante la multiplicación matricial.*

Posteriormente, se extendió la construcción a reflexiones respecto de una recta arbitraria que pasa por el origen, mediante la construcción de la matriz de la transformación, sin embargo, en este caso se trabajó con una base apropiada, realizando luego el respectivo cambio de base. A partir de las dos actividades anteriores, el profesor preguntaba a los estudiantes acerca de los resultados, para establecer conjeturas respecto de la transformación de rectas, o figuras geométricas, en este caso un cuadrado, al ser aplicada una transformación lineal. La idea era que los estudiantes pudieran observar qué propiedades se preservan a través de la aplicación de una transformación lineal. Por ejemplo, que la imagen de una recta que pasa por el origen, bajo una transformación lineal, también es una recta que pasa por el origen, es decir, ambos son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^2$ .

De forma similar, se plantearon actividades para estudiar las rotaciones en el plano, definidas a partir de la construcción de la matriz asociada a la base canónica, esta es

$$[R_\theta]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

donde el subíndice  $\mathcal{C}$  se refiere a la matriz en la base canónica. En este caso, se plantearon actividades similares a las anteriores, para que el estudiantado analizara el efecto de la aplicación de estas transformaciones. Esto se presenta en la Figura 7.

## Figura 7

Actividades relacionadas con la reflexión respecto de los ejes coordenados.

**Actividad 4.13** Grafique en GeoGebra algunas curvas, y su respectiva rotación de ángulo  $\theta$  respecto del origen, y en el sentido contrario al de las agujas del reloj, mediante la multiplicación matricial.

**Actividad 4.14** Utilice el siguiente applet: <https://www.geogebra.org/m/teqn6mar>, elaborado en GeoGebra, para visualizar el efecto de la rotación en una imagen.

Al final de cada bloque, se presentaba el applet creado previamente, para que los estudiantes también pudieran observar el efecto de la transformación en una imagen digital, como generalización de los experimentos realizados previamente. Esta parte final permitió visualizar el alcance que tienen los conceptos matemáticos abstractos y concretos estudiados con anterioridad en actividades cotidianas, como reflejar o rotar una imagen, mediante una aplicación, y que esto se puede realizar a partir del concepto de transformación lineal, y la matriz asociada a una base. Es importante destacar que, en la mayoría de los casos, las parejas establecieron conjeturas adecuadas respecto del comportamiento de las rectas al aplicarse una transformación lineal, no obstante, no se profundizó en propiedades geométricas más específicas, como la preservación o modificaciones de longitudes o medida angular.

### 4.3. Descripción de la percepción estudiantil sobre los applets

En la aplicación del cuestionario sobre la percepción estudiantil participaron los 12 estudiantes que asistieron a la clase en la que se realizó la implementación de los applets diseñados. En la Tabla 1, se presentan las siete proposiciones incluidas en el cuestionario. Para cada proposición se muestra la frecuencia absoluta de respuestas en cada nivel de acuerdo, así como el nivel de acuerdo promedio y su desviación estándar.

**Tabla 1**

Percepción estudiantil sobre el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales. Estadísticas y distribución absoluta de niveles de acuerdo.

| Proposición  | Nivel de acuerdo |   |   |   |    | Promedio | DE   |
|--|------------------|---|---|---|----|----------|------|
|  | 1                | 2 | 3 | 4 | 5  |          |      |
| 1. Comprendo mejor el concepto de transformación lineal cuando puedo visualizarlo geoméricamente por medio de GeoGebra.  | 0                | 0 | 0 | 6 | 6  | 4.5      | 0.52 |
| 2. El uso de applets en GeoGebra me ayuda a determinar, en ciertos casos, cuando una transformación es lineal o no.  | 0                | 0 | 3 | 3 | 6  | 4.25     | 0.87 |
| 3. Al utilizar los applets en GeoGebra comprendo mejor cómo actúa la multiplicación de una matriz (de reflexión, contracción, expansión y rotación) en los puntos del plano. | 0                | 0 | 0 | 2 | 10 | 4.83     | 0.39 |
| 4. La utilización de recursos tecnológicos en el aula, por ejemplo, GeoGebra, facilitan mi proceso de aprendizaje en el tema de transformaciones lineales.                   | 0                | 0 | 0 | 0 | 12 | 5.00     | 0.00 |

