Las matemáticas escondidas en el juego del SET

Bruno Castro Conde
Alumno de ESTALMAT, *brucascon@gmail.com*

Resumen: *Las matemáticas están presentes en nuestra vida cotidiana. El SET es un juego de cartas, aparentemente sencillo, en el que podemos encontrar muchas matemáticas; desde combinatoria o congruencias, hasta una interpretación geométrica del juego que he realizado con GeoGebra. Os invito a que las descubráis.*

Palabras clave: *probabilidad, combinatoria, juego, GeoGebra, congruencias, SET.*

The hidden mathematics in the SET game

Abstract: *Mathematics is undoubtedly present in our daily lives. SET is a card game, apparently simple, in which we can find a lot of mathematics. From combinatorics or congruences, to a geometrical interpretation of the game that I have made with GeoGebra. I invite you to discover them.*

Key words: *probability, combinatorics, game, GeoGebra, congruence, SET.*

1. INTRODUCCIÓN

El SET es un juego de cartas creado en 1974. Este juego de percepción visual consiste en formar patrones. Se puede jugar de forma individual o en grupo. El objetivo del juego es encontrar patrones llamados “sets”, que definiremos más adelante. Mi interés por este juego proviene de distintos ámbitos: En primer lugar, en mi familia siempre se ha dado una situación que propiciaba el interés por juegos de mesa y de percepción visual. En segundo lugar, este juego en específico es uno muy conocido por aficionados a las matemáticas. Digo esto porque suele ser un juego recurrente en las sesiones de ESTALMAT, un proyecto dedicado a la detección y estimulación del talento matemático. Este hecho ha producido un aumento significativo en mi interés por las matemáticas, y al tener la oportunidad de elegir un tema de trabajo propio no me lo pensé dos veces.

2. OBJETIVOS

El objetivo de la exploración será el de ir trabajando distintas preguntas en cada una de las distintas variaciones del juego que se explicarán más tarde para después generalizar nuestra investigación. Entre las preguntas a las que iré contestando se encuentran:

- ¿Cuántas cartas tiene cada baraja según las características atribuidas?
- ¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?
- ¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?
- ¿Cuál es el mínimo número de cartas necesarias para que, siempre que se tome esa cantidad de cartas cualesquiera, haya mínimo una manera de que todas se puedan agrupar en sets sin que sobre ninguna?

Cómo citar: Castro Conde, B. (2025). Las matemáticas escondidas en el juego del SET. *Epsilon*, *119*, 91-109.

- ¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?
- ¿Existe solo un set posible para cada carta o pareja de cartas …?
- ¿Existe una visión geométrica del juego?

¿Cómo funciona una partida de set?

En el juego convencional los jugadores se colocan alrededor del espacio de juego, a la misma distancia del centro para mantener una igualdad de condiciones, ya que el juego precisa tocar las cartas a menudo. En la preparación, un árbitro o uno de los jugadores colocará las cartas en el tablero, que es el lugar donde se posicionan las cartas, ya sea en una mesa u otro tipo de superficie. Se colocan 12 cartas, y cuando uno de los jugadores ve un set en el tablero debe decir en voz alta la palabra "SET", para después tocar las tres cartas que lo componen. Si el resto de jugadores lo consideren válido el set irá al mazo de cartas ganadas del jugador y se colocarán tres cartas nuevas en el tablero. Si el set no es válido, el jugador deberá "pagar" tres cartas de su mazo y las cartas que había tocado regresarán a su lugar original. Si no se encuentra ningún set se colocan otras tres cartas junto con las que queden en la mesa y así sucesivamente hasta que haya un máximo de 21 cartas en mesa. El juego termina cuando se acaba la baraja.

Herramientas y programas utilizados

A lo largo de la exploración se utilizará el programa GeoGebra con el fin de expresar geométrica y espacialmente algunas cuestiones. No se utilizará ningún otro recurso digital.

En el juego original cada una de las cartas se definen por 4 características: cantidad, color, relleno y forma. Cada característica en una carta se presenta de 3 formas posibles distintas:

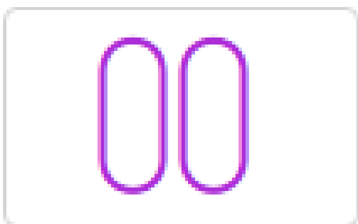
- Color de la carta: rojo, morado, verde.
- Cantidad de figuras en la carta: 1, 2, 3.
- Forma de las figuras: círculo, rombo, gusano.
- Relleno de las figuras: en blanco, liso, rayado.

Las cartas del Set tienen 4 características: color, número, forma y tipo de relleno.

En el caso de la Figura 1 son: color (morado), número (dos), forma (diremos, abusando del lenguaje, que es circular) y relleno (en blanco).

Figura 1

Carta del juego SET.



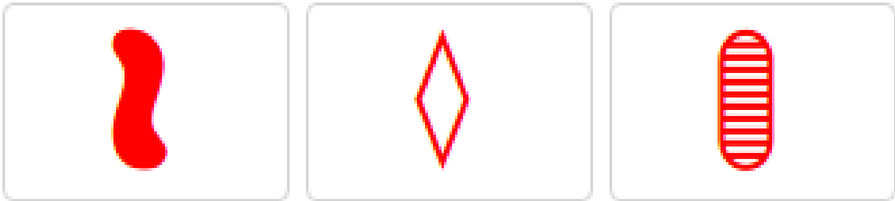
Es importante aclarar que no existen dos cartas iguales, es decir, cada carta es única de manera que, si nos basamos en el juego original, dos cartas distintas no pueden tener las mismas cuatro características.

¿Cuándo se forma un set?

Un set consiste en un subconjunto de tres cartas en el que las características, evaluadas una a una, son iguales en cada carta o diferentes en todas ellas. Por ejemplo, en la Figura 2 vemos un posible SET, ya que, en la variable del color, cada una de las cartas es de color rojo; en la cantidad de número, todas cuentan con solo una; y en las otras dos características, forma y relleno, las tres cartas difieren, por lo que se ha formado un SET.

Figura 2

Conjunto de cartas que forman un set.



