

Construcción del concepto de mediatriz de un segmento mediante una actividad en GeoGebra

Matías Augusto López Prego

Instituto Politécnico Nacional, México, mato.lopez77@gmail.com

Clara Mayo Juárez

Instituto Politécnico Nacional, México, cmayoj@ipn.mx

Juan Gabriel Molina Zavaleta

Instituto Politécnico Nacional, México, jmolinaz@ipn.mx

Resumen: *El documento muestra el trabajo de tres grupos conformados por cuatro estudiantes cada uno, de entre 12 y 13 años de una clase de matemáticas de primer año de secundaria. La actividad tuvo como objetivo que los estudiantes comprendieran la definición de mediatriz de un segmento a partir de una actividad efectuada en el software GeoGebra en la que fueron realizando distintas consignas y arribando a ciertas conclusiones para luego construir ellos mismos el concepto de mediatriz de un segmento.*

Palabras clave: *GeoGebra, concepto de mediatriz, constructivismo, aprendizaje significativo, TIC.*

Construction of the bisector concept of a segment through an activity in GeoGebra

Abstract: *This paper shows the work of three groups consisting of four students each, aged between 12 and 13, from a first-year high school mathematics class. The activity aimed to help students understand the definition of the perpendicular bisector of a segment based on an activity carried out in the GeoGebra software in which they carried out different instructions and arrived at certain conclusions to then construct the concept of the perpendicular bisector of a segment themselves.*

Keywords: *GeoGebra, bisector concept, constructivism, meaningful learning, ICT.*

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se percibe como un proceso complejo. La introducción de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la educación, junto con las herramientas informáticas, ha llevado a algunos educadores a abordar esta complejidad mediante la creación de propuestas pedagógicas. Estas propuestas buscan facilitar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, aprovechando las posibilidades ofrecidas por las TIC. Las propuestas constructivistas han sido centrales en transformar la enseñanza de las matemáticas. El constructivismo piagetiano en la enseñanza de matemáticas ve el aprendizaje como la adaptación constante de esquemas conceptuales frente a conflictos cognitivos derivados de la interacción en el aula, resultando en la construcción del conocimiento matemático. Según Ausubel et al. (1983), el aprendizaje significativo surge

cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva del sujeto, lo que puede dar lugar a la modificación o reestructuración del conocimiento. Por lo que el aprendizaje significativo no parte de cero sino de conocimientos previamente adquiridos. Las contribuciones de estos autores destacan la importancia de organizar y secuenciar los contenidos considerando los conocimientos previos del estudiante. En el aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan de manera sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Glasersfeld (1991, como se citó en Martínez, 1999, pág. 493) escribe sobre dos temas fundamentales del constructivismo, estos son:

- a) El conocimiento no es recibido pasivamente sino construido activamente por el sujeto de forma cognitiva.
- b) La función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica.

Brooks y Brooks (1993; como se citó en Antúnez, 2003, pág. 39) establecen cinco principios fundamentales para las aulas de clases constructivistas:

- a) Valorar los puntos de vista de los estudiantes.
- b) Desafiar las suposiciones de los estudiantes a través de actividades en el aula.
- c) Presentar problemas relevantes para los estudiantes.
- d) Construir lecciones alrededor de conceptos primarios e ideas principales, enseñando tanto el núcleo como los detalles de los conceptos.
- e) Evaluar el aprendizaje de los estudiantes diariamente en el contexto de la enseñanza, permitiendo corregir oportunamente el proceso de aprendizaje, en contraste con la evaluación al final de unidades o semestres, cuando sería difícil remediar resultados insatisfactorios.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, podemos pensar que todo conocimiento, incluido el matemático, se construye, en su totalidad o en parte, a través de un proceso de reflexión que es propio del estudiante por ser un incentivo para su involucramiento en el proceso de estudio. Este proceso implica la activación de las estructuras cognitivas de los estudiantes durante la construcción, ya que estas están en constante desarrollo, lo que lleva a una transformación de las ya existentes. En resumen, el aprendizaje implica una continua construcción del propio conocimiento por parte del estudiante.

2. OBJETIVO

Este trabajo tiene como objetivo mostrar cómo la secuencia didáctica propuesta, con determinadas consignas guiadas, ayuda al estudiante a construir por sí mismo o en grupo un determinado concepto. Una herramienta tecnológica mediadora para la realización de estas consignas es GeoGebra. A esta aproximación guiada haciendo uso de la herramienta tecnológica, en investigaciones sobre uso de tecnología en la enseñanza de la matemática, se le conoce como actividad exploratoria. Es un tipo de actividad matemática en la que se involucra a los alumnos. En este tipo de actividades se les dan indicaciones precisas a los alumnos con la intención de que cumplan los propósitos didácticos del profesor y no se pierdan en la amplia gama de ideas a las que los podría llevar la herramienta con actividades más abiertas y conceptuales (Zbiek et al., 2007). En determinadas ocasiones, por distintas causas, como es la falta de tiempo en los cursos o por ciertas características del grupo, los docentes enseñan una definición, concepto o alguna propiedad de manera expositiva en donde el conocimiento a enseñar se plasma en el pizarrón como algo acabado en el cual el estudiante no tuvo