|  |   |   |   |   |    |      |      |
|--|---|---|---|---|----|------|------|
| 5. El uso de recursos tecnológicos como GeoGebra es un buen complemento a las explicaciones teóricas en el tema de transformaciones lineales.  | 0 | 0 | 0 | 1 | 11 | 4.91 | 0.29 |
| 6. Es importante visualizar algunas aplicaciones de transformaciones lineales (en la medida de lo posible) y no solamente el estudio del cálculo con transformaciones lineales como tal. | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 5    | 0.00 |
| 7. El uso de GeoGebra para visualizar la acción de las transformaciones en el plano ha hecho que considere más importante aprender de transformaciones lineales y de álgebra lineal.     | 0 | 0 | 1 | 3 | 8  | 4.58 | 0.66 |

En general, las percepciones del estudiantado coinciden en una valoración positiva para el uso de los applets en el estudio de transformaciones lineales. En la Tabla 1 se observa que la mayoría de los participantes seleccionaron los niveles “de acuerdo” o “muy de acuerdo” en cada proposición. También se observa que en ningún caso fueron seleccionados los niveles inferiores de la escala. Asimismo, en todos los casos, el nivel de acuerdo promedio es mayor que 4 y la desviación estándar respectiva es menor que 1. Es decir, los estudiantes consideran que el uso de los applets favorece la comprensión de conceptos y procesos asociados a las transformaciones lineales y facilitan su aprendizaje complementando lo tratado de manera teórica.

En cuanto a cada una de las proposiciones, de forma unánime o casi unánime, los estudiantes estuvieron “muy de acuerdo” con tres proposiciones (4, 5, 6), las cuales se refieren a: complementar la teoría, facilitar el aprendizaje, visualizar aplicaciones. Por lo que, estos aspectos son los mejor valorados, respecto al uso de los applets para el estudio de transformaciones lineales.

Además, verificar si una transformación es lineal y valorar la importancia de aprender sobre Álgebra Lineal son los aspectos que los estudiantes consideran menos relevantes, en comparación con el resto de los aspectos. Esto es observado en las dos proposiciones (2 y 7) referidas a estos asuntos, las cuales muestran menor acuerdo en cuanto a su valoración positiva.

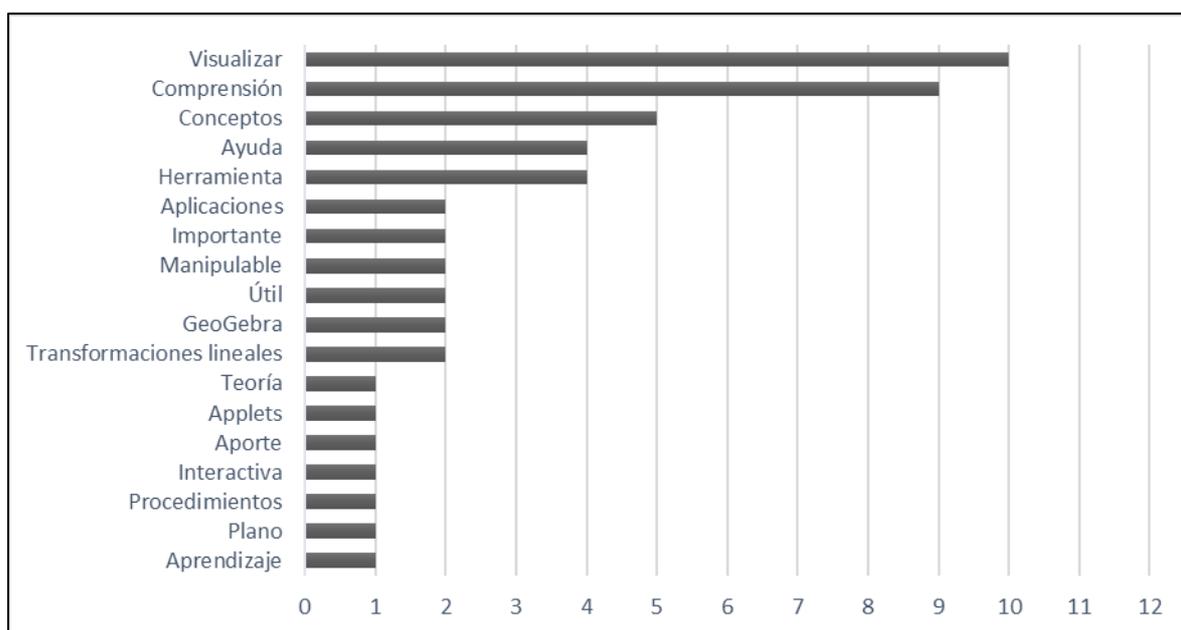
Por otro lado, en cuanto la pregunta abierta incluida en el cuestionario, las respuestas de los estudiantes se analizaron a través de la identificación de términos clave y el conteo de su frecuencia. En la Figura 8 se muestran los términos clave identificados y la frecuencia absoluta correspondiente a cada uno.