Un ejemplo de un conjunto que no constituirá un set está en la siguiente imagen, ya que mientras que comparten la misma forma y distintos números, ya que no cumplen las normas para las características de color o relleno porque no son o todas iguales o todas diferentes.

Figura 3

Conjunto de cartas que no forman un set.

3. DESARROLLO DE LA EXPLORACIÓN

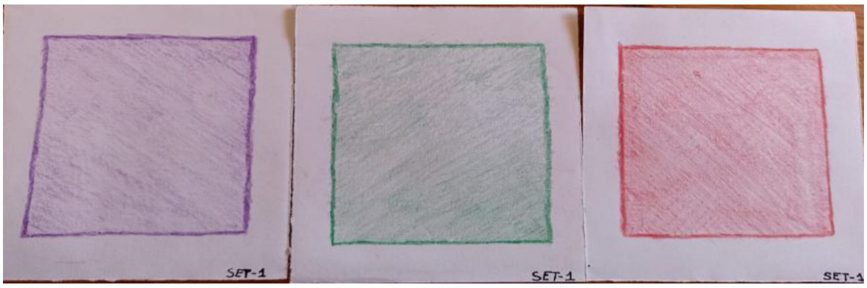
Para estudiar las matemáticas del juego vamos a plantear una serie de casos hipotéticos en los que las cartas se crean en función de otras características. En lugar del juego original, al que se llegará más tarde con sus 4 características, se partirá desde una baraja de cartas con 1, 2 o 3 características respectivamente con el fin de observar de manera más clara la posterior generalización a las preguntas previamente planteadas.

3.1. SET-1

¿Qué es un SET-1?

Llamaremos SET-1 a la baraja hipotética de cartas creada a partir de una sola característica, que puede tomar un valor entre tres distintas posibilidades. En la Figura 4 se observa una baraja de SET-1 donde la característica “color” es la única presente y toma valores verde, rojo o morado.

Figura 4
Baraja de SET-1 de elaboración propia.



¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?
Como hay una sola característica, entonces deducimos que las cartas no se pueden repetir en una baraja y como hay tres colores habrá tres cartas.

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?
De forma obvia cada carta puede formar parte de un único set.

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?
Se puede crear un sólo set, el que cuenta con las tres cartas de la baraja.

¿Cuál es el mínimo número de cartas [...] agrupar en sets sin que sobre ninguna?
En este caso, el mínimo número de cartas es de tres, la baraja al completo, ya que con menos cartas no se puede formar set alguno.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?
Aunque se pueda usar la fórmula de casos favorables / casos posibles, en este caso es trivial, hay un 100% de probabilidad, es decir, es el suceso seguro.

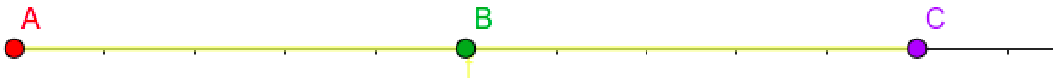
¿Existe sólo un set posible para cada carta o pareja de cartas?
Sí, en este caso para cada carta y pareja de cartas coincide la respuesta, ya que solamente hay uno posible.

Visión geométrica del juego:
La visión geométrica que podemos encontrar para esta baraja es una expresión de las cartas y sets en una dimensión (porque tiene una característica). Esta dimensión es una recta, y analíticamente realizaremos una función dándole un valor a cada carta para poder graficar el juego.

- Denotaremos al color rojo con un 0
- Denotaremos al color verde con un 1
- Denotaremos al color morado con un 2

Así, podemos expresar cada carta como un punto en una línea: los puntos serán C (0), C (1) y C (2). Si existe una línea que une a tres cartas se forma un set. En este caso la línea o set se ha expresado en amarillo en la imagen.

Figura 5
Recta del juego SET-1 de elaboración propia en GeoGebra.



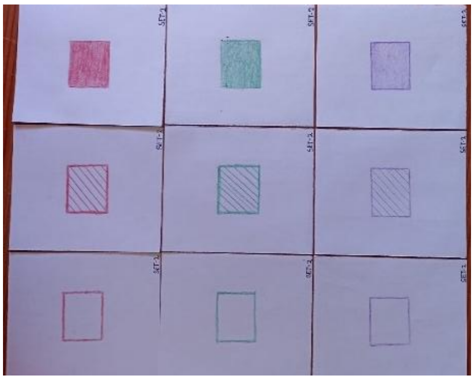
Para comprobar analíticamente que existe un set se pueden tratar módulos y congruencias, aunque en esta baraja no se hará por trivialidad.

3.2. SET-2

¿Qué es un SET-2?

Definimos SET-2 como el conjunto de cartas creadas a partir de las variaciones de dos características, que pueden tomar entre 3 distintas posibilidades cada una. Como podemos ver en la siguiente imagen, se toman como variables el color, que puede ser rojo, verde o morado; y el relleno, que puede adquirir un valor en blanco, rayado o liso. Se mantienen la forma y el número de las figuras (1 cuadrado).

Figura 6
Baraja del SET-2 de elaboración propia.



¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

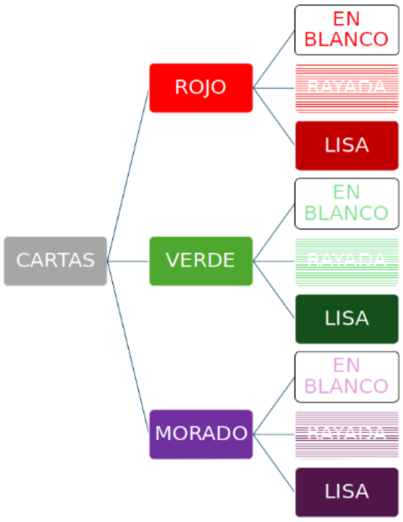
Como ahora existen dos características, las cartas no se pueden repetir en una baraja y cada carta toma 3 posibles valores, mediante combinatoria se puede calcular que hay

$$3 \text{ (colores)} \cdot 3 \text{ (formas)} = 9 \text{ cartas en la baraja}$$

Puede ser interesante verlo con un diagrama de árbol, como muestra la Figura 7. En el diagrama de árbol se observa de manera clara que cada carta puede tomar un valor en la característica “color” entre rojo, verde o morado. Una vez tomado este valor, cada carta se ha subdividido en tres categorías para la característica “relleno”: en blanco, rayada o lisa, pero manteniendo el color previamente adquirido. De esta forma se llega también a que en la baraja del SET-2 debe haber nueve cartas.