participación alguna. De acuerdo con Espinoza (2023, p. 14), esta visión educativa ha sido llamada la “visita de las obras” o la “visita de monumentos” (Chevallard, 2013), en la que cada trozo de conocimiento aportado por grandes matemáticos de diferentes épocas debe ser venerado y mostrado en la doctrina de la enseñanza de las matemáticas. El estudiante recita una fórmula o un teorema sin saber el origen de este concepto matemático y mucho menos su aplicación en el mundo real. No existe la posibilidad de crear una relación real entre el estudiante y el conocimiento matemático. De esta manera, por lo mencionado antes en la introducción, el conocimiento enseñado no resulta significativo, ya que difícilmente lo han comprendido, por lo que en muchos casos el estudiante no lo recordará debido a que este no surgió de una interacción entre estudiantes o estudiantes y profesor. En cambio, usando el paradigma constructivista, el aprendizaje por parte del estudiante resulta mucho más rico ya que él mismo construyó el conocimiento que se deseaba enseñar.

3. FICHA DE TRABAJO ENTREGADA A LOS ESTUDIANTES

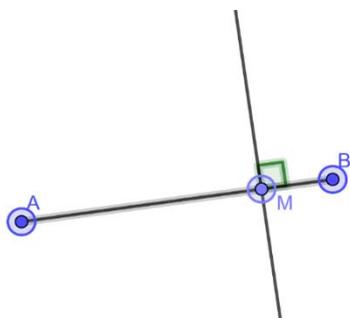
A continuación, se presentan las actividades que forman la ficha de trabajo que realizaron los estudiantes.

MEDIATRIZ

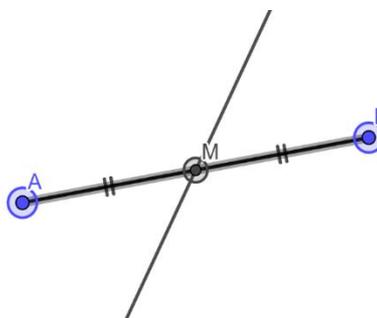
Actividad 1. Para realizar en GeoGebra:

- I. Deja la hoja en blanco, ocultando el sistema de ejes coordenados y la cuadrícula; y luego traza un **segmento** de recta de extremos A y B.
 - II. Selecciona la herramienta “**mediatriz**” y señala el segmento \overline{AB} .
 - III. Ubica un punto $P \in m_{Z_{\overline{AB}}}$ y mide las distancias \overline{PA} y \overline{PB} . Mueve los puntos anteriores (A, P y B) y escribe tus observaciones.
-
- IV. Marca el punto de **intersección** del segmento \overline{AB} con la $m_{Z_{\overline{AB}}}$ y llámale M a dicho punto. Señala los **ángulos** \widehat{PMA} y \widehat{BMP} (respetando el orden de los puntos). **Mueve** los puntos anteriores (A, P y B) y escribe tus observaciones.
-
- V. Define con tus palabras “mediatriz de un segmento” (de acuerdo a las conclusiones obtenidas).
-
- VI. De acuerdo con las observaciones realizadas y el concepto de mediatriz que escribiste. ¿Cuál de los siguientes casos corresponde a la mediatriz del segmento \overline{AB} ? Justifica tu respuesta.

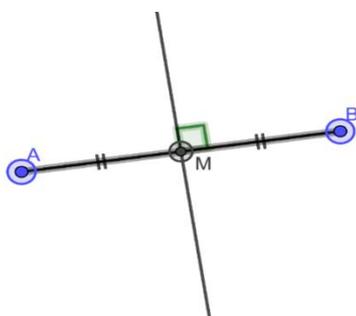
Caso 1



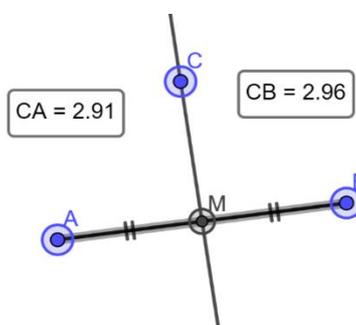
Caso 2



Caso 3



Caso 4



VII. Si se pide trazar la mediatriz de un segmento cualquiera utilizando útiles de geometría. ¿Puedes hacerlo? Y sin útiles de geometría, ¿Podrás realizarlo “lo más preciso posible”?

Las tareas en que se involucra a los estudiantes en la actividad 1 son, por un lado, que los alumnos propongan una definición de mediatriz con base en las tareas que atendieron al construirla; y por otra, verificar si los estudiantes después de realizar estas tareas pueden utilizar el concepto de mediatriz de un segmento.

4. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

Los estudiantes que participaron en la actividad tenían entre 12 y 13 años y estaban cursando el primer año de secundaria. El grupo estaba formado por 10 niñas y 11 niños. Es importante destacar que 4 niñas y 1 niño fueron finalistas en la olimpiada nacional de matemáticas y pertenecen al seleccionado nacional 2024, ellos 5 manejan un nivel superior al resto de la clase y además asisten horas extras a un taller de matemáticas.