“Visualizar” y “Comprensión” fueron los términos mayormente señalados, seguidos de “Conceptos”, “Ayuda” y “Herramienta”. De manera que, la opinión más frecuente del estudiantado se relaciona con la manera en que la visualización, posibilitada por la herramienta tecnológica, ayuda a la comprensión, en particular de conceptos. Precisamente, dos términos, “Manipulable” e “Interactiva”, hacen referencia a cualidades que poseen los applets y que benefician la comprensión y el aprendizaje. En general, estos resultados coinciden con la valoración estudiantil altamente positiva sobre el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales que se refleja en la Tabla 1.

En resumen, la percepción del estudiantado sobre la implementación de los applets para el estudio de transformaciones lineales en el curso Álgebra Lineal fue positiva. Los estudiantes coinciden en que estas herramientas facilitan la comprensión y el aprendizaje de las transformaciones lineales, pues posibilitan la visualización, manipulación e interactividad, y actúan como complemento de la perspectiva teórica.

### Figura 8

Percepción estudiantil sobre el uso de applets para el estudio de transformaciones lineales.  
Distribución absoluta de términos clave.



#### 4.4. Análisis de idoneidad didáctica de la propuesta

La propuesta de diseño e implementación de applets en GeoGebra para el estudio de transformaciones lineales en un curso universitario de Álgebra Lineal se analizó con base en las facetas, componentes e indicadores de la noción de idoneidad didáctica dentro del marco EOS. Tal y como se ejemplificó en el apartado 4.1.1, los applets fueron diseñados teniendo como referente el posible desarrollo de cada una de las facetas de la idoneidad didáctica (Godino, 2013). En consecuencia, se analiza la idoneidad de la propuesta de acuerdo con cada una de las facetas descritas en el apartado 3.1.

##### 4.4.1. Idoneidad epistémica

El diseño de los applets se alinea con la idoneidad epistémica, ya que permite representar de manera visual y dinámica conceptos clave del álgebra lineal, como transformaciones lineales, reflexiones y rotaciones en el plano. Se observa que la propuesta incluye múltiples modos de expresión: verbal (explicaciones y definiciones), simbólica (representación algebraica de las transformaciones) y gráfica (visualización en GeoGebra). Además, en la implementación de los applets se promueven el uso de situaciones de interpretación y argumentación, pues los estudiantes deben analizar el efecto de las transformaciones en distintos objetos geométricos y verificar si cumplen con las propiedades de linealidad.