Figura 7

Diagrama de árbol de las cartas del SET-2.



¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta podrá formar parte de 4 posibles sets. Se toma una carta para su estudio, en este caso tomaremos el cuadrado relleno rojo. Expresemos entonces los 4 sets que existen.

Figura 8

Baraja del SET-2 con todos los sets posibles para una carta.

Los sets que se muestra en la Figura 8, están señalados en naranja, azul, verde y morado. Ninguna carta se encuentra en dos sets distintos, ya que cuando se parte del cuadrado lleno rojo y se elige otra carta (el cuadrado en blanco verde, por ejemplo), la tercera queda determinada, porque las características "color" y "relleno" son diferentes, con lo que la tercera será morada de relleno rayada.

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

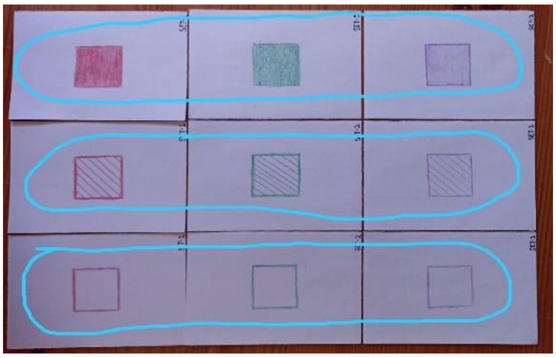
Si cada set tiene 3 cartas, mediante combinaciones y permutaciones se obtiene que para la primera carta hay 9 posibilidades, para la segunda hay 8 y la tercera queda determinada. Hay que tener en cuenta que el orden no importa y que estamos contando cada set 6 veces, por lo que habrá un total de:

$$\frac{9 \cdot 8}{6} = 12 \text{ sets distintos posibles.}$$

¿Cuál es el mínimo número de cartas [...] agrupar en sets sin que sobre ninguna?

Para que no sobre ninguna el número de cartas debe ser múltiplo de 3, ya que un set se forma con tres cartas, por lo que cualquier otra sobraría. Como las cartas son aleatorias, la única manera de controlar que se puedan hacer sets es coger la baraja al completo (las nueve cartas). En esta baraja, una posible distribución sería la siguiente:

Figura 9
Posible distribución de cartas en función de sets.



¿Cuál es la probabilidad de tomar tres cartas cualesquiera de una baraja y que formen un set?

En este caso la probabilidad de que tomando tres cartas cualesquiera se forme un set, será 1/7, ya que las dos primeras cartas son aleatorias e indiferentes, pero para la tercera carta solamente hay una posible para que se cumpla la condición de formación de un set entre los 7 restantes (no contaremos a las dos ya escogidas). Siguiendo la expresión de casos favorables entre los posibles, la probabilidad será de 1/7 o un porcentaje del 14,285714%.

¿Existe sólo un set posible para cada carta o pareja de cartas?

La diferencia entre el número de sets posibles para cartas o pareja de cartas aumenta, ya que cada pareja de cartas solamente creará un set, mientras que por la pregunta anterior se sabe que hay 4 sets posibles para cada carta.

Visión geométrica del juego:

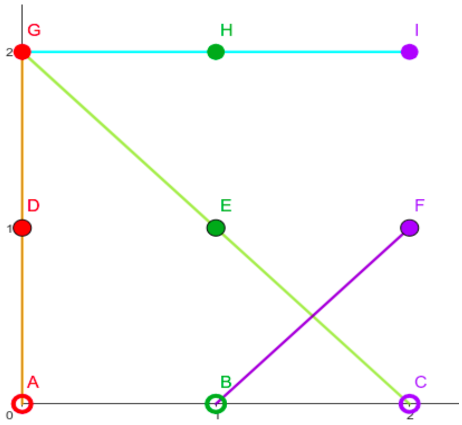
En este caso, la visión geométrica del juego y de los sets cambian, ya que existen dos características (color y relleno), con lo que al realizar el cambio para graficar las cartas cada variable tomará valores entre 0, 1 y 2, transformando el juego a dos dimensiones. Asignamos un valor a cada característica no mencionada antes.

- El relleno en blanco será 0,
- El relleno rayado será 1,
- El relleno liso será 2.

Así, podemos expresar cada carta como un punto en un plano en GeoGebra como muestra la Figura 10.

Figura 10

Gráfico del SET-2 en GeoGebra con los sets de la carta G. (Elaboración propia)



En la Figura 10 también se observan todos los sets de la carta G (roja y rellena) al igual que en la Figura 8. Analíticamente, un set se producirá si y sólo si el conjunto de tres puntos que se toma produce como resultado de su suma una congruencia con 0 en Z_3 para cada variable. Habría que sumar las componentes de los puntos individualmente. Tomemos como ejemplo los puntos G (0,2), B (1,0) y F (2,1). La suma por componentes será:

$$\Sigma x \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [2 + 0 + 1] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$

Por esto, tanto analíticamente como geométricamente, se cumple que para estas tres cartas existe un set. Sin embargo, si se toman las cartas G (0,2), H (1,2) y F (2,1), que se sabe que no forman un set, ya que:

$$\Sigma x \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [2 + 2 + 1] = 5 \equiv 2, para\ Z_3$$

En este caso, no se obtiene 0 en la suma de cada componente, y queda probado que no ocurre un set.