5. DESARROLLO DE LA CLASE

5.1. Presentación del tema

La clase comenzó cuando los estudiantes se ubicaron en grupos y se le entregó la ficha de trabajo a cada estudiante en la cual iban a trabajar. El profesor comentó que iban a aprender el

concepto de mediatriz de un segmento pero que la idea de la clase era que ellos mismos investigando con GeoGebra puedan llegar al concepto de mediatriz. En ese momento cabe destacar que muchos estudiantes se entusiasmaron ya que desde primaria manejan el programa y les gusta trabajar en él. Algunos estudiantes (los que participan en las olimpiadas y dos estudiantes argentinos) ya conocían el concepto de mediatriz, pero el profesor los colocó en grupos distintos para apoyar a otros estudiantes. Estos estudiantes tomaron con seriedad y responsabilidad el rol que el docente les estaba dando.

5.2. Desarrollo del tema

Luego de entregada la ficha se les pidió a los estudiantes que leyeran la actividad 1. La primera consulta que el profesor hizo fue si entendían lo que se pedía en GeoGebra y el uso de comandos. La respuesta de los estudiantes fue afirmativa, todos entendían qué debían hacer.

El profesor procedió a leer para todo el grupo la actividad I y las preguntas que surgieron fueron:

- a) ¿Qué debemos observar?
- b) ¿Lo anotamos con nuestras palabras?
- c) ¿Lo discutimos como grupo y cada uno lo escribe en su hoja?
- d) ¿ $mz_{\overline{AB}}$ es la mediatriz del segmento \overline{AB} ?

A la pregunta a) se les contestó que leyeran lo que pedía la consigna y que realizaran las observaciones prestando atención a lo indicado.

A las preguntas b) y c) se les respondió que sí.

La pregunta d) la respondieron varios estudiantes diciendo que sí, mostrando que en el punto I al principio dice “mediatriz del segmento AB” y luego usa lenguaje simbólico. Luego de las preguntas se les indicó que, al finalizar las 7 consignas, se iban a revisar en forma oral, debatiendo las ideas de cada grupo y realizando una puesta a punto en el pizarrón.

Finalizando las explicaciones del docente a los estudiantes, trabajaron en forma autónoma.

El profesor no observó que los estudiantes tuvieran alguna dificultad al manejar el programa. Mientras los estudiantes realizaban la actividad 1, el profesor recorría los grupos para ver cómo iban trabajando. En el punto III el profesor notó que un grupo al ubicar el punto P lo “animaban” por lo que el punto se movía solo, entonces les llamó la atención que el punto desaparece y vuelve a aparecer. El profesor procedió a preguntarles ¿por qué pensaban que sucedía esto? Una respuesta fue: “La mediatriz debe ser infinita por eso no termina nunca y el punto vuelve a aparecer para que puedas verlo de nuevo”. En el punto IV los estudiantes presionaban los puntos en el otro sentido y el programa les indicaba el ángulo cóncavo. El profesor soló les mencionó que leyeran bien cómo se deben indicar y los estudiantes no tuvieron mayores problemas. Si bien los estudiantes no recordaban cómo referirse al ángulo cóncavo le decían “el del otro lado” “el que le falta a 90° para ser 360° ”. En el punto V el docente comentó que la idea era que usaran las partes anteriores y escribieran una posible definición y que luego se iba a llegar entre todos a la definición formal. Se les volvió a pedir a los estudiantes de las olimpiadas que no resuelvan la tarea, sino que sólo guiaran a los otros integrantes del grupo. En el punto VII, el docente notó muchas dificultades al trazar la mediatriz sin útiles de geometría, pero no en cómo lo harían, sino en trazar una recta perpendicular. Es adecuado que los estudiantes sean capaces trazar la mediatriz sin útiles de geometría, debido a que, si lo hacen bien, están indicando saber que la misma pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular al mismo. La utilización de útiles no garantiza que manejen el concepto de

mediatriz ya que muchas veces pueden realizar el trazado y la recta no podría pasar por el punto medio o no ser perpendicular. La idea de ubicar el punto medio por aproximación y trazar la perpendicular fue la más usada por los estudiantes, la idea formar los 90° en algunos estudiantes no estaba clara. El profesor notó que varios estudiantes presentaban problemas motrices. Luego que todos los grupos terminaron la actividad 1, el profesor procedió a trabajar puntualmente con los puntos III, IV, V, VI y VII. Se estimaba que la actividad 1 requería un máximo de 25 minutos, pero llevó entre 30 y 35 minutos. Si bien el uso de la tecnología tiene sus ventajas, al ser estudiantes de 12 y 13 años trabajando en grupo en una computadora cada cierto tiempo se distraían abriendo páginas web o algunos archivos que encontraban. Las veces que el profesor los observó, les llamó la atención para que continuaran con la actividad. Esto se podría corregir teniendo instalado un programa en la computadora del profesor en la que pueda manejar las demás, permitiendo solo abrir el programa a trabajar.

5.3. Cierre de la clase, puesta a punto de las actividades y análisis de las mismas

Para el cierre de la clase convinieron en forma grupal los puntos trabajados.

En el punto III, al preguntar a los estudiantes acerca de sus observaciones, ellos dijeron cosas como:

- Estudiante 1: “La distancia no cambia”
- Estudiante 2: “No importa donde este el punto P, si está en la mediatriz la distancia entre P y A es la misma que entre P y B”
- Estudiante 3: “Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento”.