Asimismo, en el diseño de los applets se tomaron en cuenta conceptos relacionados y necesarios para el estudio de las transformaciones lineales. Entre ellos, se incluyen el concepto de función, espacio vectorial, multiplicación escalar, suma de vectores, igualdad de vectores y la definición formal de transformación lineal. Además, se consideró la propiedad  $T(0) = 0$ , la cual es de gran utilidad para determinar la no linealidad de una transformación. La

incorporación explícita de estos conceptos en las actividades del applet permite reforzar el significado de las transformaciones lineales y su relación con otros elementos fundamentales del álgebra lineal.

El applet sobre propiedades de una transformación lineal permitió verificar condiciones fundamentales, como aditividad y homogeneidad, proporcionando evidencia clara sobre cuándo una transformación es o no lineal. Los applets de reflexión y rotación refuerzan la conexión entre la teoría algebraica y la interpretación geométrica, favoreciendo la comprensión conceptual.

Aunque los applets incluyen conceptos fundamentales para la comprensión de las transformaciones lineales, permiten la exploración de la linealidad a través de sus propiedades e incluyen múltiples tipos de representación, podría mejorarse su idoneidad epistémica ampliando el conjunto de situaciones problema de aplicación presentados.

#### **4.4.2. Idoneidad cognitiva**

Desde el punto de vista cognitivo, la propuesta atiende la necesidad de conectar el nuevo conocimiento con los conocimientos previos de los estudiantes. Según Roa-Fuentes y Okaç (2010), el aprendizaje de transformaciones lineales requiere la comprensión previa de funciones, espacios vectoriales y operaciones como la combinación lineal. El diseño de los applets facilita este proceso al permitir la manipulación interactiva de estos conceptos, favoreciendo la construcción progresiva y significativa del significado de las transformaciones lineales.

La propuesta también considera la dificultad inherente a la abstracción del tema, ya que GeoGebra permite visualizar en tiempo real los efectos de las transformaciones. Esta característica ayuda a reducir la brecha entre la comprensión algebraica y su interpretación geométrica, lo que puede disminuir la carga cognitiva y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Aunque los applets permiten la manipulación interactiva e incluyen conceptos esenciales para la construcción del significado de las transformaciones lineales, su idoneidad cognitiva podría favorecerse incorporando actividades de refuerzo para los estudiantes con dificultades durante la implementación, como tutoriales adicionales o ejemplos guiados antes de la exploración libre.

#### **4.4.3. Idoneidad interaccional**

El diseño instruccional que incluye el uso de applets fomenta la interacción entre el docente y los estudiantes, así como el trabajo colaborativo entre pares. Durante la implementación, el docente planteó preguntas orientadas a la reflexión, promoviendo el diálogo y la formulación de conjeturas sobre el efecto de las transformaciones lineales. Además, se observa que la propuesta facilita la autonomía de los estudiantes, ya que los applets permiten la exploración individual y grupal sin depender exclusivamente de la instrucción del docente.

Asimismo, se tomaron en cuenta las dificultades del estudiantado en la comprensión de la definición de transformación lineal y cómo el uso de los applets puede contribuir a superarlas. Una de las principales dificultades consideradas está relacionada con la notación matemática, en particular con la interpretación de expresiones como  $T(v)$ , donde  $T$  representa una transformación y  $v$  representa un vector. Los estudiantes pueden experimentar confusión al

diferenciar entre vectores y escalares, especialmente al interpretar expresiones como  $au + bv$  (con  $u, v \in \mathbb{R}^2$ ), que representa un vector y no un número real.

El uso de los applets facilita la superación de esta dificultad, ya que permite visualizar la transformación de los vectores en tiempo real, aclarando que los objetos manipulados corresponden a elementos del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  y no a números reales. Al interactuar con las representaciones gráficas y observar cómo las transformaciones afectan a diferentes conjuntos de vectores, los estudiantes pueden construir una mejor comprensión de la notación y del significado conceptual de las operaciones involucradas en las transformaciones lineales.

El uso de GeoGebra también permite desarrollar evaluación formativa, ya que los estudiantes pueden contrastar sus conjeturas con la representación gráfica proporcionada por la herramienta. Esto posibilita la identificación y resolución de conflictos semióticos en tiempo real, favoreciendo el aprendizaje.