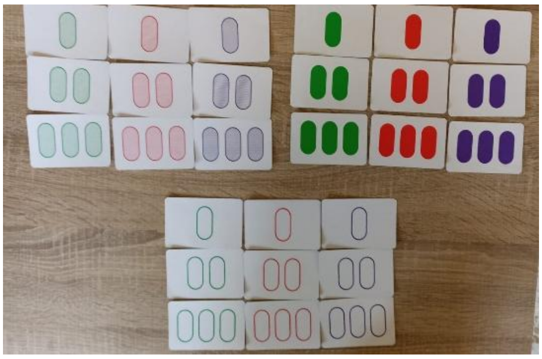
3.3. SET-3

¿Qué es un SET-3?

Se define el SET-3 como la baraja de cartas creada a partir de tres variables distintas. Además del color y el relleno, esta nueva baraja contará con la característica “número”, que puede cobrar un valor entre 1, 2 o 3 figuras. Para un SET-3 se mantendrá la característica “forma” asumiendo una forma circular para todas las cartas, como se muestra en la Figura 11.

Figura 11

Baraja de cartas de SET-3.



Se puede ver que, al igual que el SET-2 se podía formar con tres SET-1 distintos expresados en dos dimensiones, un SET-3 se formará a partir de la unión de tres SET-2 diferentes en su número de figuras que se expresan en otra dimensión. Estos SET-2 podrían ser los siguientes:

Figuras 12, 13 y 14

Distintos SET-2 en la baraja de SET-3.

¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

Como ahora existen tres características, las cartas no se pueden repetir en una baraja y cada carta toma tres posibles valores, mediante combinatoria se puede calcular que hay:

$$3 \text{ (colores)} \cdot 3 \text{ (formas)} \cdot 3 \text{ (número de figuras)} = 27 \text{ cartas en la baraja}$$

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta puede intervenir en 13 sets posibles. Tomamos una carta para estudiarla, con lo que existe un total de 26 cartas restantes en la baraja. Una vez se elige una segunda carta para realizar un set, por las características del juego la tercera queda determinada, y cómo sería indiferente tomar esta tercera carta como la segunda, ya que cada pareja de cartas sólo admite otra para formar set, existe entonces una cierta correspondencia en el juego.

Pongamos como ejemplo la carta de un círculo verde rayado. Si se elige una segunda carta (tres círculos rojos rellenos), la tercera queda determinada (dos círculos morados en blanco):

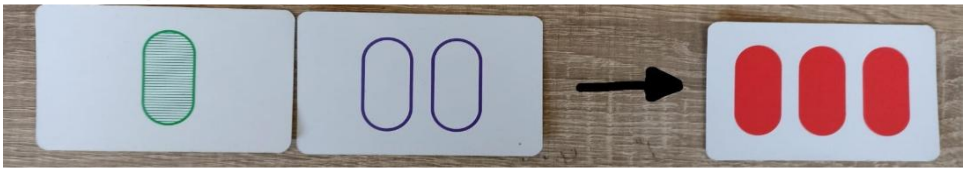
Figura 15

Grupo de 2 cartas que determinan una tercera.

Sin embargo, cuando se elige esta tercera como segunda (dos círculos morados en blanco), la tercera queda determinada de la misma manera que en la situación anterior (tres círculos rojos rellenos), con lo que existe una posible conmutación de las cartas. Además, tres cartas darán un set específico si y sólo si esas cartas son las mismas (es decir, dará igual el orden de estas, pero no habrá otras tres con las que se obtenga el mismo set).

Figura 16

Grupo de 2 cartas que determinan una tercera.



Entonces, para las 26 cartas restantes se obtendrá que existe un set por cada dos cartas de manera única. Por ello existirán

$$\frac{27-1}{2} = 13 \text{ sets distintos posibles para cada carta.}$$

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Cada set tiene tres cartas, con lo que se utilizará la fórmula combinatoria para el caso en el que no importa el orden y las cartas no se repiten. Para contar todos los casos entonces tenemos que

$$\frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

dónde m es el número de cartas en la baraja y n es el número de "huecos" a rellenar, que para todas las barajas será de dos porque un set se forma con tres cartas y la tercera siempre queda determinada por las 2 anteriores, con lo que existirán:

$$\frac{27!}{(27-2)! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25!}{25! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 27 \cdot 13 = 351 \text{ sets distintos}$$

En este número hemos contado tres veces cada set, ya que para la fórmula no se han tenido en cuenta las permutaciones que pueden existir con las tres cartas, sólo con dos de ellas, por lo que el resultado final de los sets distintos creados con esta baraja será de:

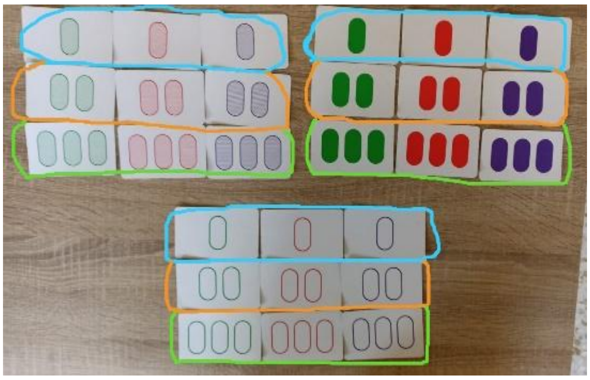
$$\frac{351}{3} = 117 \text{ sets distintos para esta baraja.}$$

¿Cuál es el mínimo número de cartas no nulo [...] en sets sin que sobre ninguna?

Siguiendo el razonamiento expresado en el SET anterior, y sabiendo que este número deberá ser múltiplo de 3, debido a que las cartas son aleatorias y se debe cumplir siempre, sólo existirá un caso en el que estas condiciones se den: con las 27 cartas. En esta baraja, una posible distribución sería la siguiente:

Figura 17

Posible distribución de las cartas del SET-3 en función de los sets.