Ante la última afirmación de unos de los estudiantes, el profesor preguntó “¿Qué es equidistar?”, ante esta pregunta siete estudiantes respondieron “estar a igual distancia”. El grupo en su totalidad comentó que la última afirmación es la “más formal” matemáticamente hablando.

Figura 1

Respuesta del grupo 1 al punto III de la actividad 1.

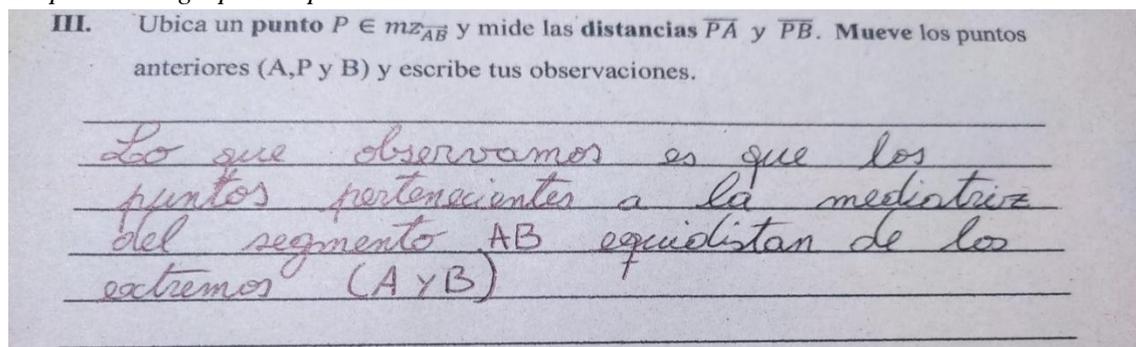
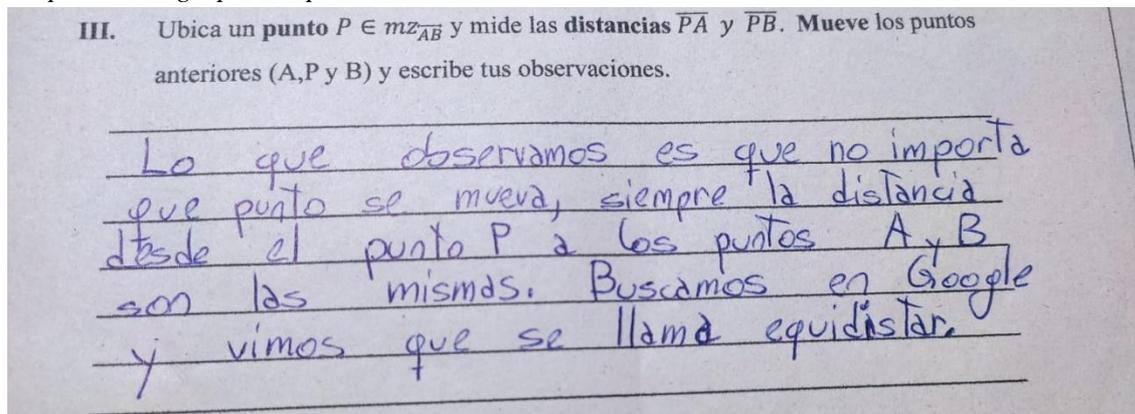


Figura 2

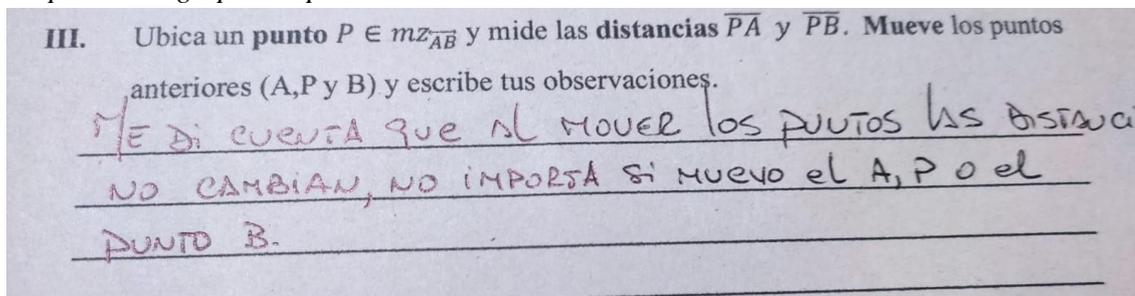
Respuesta del grupo 2 al punto III de la actividad 1.



El profesor para mostrar a los estudiantes lo que hizo el grupo que “animó” el punto P, compartió en el proyector la pantalla y les pidió que mostraran ese comando. Al presentar su construcción hubo muchas risas al ver que “desaparecía y aparecía” el punto P. La idea de que la mediatriz es infinita, que es una recta quedó en evidencia con la muestra de ese grupo. El profesor desconocía que los estudiantes conocían ese comando, resulto que sólo ese grupo lo conocía y el docente consideró oportuno mostrarlo en clase. En las figuras 1, 2 y 3 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 3

Respuesta del grupo 3 al punto III de la actividad 1.



Por las tres imágenes, se puede apreciar que los estudiantes lograron concluir lo que se esperaba en el punto III. Algunos estudiantes manejaban el concepto de equidistar y otros lo buscaron en Google. Ante la consulta del profesor acerca de la búsqueda, los estudiantes mencionaron que habían escuchado una palabra que hacía referencia a “estar a igual distancia” y por este motivo decidieron buscarla.