Aunque en la implementación de los applets se fomenta la discusión entre pares y el intercambio de ideas, la idoneidad interaccional puede favorecerse incorporando retroalimentación automática dentro del diseño de los applets. Por ejemplo, si un estudiante ingresa una transformación que no es lineal, el applet podría proporcionar una explicación detallada del error.

#### 4.4.4. Idoneidad mediacional

Desde el punto de vista mediacional, el uso de GeoGebra es pertinente, ya que proporciona un recurso visual e interactivo que complementa las explicaciones teóricas. La implementación en un entorno digital facilita la exploración autónoma de los conceptos y permite a los estudiantes experimentar con diferentes transformaciones sin limitaciones físicas o de tiempo.

El estudio de las transformaciones lineales no se aborda únicamente a través de la enseñanza tradicional mediante clases magistrales. Al incorporar los applets en la instrucción, se busca potenciar la idoneidad mediacional al permitir que los estudiantes manipulen directamente las representaciones gráficas y algebraicas de las transformaciones. Esto les brinda la oportunidad de incluir diferentes transformaciones en el applet y visualizar si cumplen o no con las condiciones de linealidad, por ejemplo.

Además, los applets permiten verificar empíricamente propiedades fundamentales, como el teorema  $T(0) = 0$ , mostrando que en toda transformación lineal la imagen del vector cero es el vector cero. Sin embargo, los estudiantes también pueden explorar casos en los que una transformación satisface esta propiedad, pero no es lineal, promoviendo así una comprensión más profunda de las condiciones necesarias para la linealidad. Este enfoque facilita el desarrollo del pensamiento crítico y fomenta la construcción de conocimiento a partir de la experimentación y la observación.

La planificación de las actividades en grupos favorece el acceso equitativo a los recursos, asegurando que todos los participantes puedan interactuar con las actividades propuestas.

Aunque los applets brindan una alternativa a la enseñanza magistral tradicional y se permite la experimentación libre y la exploración autónoma de conceptos, la idoneidad mediacional puede potenciarse agregando herramientas adicionales al diseño, tales como registro de respuestas y captura de imágenes.

#### **4.4.5. Idoneidad afectiva**

El análisis de la percepción estudiantil evidencia que los applets contribuyeron positivamente a la motivación y el interés por el aprendizaje del álgebra lineal. Los resultados del cuestionario muestran que los estudiantes valoran la visualización geométrica como un factor clave para la comprensión de los conceptos, destacando términos como "visualizar", "comprensión", "ayuda" e "interactiva".

La posibilidad de manipular dinámicamente las transformaciones y observar sus efectos en tiempo real parece haber generado una experiencia de aprendizaje más atractiva. Además, la percepción estudiantil refleja que la integración de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, facilita el proceso de aprendizaje y refuerza la confianza de los estudiantes en su comprensión del tema.

Aunque los applets permiten la visualización de conceptos abstractos, incrementando el interés y la motivación estudiantil, la idoneidad afectiva podría mejorarse incluyendo posibilidad de personalización de la experiencia (por ejemplo, elección de la representación visual), y elementos de gamificación (por ejemplo, indicadores de avance).

#### **4.4.6. Idoneidad ecológica**

El diseño e implementación de los applets se ajusta a las directrices curriculares y al enfoque por competencias del programa de estudios en el que se enmarca el curso de Álgebra Lineal. La propuesta promueve la innovación didáctica mediante el uso de tecnología, integrando herramientas digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además, se observa que los applets permiten establecer conexiones interdisciplinarias con otras áreas del conocimiento, como la geometría, facilitando una visión más integral del álgebra lineal. La adaptación de los contenidos a un formato digital también responde a las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas, alineándose con las demandas del contexto educativo actual.

Aunque los applets se ajustan a los lineamientos curriculares y fomentan la innovación en la enseñanza del álgebra lineal mediante el uso de tecnologías, la idoneidad ecológica se puede incrementar fomentando una mayor conexión con otras disciplinas (ingeniería, computación o economía).