En este posible caso la distribución se ha realizado sistemáticamente manteniendo en todos los sets el relleno y el número de figuras, pero variando el color en ellos.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?

$$\frac{CASOS\ FAVORABLES}{CASOS\ POSIBLES} = \frac{1}{27-2} = \frac{1}{25} = 4\%$$

Al igual que en la baraja anterior, se sabe que las dos primeras cartas que se escojan son irrelevantes al set, pero la tercera queda determinada por ambas cartas. Con el ejemplo de la Figura 15 se observa de manera sencilla. Las dos primeras cartas son irrelevantes por sí solas, y es la tercera la que crea el set, por lo que la probabilidad será de una carta (2 círculos morados en blanco) entre las 25 cartas restantes que quedan en la baraja (las dos que ya se han elegido no se encuentran dentro de la baraja porque en un set no hay repetición posible). Se puede observar un patrón en la probabilidad de que estas tres cartas formen un set, ya que se aprecia una disminución considerable respecto a las otras barajas, y parece que la probabilidad conforme se toma un número mayor de características tiende a 0 en el infinito.

¿Existe sólo un set posible para cada carta o pareja de cartas?

Esta pregunta no será contestada de nuevo de ahora en adelante porque como ya se ha demostrado, para cada pareja de cartas solamente existirá un set posible siempre, mientras que en función de la baraja hipotética que se coja (SET-1, SET-2, SET-3, …), una única carta tendrá muchos más sets posibles. Es importante incidir en el hecho en este caso son 13, y si bien en la probabilidad de que al tomar tres cartas cualesquiera se da un patrón de disminución al aumentar las cartas de la baraja, en el número de sets que puede crear una carta se observa un cierto aumento progresivo respecto a las otras barajas.

Visión geométrica del juego:

En este caso, la visión geométrica del juego y de los sets vuelven a cambiar, ya que existen otra característica además del color y relleno, el número de figuras. Al realizar el cambio para graficar las cartas se transformará el juego a 3 dimensiones. Asignando un valor a cada característica no mencionada antes obtenemos que:

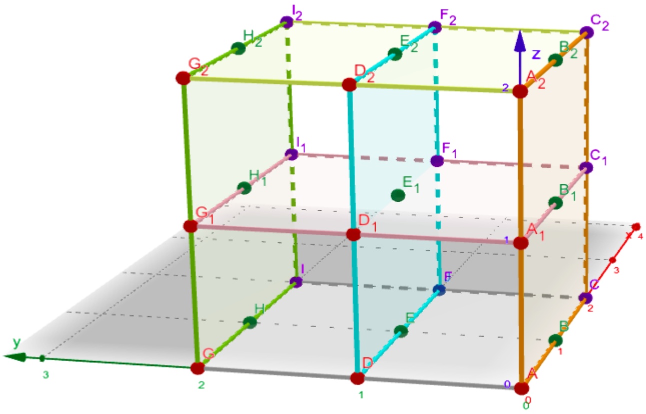
- Para un número de figuras 1 el eje z mostrará un punto en z=0

- Para un número de figuras 2 el eje z mostrará un punto en z=1
- Para un número de figuras 3 el eje z mostrará un punto en z=2

Así, podemos expresar cada carta como un punto en un espacio tridimensional de elaboración propia en GeoGebra, donde vemos una especie de cubo:

Figura 18

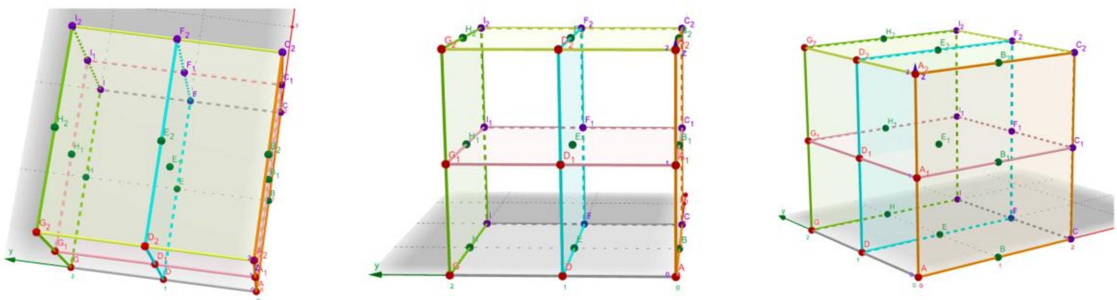
Espacio tridimensional del SET-3 de elaboración propia en GeoGebra.



En este espacio se han expresado todas las cartas en función de sus correspondientes coordenadas asignadas

Figuras 19, 20 y 21

Distintas vistas del espacio tridimensional del SET-3.



Las figuras muestran tres posibles vistas del cubo para comprender mejor la visión geométrica de SET-3. Además de los puntos también se expresan como planos (en Z_3) los que limitan con dos características a los puntos. Los planos de las Figuras 19, 20 y 21 coloreados en amarillo, rosa y gris tienen por ecuación z=0, 1 ó 2 y muestran un SET-2 en el que sólo varía el color o el relleno. Los planos verticales verde, azul y naranja, (mantienen la coordenada del eje y constante), muestran un SET-2 en el que varía el color y el número de figuras. Faltan 3 planos que no se han graficado para comprender la naturaleza de la geometría con mayor facilidad, pero si se toman todos los puntos rojos, verdes o morados, se obtendrían 3 planos que mantienen la coordenada del eje x constante y varían el relleno y el número de figuras.

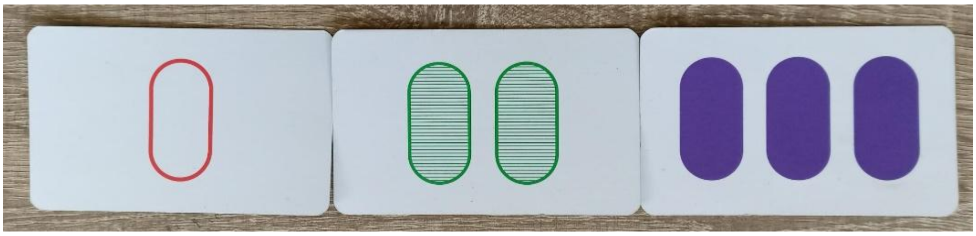
Resumiendo, un set se producirá si y sólo si el conjunto de tres puntos que se toma produce como resultado de su suma una congruencia con 0 en Z_3 para cada variable. Habría que sumar las componentes de los puntos individualmente para evaluarlo. Tomemos como ejemplo los puntos de la Figura 15: $E_0(1,1,0)$, $G_2(0,2,2)$ y $C_1(2,0,1)$. La suma por componentes será:

$$\Sigma x \rightarrow [1 + 0 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [1 + 2 + 0] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma z \rightarrow [0 + 2 + 1] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$

Por esto, para estas tres cartas se cumple que existe un set. Para ayudar de manera visual a ver un set en el espacio tomaremos las cartas $A_0(0,0,0)$, $E_1(1,1,1)$ e $I_2(2,2,2)$. En la realidad estas cartas son las siguientes:

Figura 22

Cartas físicas de los puntos elegidos.