En el punto IV, cuando el profesor preguntó acerca de sus observaciones, ellos dijeron:

- Estudiante 1: “Siempre son rectos”
- Estudiante 2: “Siempre se forman 90° grados”
- Estudiante 3: “La mediatriz forma 90° con el segmento”
- “La mediatriz es perpendicular al segmento”

Al ser consultados por el profesor sobre estas afirmaciones, todos los estudiantes dijeron que todas eran correctas pero que la “más matemática” era la última. En las figuras 4, 5 y 6 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 4

Respuesta del grupo 1 al punto IV de la actividad 1.

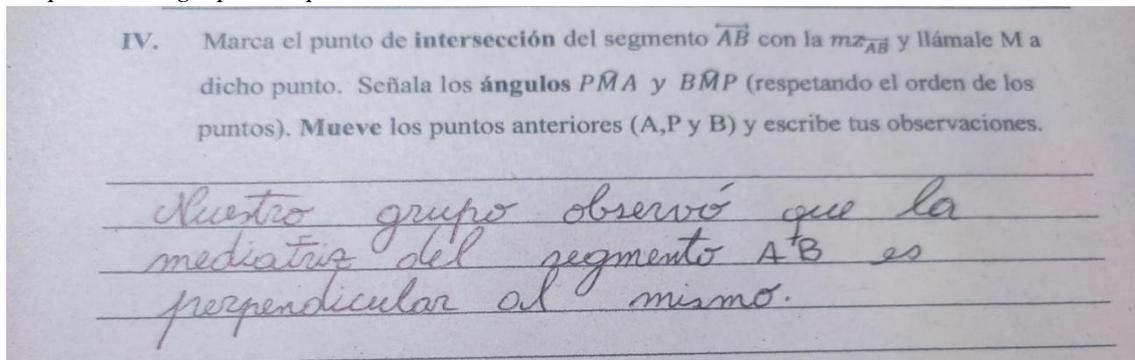


Figura 5

Respuesta del grupo 2 al punto IV de la actividad 1.

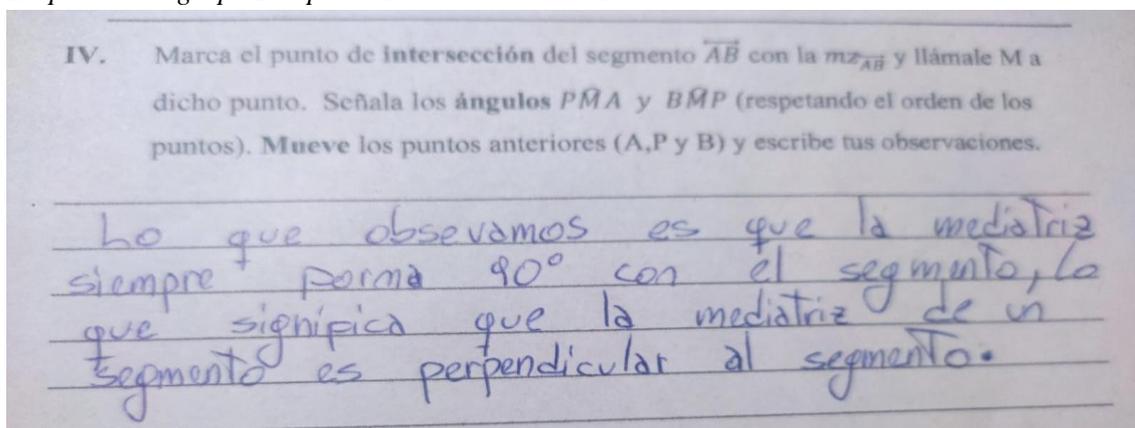
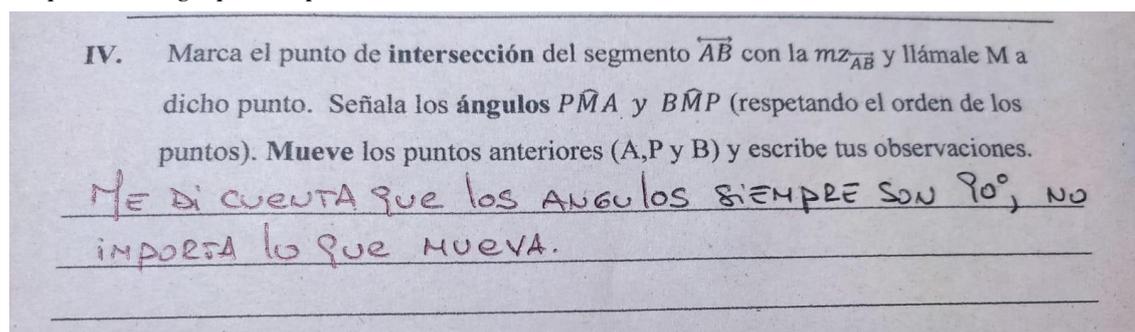


Figura 6

Respuesta del grupo 3 al punto IV de la actividad 1.



Por las tres imágenes, se puede apreciar que lograron concluir lo que se esperaba en el punto IV.