### **5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DOCENTES**

Este estudio permitió diseñar e implementar applets en GeoGebra como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso universitario de Álgebra Lineal. La incorporación de la noción de idoneidad didáctica del EOS como base de la propuesta enriqueció tanto su diseño como su implementación, permitiendo analizar con más detalle los aspectos didácticos involucrados en su construcción y uso.

El análisis de la idoneidad didáctica indicó que los applets cumplen con criterios de adecuación al proceso educativo y favorecen una intervención efectiva en el aula. Desde una perspectiva epistémica y cognitiva, permiten representar conceptos clave a través de distintas formas de expresión y favorecen la conexión con conocimientos previos, promoviendo un aprendizaje progresivo y significativo. En el plano interaccional, su implementación posibilita tanto el trabajo colaborativo como la autonomía estudiantil, mientras que, en el plano

mediacional, constituyen un recurso tecnológico que facilita la exploración y la comprensión. A nivel afectivo, los estudiantes expresaron que los applets los motivaron y les ayudaron a comprender mejor los conceptos a través de la visualización y la interacción. Finalmente, en términos ecológicos, la propuesta se ajusta a los lineamientos curriculares y promueve el uso de herramientas digitales en la enseñanza del álgebra lineal. En conjunto, estos elementos sugieren que los applets en GeoGebra representan una estrategia didáctica con gran potencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Asimismo, a partir del análisis de los componentes de la idoneidad didáctica, se identificaron áreas de mejora que pueden potenciar aún más el impacto de estos recursos en futuras implementaciones. Entre las recomendaciones se encuentran: incorporar situaciones problema contextualizadas que permitan a los estudiantes explorar transformaciones lineales en escenarios reales; agregar retroalimentación automática dentro de los applets para ayudar a los estudiantes a identificar y corregir errores conceptuales; integrar estrategias de gamificación o personalización, aumentando la motivación y el compromiso; y explorar conexiones interdisciplinarias, ampliando la aplicabilidad de estos conceptos en otras áreas del conocimiento.

Los hallazgos de este estudio también tienen implicaciones importantes para la práctica docente en matemáticas, especialmente en la enseñanza del álgebra lineal, donde muchos estudiantes enfrentan dificultades debido a la abstracción, el formalismo y el uso de diversos significados y lenguajes matemáticos. En este sentido, este estudio reafirma la necesidad de adoptar estrategias pedagógicas que favorezcan la construcción activa de conceptos, permitiendo a los estudiantes desarrollar su comprensión a través del trabajo con los objetos y procesos matemáticos. La implementación de applets en GeoGebra en la enseñanza de las transformaciones lineales podría representar una alternativa didáctica que responde a estos desafíos, pues proporciona un entorno en el que los estudiantes pueden manipular, visualizar y explorar propiedades matemáticas de manera interactiva.

Desde la perspectiva del profesor de matemáticas, la integración de estas herramientas digitales implica una transformación en la enseñanza, donde el rol del docente evoluciona de expositor a facilitador del aprendizaje. En lugar de limitarse a explicar definiciones y procedimientos algebraicos, el docente puede generar un espacio en el que el estudiantado participa activamente realizando acciones implicadas en el uso de los applets.

Este estudio destaca la importancia de que los docentes desarrollen competencias en el uso de tecnologías digitales, no solo como apoyo complementario, sino como herramientas clave para transformar la enseñanza del álgebra lineal. Con una planificación adecuada, la integración de applets y otros softwares educativos podría fortalecer la interacción en el aula, mejorar la comprensión conceptual a través de la visualización y manipulación, y aumentar el interés de los estudiantes por el aprendizaje (Jiménez et al., 2023). De este modo, más que una propuesta de innovación, este estudio invita a reflexionar sobre la necesidad de seguir explorando y optimizando el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas en la educación superior.