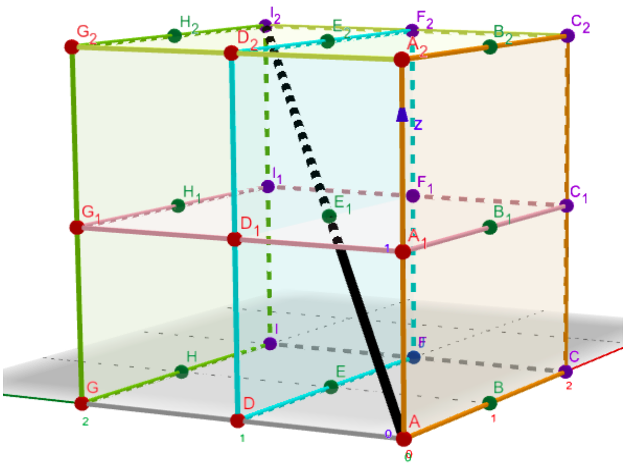
En todas las características difieren, así que se forma un set. Analíticamente se obtiene que

$$\Sigma x \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$
$$\Sigma z \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\ Z_3$$

Por lo que se cumple que existe un set. Por último, geométricamente también existe una línea recta que une a los tres puntos. Esta línea recta es infinita en Z_3, lo que a su vez confirma que para cada dos cartas existirá una sola tercera que complete el set.

Figura 23

Espacio tridimensional del SET-3 con el set formado por las cartas A_0, E_1 e I_2.



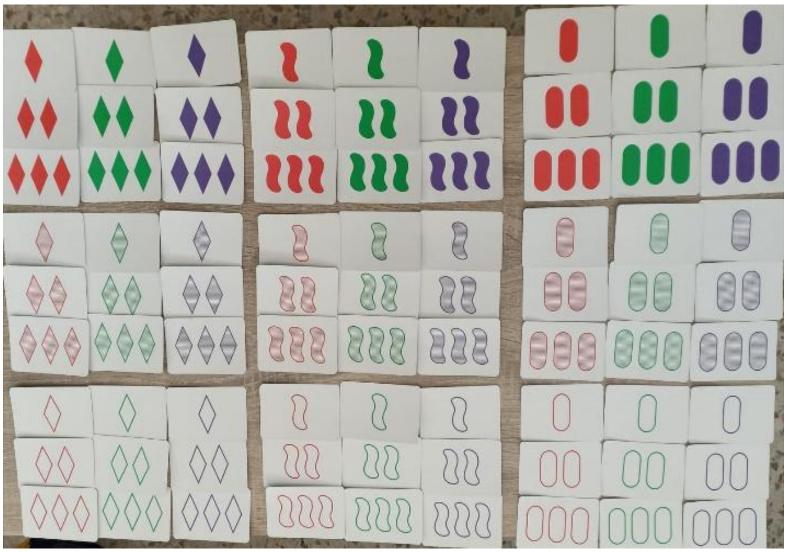
3.4. SET-4 / El juego original

¿Qué es un SET-4?

El juego original consta de cartas creadas a partir de variaciones en sus cuatro características: color, relleno, número de figuras y forma. No hay ninguna característica que se mantenga para el juego original (como en el SET-1, SET-2 o SET-3), sino que las 4 son variables.

Figura 24

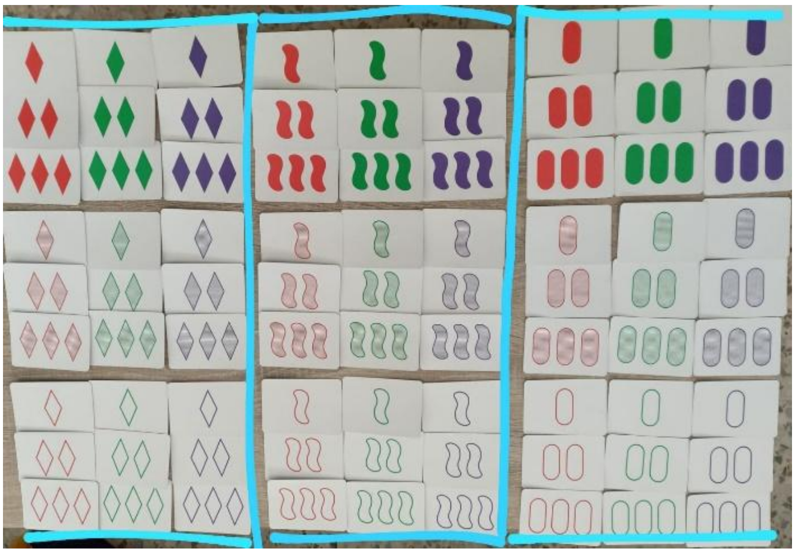
Baraja del juego original/SET-4.



El SET-2 se puede formar con tres SET-1 distintos expresados en otra dimensión, el SET-3 se forma a partir de la unión de tres SET-2 diferentes en su número de figuras que se expresan en otra dimensión. El juego original entonces serán tres SET-3 que varíen la forma.