La idea de esta consigna era observar que la mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo, si bien se puede ver en las imágenes redacciones más formales que otras, se aprecia que la idea de perpendicular está clara. Ambos puntos, el III y el IV, van a servir para el punto V que se detallará a continuación.

En el punto V, cuando el profesor preguntó acerca de sus observaciones, ellos dijeron:

- Estudiante 1: “La mediatriz pasa por la mitad y forma 90° ”

- Estudiante 2: “Es una línea que forma 90° y pasa por el punto medio”
- Estudiante 3: “Es la recta perpendicular al segmento por su punto medio”
- Estudiante 4: “Es un segmento que corta al segmento original a la mitad y es perpendicular”

El docente se detuvo a analizar estas respuestas mencionando ciertos detalles. Ante la segunda afirmación se le consultó acerca de la palabra “línea” y de inmediato el estudiante que dijo “línea” se corrigió afirmando “línea recta”. Con respecto a la última afirmación, el docente les preguntó a los estudiantes “¿les parece que la mediatriz es un segmento?” y ocho estudiantes mencionaron que al trazar la mediatriz en GeoGebra el programa trazaba una recta. Al mostrarse en el proyector el caso del grupo que usó el comando “animación” pudieron verificar que es una recta y eso mismo sirvió para corregir la palabra segmento y usar la palabra recta. Todos los estudiantes estuvieron de acuerdo en que la tercera afirmación era la correcta y además de anotarse en el pizarrón, debieron anotarla en su hoja. En las figuras 7, 8 y 9 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 7

Respuesta del grupo 1 al punto V de la actividad 1.

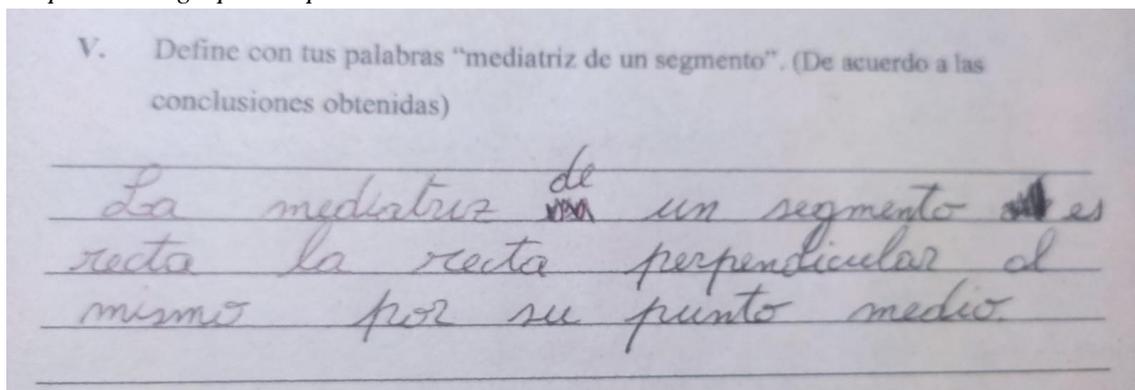


Figura 8

Respuesta del grupo 2 al punto V de la actividad 1.

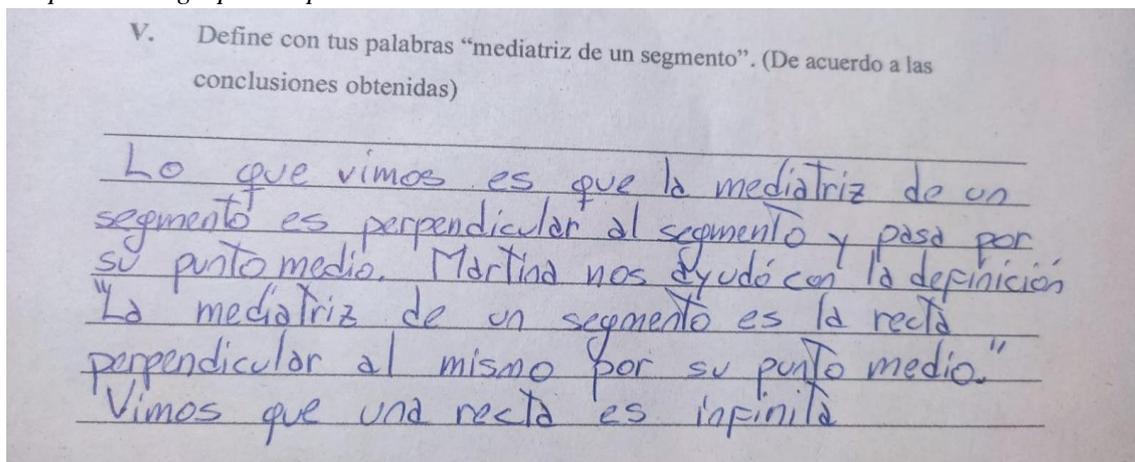
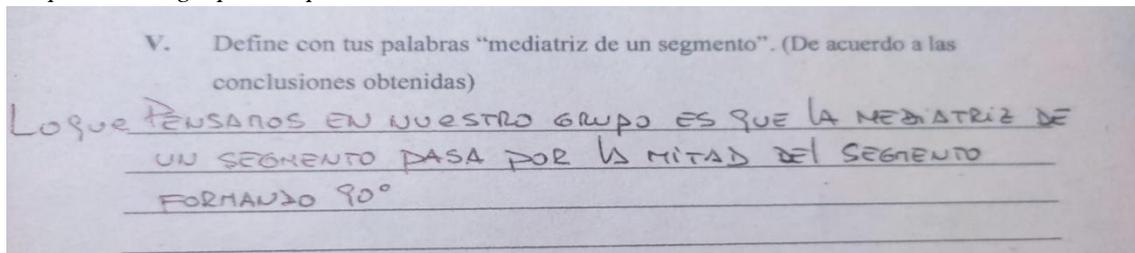


Figura 9

Respuesta del grupo 3 al punto V de la actividad 1.