Por último, es importante observar que, en este caso, las actividades se aplicaron una vez que ya se habían abordado algunos conceptos básicos relacionados con el tema, tales como la definición de transformación lineal, y matriz de una transformación lineal, pues el objetivo era profundizar los conceptos y proveer herramientas de visualización. Sin embargo, también se puede introducir el tema a partir de una actividad similar, para luego abordar los conceptos desde el punto de vista matemático. En ambos casos, debe quedar claro que ambas actividades

complementan el aprendizaje de los temas, y que el uso de GeoGebra y las actividades dinámicas de visualización no sustituyen el abordaje matemático necesario para la comprensión de los conceptos estudiados.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar, E. B. y Vázquez, P. R. Z. (2020). Estudio exploratorio de la comprensión del concepto transformación lineal en alumnos universitarios. En L. Hernández, G. Kantún y J. Sliko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática* (pp. 60-77). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Baki, A. (2015). Integration of Technology into Mathematics Teaching: Past, Present and Future. En S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. (pp. 17-26). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_2)
- BLEM (2017). *Plan de estudios de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica.
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de educação matemática*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141-178. [https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202\\_2](https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2)
- Camacho, G. y Oktaç, A. (2017). Exploración de una transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  el uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Mathematical Working Space* (pp. 253-266). University of Western Macedonia.
- Campos, M., Torres, A. y Morales, L. (2021). Geogebra como medio para identificar patrones en la clase de álgebra lineal: una propuesta concreta. *Revista Universidad y Sociedad*, 13(2), 528-537.
- De Benito, B. y Salinas, J. M. (2016). La Investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa. *RiiTE Revista interuniversitaria de investigación en Tecnología Educativa*, (0), 44-59. <https://doi.org/10.6018/riite2016/260631>
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (1997). L'algèbre linéaire: l'obstacle de formalisme à travers diverses recherches de 1987 a 1995. En J. L. Dorier (Ed), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en questions* (pp. 105-147). La Pensée Sauvage éditions.
- Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, R. D. Porter y A. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra* (pp. 85-106). MAA Notes
- Gallego-López, F., Granados-López, H. y Sánchez-Sánchez, O. (2018). Influencia del GeoGebra en la motivación y autorregulación del aprendizaje del cálculo y álgebra en universitarios. *Revista Espacios*, 39(17), 7-17.
- Gallo, H. G., Verón, C. A. y Herrera, C. G. (2019). Interpretación de transformaciones lineales en el plano utilizando GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (24), 32-37.

- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Gómez, B. M. (2018). *Elementos de estadística descriptiva*. EUNED.
- Jiménez, O. B., Oviedo, R. K, y Ramírez, J. J.(2023). Deduciendo aspectos de Cálculo Diferencial con GeoGebra: Una experiencia de aula. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (114), 135-147.
- Hernández, C. y Juárez, M. (2018). Satisfacción de los estudiantes en un curso propedéutico de matemáticas en e-modalidades. *Apertura*, 10(2), 6-19. <https://doi.org/10.32870/ap.v10n2.1384>
- Hernández, O. (2021). Aproximación a los distintos tipos de muestreo no probabilístico que existen. *Revista Cubana de Medicina General Integral*, 37(3).
- Karrer, M. y Santos, R. C. M. (2018). Núcleo, Imagem e Composição de Transformações Lineares: uma abordagem gráfica desenvolvida em ambiente computacional. *Research, Society and Development*, 7(10), 1-23. <https://doi.org/10.17648/rsd-v7i10.405>
- Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovation and sciences, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.
- Oktaç, A. y Gaisman, M. T. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *RELIME Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(4), 373-385.
- Ortega, P. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza del algebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE. *Revista complutense de educación*, 13(2), 645-675.
- Podevils, L. y Montenegro, F. (2021). Propuesta de enseñanza mediada por TIC en la asignatura Álgebra Lineal desde APOE: tesis de Maestría en carreras de Ingeniería. *UNIÓN-Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, 17(62), 1-17.
- Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 13(1), 89-112.
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.) *On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library* (pp. 209-246). Springer. [https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4\\_8](https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8)
- Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL*.