Figura 25

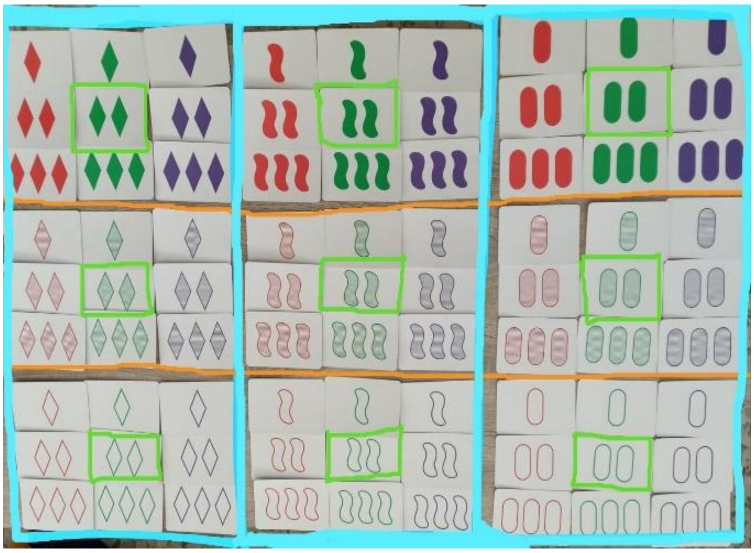
Baraja del SET-4 dividida en 3 sub-SET-3.



Además, como estos SET-3 pueden subdividirse en SET-2 de distintas maneras, el juego se puede reducir. Esta reducción es la que se ha tomado en consideración para trabajar las distintas matemáticas del juego desde la base más fundamental para después lograr comprender el juego al completo.

Figura 26

Subdivisiones de la baraja original en posibles SET-2.



En la imagen se pueden observar las tres barajas de SET-3 separadas por líneas azules, en las que las líneas naranjas crean otras subdivisiones para conformar posibles SET-2. Sin embargo, a pesar de que puedan parecer los únicos SET-2 por el procedimiento que se ha seguido, en verde se han rodeado cada una de las cartas que existen dos figuras verdes, y como hay dos características que varían (el relleno y la forma), se trata de un SET-2.

¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

Se puede ver en la imagen, existen 4 características que toman 3 posibles valores así que existen:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81 \text{ cartas en la baraja.}$$

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta podrá realizar 40 sets posibles. Como ya hemos explicado anteriormente en el SET-3, si se toma una carta de la baraja quedan 80 restantes, por las propiedades del juego ya mencionadas (la tercera carta siempre está determinada por una pareja, un set siempre es el mismo sin importar el orden, …), esta carta elegida podrá formar un set con cada una de las restantes, sets que se han contado dos veces.

Por ello, para cada una de las cartas de una baraja del juego original existirán

$$\frac{81-1}{2} = 40 \text{ sets posibles para cada carta.}$$

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Utilizando de nuevo la fórmula utilizada en el SET-3 pero tomando como consideración las repeticiones que se dan al contar todos los sets, el resultado final de los sets distintos que existan en la baraja original será:

$$\frac{m!}{3\ \cdot\ (m-n)!\ \cdot\ n!} \to \frac{81!}{3\ \cdot\ 79!\ \cdot\ 2!} = \frac{81\ \cdot\ 80}{6} = 1080$$

Existirán 1080 sets distintos en la baraja del juego original.

¿Cuál es el mínimo número de cartas no nulo [...] en sets sin que sobre ninguna?

Siguiendo el razonamiento expresado en los apartados anteriores, la única posibilidad de que esta condición se cumpla siempre será al tomar la baraja al completo.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?

$$\frac{CASOS\ FAVORABLES}{CASOS\ POSIBLES} = \frac{1}{81-2} = \frac{1}{79} = 0.0126582\ldots \approx 1{,}26\%$$

Visión geométrica del juego:

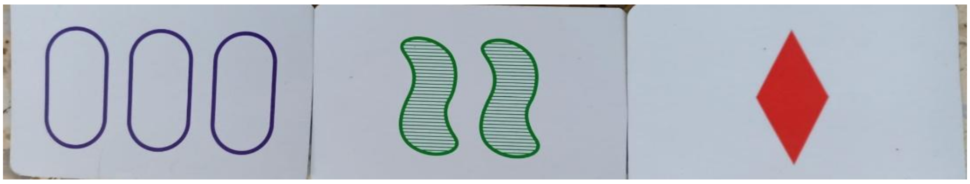
La visión geométrica para el juego original limita al observador a la hora de expresarla, ya que vivimos en un mundo de tres dimensiones (4 si se cuenta el tiempo), por lo que es difícil de explicar. En el SET-4 se sigue el mismo procedimiento que antes, y en un nuevo eje a 90 grados de distancia de los ejes x, y, z se mostrará la variable “forma”. Se asigna un valor a cada característica de forma, con lo que:

- Designaremos con un 0 a la forma circular.
- Designaremos con un 1 a la forma de gusano.
- Designaremos con un 2 a la forma de rombo.

No se expresará entonces de manera gráfica el SET-4 por las limitaciones ya comentadas con anterioridad. Se puede entender como 3 cubos que varían en el tiempo. Si se observa la Figura 18, en la que la forma círculo es constante, para un instante de tiempo específico todos los puntos serán círculos (cuando t = 0, por ejemplo). Si se espera, todos los puntos tendrán forma de gusano para t = 1 (no son instantes de tiempo reales, pero puede ayudar a visualizar la geometría del juego). Sin embargo, cuando t sea igual a 2, los puntos serán todos cartas con la característica forma en la variación rombo. Como todos los ejes están en Z_3, el eje del tiempo también lo estará, y como si fuera un ciclo o bucle después de t = 2 todas las cartas habrán adquirido la forma circular para empezar en t = 0 de nuevo.

Resumiendo, sí que se cumplirá que un set se produce si y sólo si la suma de los 3 puntos del conjunto resulta en una congruencia con 0 en Z_3 para cada variable. Se siguen sumando las componentes de los puntos individualmente. Tomaremos los puntos $P_1(2,0,2,0)$, $P_2(1,1,1,1)$ y $P_3(0,2,0,2)$. Este ejemplo tiene las siguientes cartas:

Figura 27
Cartas físicas de los puntos elegidos.



Analíticamente realizamos el estudio y obtenemos que:

$$\Sigma x \rightarrow [2 + 1 + 0] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma y \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma z \rightarrow [2 + 1 + 0] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$
$$\Sigma t \rightarrow [0 + 1 + 2] = 3 \equiv 0, para\, Z_3$$

Por lo tanto, para estas tres cartas se cumple que existe un set.