Se puede apreciar en las tres imágenes que el concepto de mediatriz está presente en los estudiantes. En las figuras 8 y 9 es donde se aprecia el mismo con más formalidad. Los estudiantes estuvieron de acuerdo como dije anteriormente y además de anotar la definición en el pizarrón la copiaron en su cuaderno.

En el punto VI, cuando el profesor preguntó acerca de sus observaciones, ellos dijeron:

- Estudiante 1: "Es la tercera"
- Estudiante 2: "La primera y segunda no por lo del ángulo y la mitad"
- Estudiante 3: "Sé que la primera y segunda no, que la tercera sí es, pero no sé del cuarto caso"

Si bien todos los estudiantes estuvieron de acuerdo en que el primer y el segundo caso no eran correctos, y esto al docente le pareció muy bueno ya que la idea de que la mediatriz es perpendicular al segmento por su punto medio se entendió, el docente, al consultarle a los estudiantes acerca de la tercera afirmación, notó que fue la pregunta que menos participación tuvo. Menos de la mitad de los estudiantes levantó la mano para decir lo que pensaba y algunas respuestas fueron:

- Estudiante 1: "Lo de igual distancia no se cumple"
- Estudiante 2: "Por el punto III"
- Estudiante 3: "Por lo que dijo el grupo de equidistar"

Con esas respuestas en forma oral, gran parte de los estudiantes comenzaron a notar las observaciones del punto III y pudieron apreciar porque el cuarto caso no es correcto. En las figuras 10, 11 y 12 se muestran tres fotos de sus trabajos.

Figura 10

Respuesta del grupo 1 al punto VI de la actividad 1.

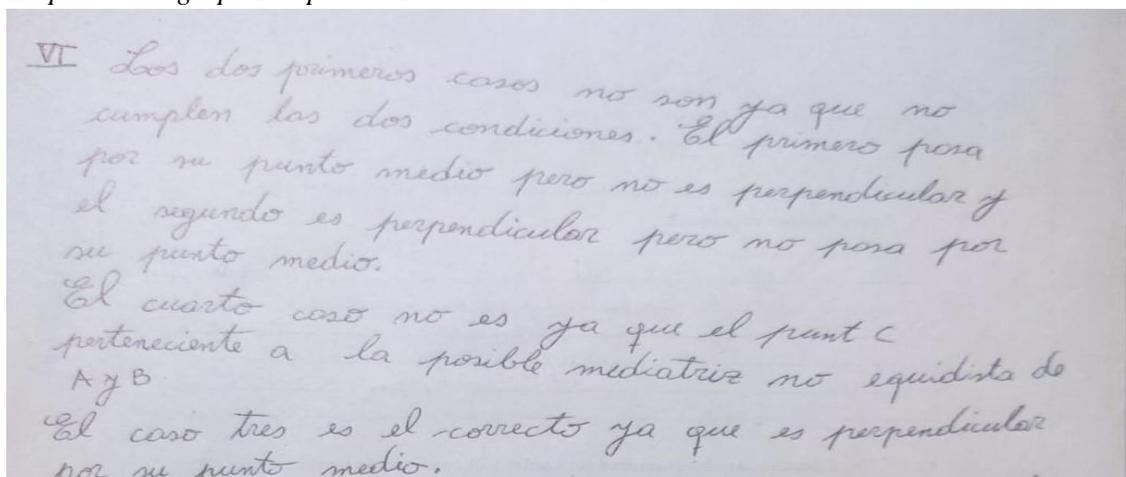


Figura 11

Respuesta del grupo 2 al punto VI de la actividad 1.