3.5. SET-N

¿Qué es un SET-N?

Una vez descritos todos los tipos de baraja hasta llegar a la baraja original se generaliza y se contestarán a las preguntas que han guiado la exploración para el SET-N. Este SET-N es la baraja que se crea para N características o dimensiones en cada una de las cartas. No entraremos a hablar en profundidad de las posibles barajas y sus implicaciones, sino que como curiosidad se tratará este tema contestando a las cuestiones base de la exploración. No obstante, es un campo sobre el que se invita a cualquier persona interesada a seguir indagando.

¿Cuántas cartas tiene la baraja en función de las características atribuidas?

Para N características, con la fórmula combinatoria correspondiente se obtiene que existen 3^N distintas cartas en la nueva baraja.

¿Cuántos sets posibles hay para cada carta?

Cada carta podrá realizar $\frac{3^N-1}{2}$ posibles sets, donde las explicaciones pertinentes quedan en los apartados anteriores.

¿Cuántos sets distintos se pueden crear con la baraja?

Utilizando la fórmula que se ha desarrollado a lo largo de la investigación se obtiene que:

$$\frac{m!}{3 \cdot (m-n)! \cdot n!} \rightarrow \frac{3^N \cdot (3^N-1)(3^N-2)!}{3 \cdot (3^N-2)! \cdot 2!} = \frac{3^N \cdot (3^N-1)}{6}$$

Existirán $\frac{3^N \cdot (3^N-1)}{6}$ sets distintos en una baraja de N características.

¿Cuál es el mínimo número de cartas no nulo [...] en sets sin que sobre ninguna?

Como hemos razonado anteriormente, la respuesta no varía por mucho que se aumente indefinidamente el número de características, ya que siempre será necesario tomar la baraja al completo, por lo que el número mínimo de cartas es 3^N.

¿Cuál es la probabilidad de que, tomando tres cartas cualesquiera de una baraja, estas formen un set?

$$\frac{CASOS\ FAVORABLES}{CASOS\ POSIBLES} = \frac{1}{3^N - 2}$$

La probabilidad tiende a 0 conforme N tiende a infinito, mientras que cuando N tiende a 0, la probabilidad es negativa, -1, lo que se presta a interpretaciones, pero en la práctica es una situación imposible, ya que una baraja debe tener al menos una característica para existir.

Visión geométrica del juego:

La visión geométrica para la baraja de N características es muy difícil de imaginar. Las nociones generales son que cada nueva característica toma tres valores diferentes en un nuevo eje que debe encontrarse a 90º de todos los demás ejes. El "espacio" a imaginar se encuentra relativamente confinado porque se encuentra en Z_3, así que cada nueva característica que se añada hasta llegar a N deberá relacionar cada variación con un número del 0 al 2.

De manera analítica no cambia el funcionamiento, sino que se pueden sumar las componentes de 3 puntos de manera individual. Si es congruente con 1 ó 2 en Z_3 no existirá set, mientras que si el sumatorio de todas las coordenadas es congruente con 0, sí que se producirá un set.

4. CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN FINAL

En el desarrollo de esta exploración se han llevado a cabo los objetivos planteados al inicio, ya que se ha analizado el trasfondo matemático del juego "set" a partir de las preguntas planteadas. Este método ha sido eficaz, ya que ha permitido conocer aspectos ocultos de las matemáticas en las que se sustenta dicho juego. Investigando los distintos casos hipotéticos y variaciones del número de características de las cartas se ha logrado conseguir una comprensión suficiente como para después lograr generalizar para un número indeterminado de características. Como se sospechaba, el juego posee una amplia base matemática que se ha tratado de poner en manifiesto en esta investigación.

Personalmente, no esperaba encontrar tantas matemáticas ocultas en el juego, y me han ido surgiendo preguntas al profundizar cada vez más sobre el "set". Por otra parte, el hecho aplicar conceptos y fórmulas matemáticas a un juego con el que he crecido me parece fascinante, porque verdaderamente me ha hecho darme cuenta de que las matemáticas están mucho más presentes en la sociedad y en la actualidad de lo que pensamos, no sólo en informática y teoría abstracta, sino también en este 'sencillo' juego de cartas. La teoría de juegos es una rama de las matemáticas muy atractiva precisamente por esta razón. Animo a cualquier lector a que trate de saciar su curiosidad y a que siga investigando, porque la curiosidad mueve el mundo y en la investigación se encuentra la base de nuestro conocimiento.

A lo largo de esta exploración se ha dejado alguna cuestión sin responder y sobre las que merece la pena indagar. Por ejemplo:

- ¿En qué medida se pueden comparar los SET-2 dentro de un SET-3 con los SET-1 dentro de un SET-2? ¿Es esta comparación válida para todas sus formas y SETS?
- ¿Cuál es el número máximo de cartas que pueden existir en una baraja para las que no pueda existir ningún set?

- Si las barajas admitieran repeticiones de las cartas, ¿cómo cambiarían las respuestas a las preguntas, así como el juego?

Se dan estas preguntas como una especie de guía, pero existen otras muchas esperando a ser contestadas.

En conclusión, los resultados de esta exploración matemática han sido claramente satisfactorios y han cumplido en gran medida con los objetivos que se buscaban alcanzar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Davis, B. L. y Maclagan, D. (2003). *The card game set*. https://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf

Goldberg, T. E. (2016). Algebra From Geometry in the Card Game SET, *The College Mathematics Journal*, *47*(4), 265-273.

Ibáñez, R. (2016). *Matemáticas en el juego de cartas set (1), Cuaderno de Cultura Científica*. https://culturacientifica.com/2016/06/15/matematicas-juego-cartas-set-1/

Pellegrino, G. (1971). Sul massimo ordine delle calotte in $S_{4,3}$, *Matematiche (Catania), 25*, 149-157.

Van Lint, J. H. y Wilson, R. M. (2001). *A course in combinatorics (2nd edition).* Cambridge University Press