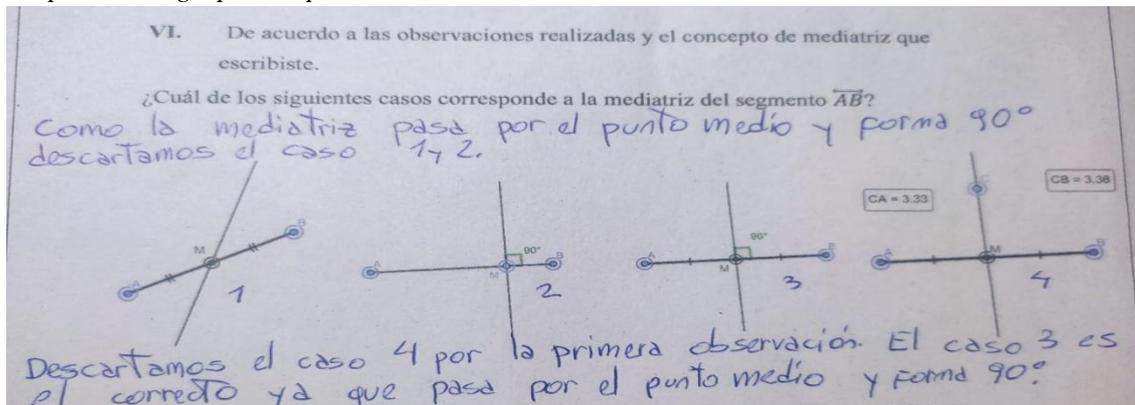
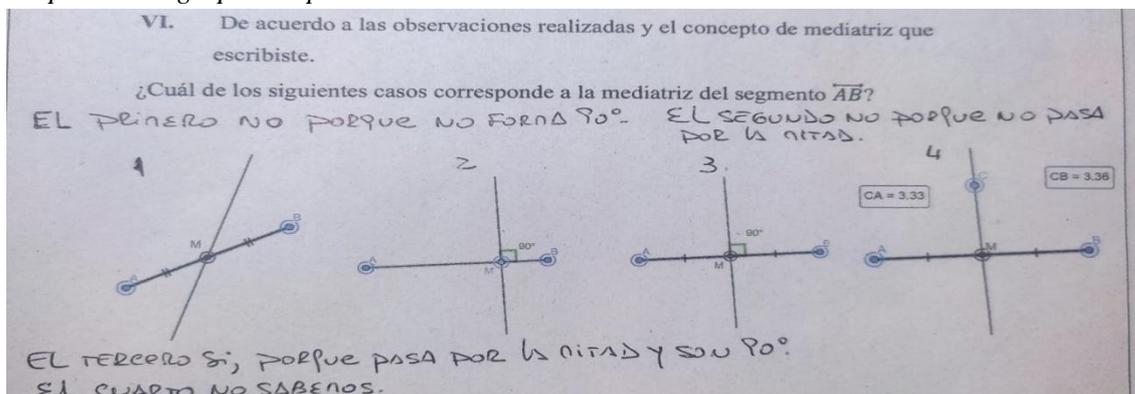


Figura 12

Respuesta del grupo 3 al punto VI de la actividad 1.



Por las tres imágenes, se puede apreciar que el análisis hecho por los grupos es correcto y es interesante ver como los casos 1 y 2 son descartados al haber realizado una aproximación donde no hay un ángulo de 90° en el caso 1 y no es el punto medio en el caso 2. El caso 4 no se puede realizar de esta manera. Cuando el docente pensó el caso 4 en GeoGebra trazó un ángulo de 91° , lo cual es muy difícil diferenciarlo con uno de 90° a simple vista, es por eso que el docente marcó las distancias con el fin de aplicar lo visto por los estudiantes en el punto III. En la figura 16, sucede algo similar salvo que el caso 4 no lo saben diferenciar. Un detalle por mencionar y que no parece menor es que un estudiante del seleccionado nacional de Matemáticas comenzó a intuir cierta idea de lugar geométrico al decir “el punto C está más cerca de A que de B, es por eso es que está de la mediatriz para el lado izquierdo” al decir eso hizo un gesto con las manos indicando la mediatriz con una mano y mostrando lo que sería un semiplano de borde la mediatriz. En este momento ya se estaba terminando la clase por lo que el docente no continuó con el punto VII ya que no se podría finalizar con el mismo. El docente comentó que el último punto de la actividad 1 lo iban a realizar los estudiantes en la siguiente clase y que podían investigar cómo trazar la mediatriz de un segmento.

6. COMENTARIOS FINALES

Si bien el docente no pudo trabajar todo lo pensado, que era trabajar con los siete puntos y terminar trazando la mediatriz de un segmento, se piensa que la idea de mediatriz quedó clara, la propiedad que dice que “los puntos pertenecientes a la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos de este” también.

Teniendo en cuenta lo mencionado en la introducción se puede apreciar que la interacción en el aula entre estudiantes y docente llevó a que se comprenda el concepto de mediatriz de un segmento por lo que los estudiantes lo aprendieron. Esto no se debe solo a la interacción mencionada, sino también a que este tipo de propuestas buscan facilitar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, aprovechando las posibilidades ofrecidas por las TIC.

Se puede apreciar que varios puntos mencionados por Brooks y Brooks (1993; como se citó en Antúnez, 2003, pág. 39) se reflejaron en el trabajo propuesto, por ejemplo: valorar los puntos de vista de los estudiantes, desafiar las suposiciones de los estudiantes a través de actividades en el aula y presentar problemas relevantes para los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antúnez, H. N. (2003). *La efectividad de la enseñanza constructivista de la aritmética y álgebra en el bachillerato* (Tesina de Licenciatura). Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Investigación Técnica, Chilpancingo.
- Ausubel, D., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.
- Chevallard, Y. (2013). *Journal du Seminaire TAD/IDD*. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.
- Espinoza, Y. (2023). *Diseño de una actividad de modelización matemática para la clase de Cálculo. El caso de la construcción de una barda semi-perimetral* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN.
- Martínez, A. (1999). Constructivismo radical, Marco teórico de investigación y enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 493-502.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W. y Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In K. Lester Frank (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 1169–1207). IAP.