89

Vol. 32 (1)
2015

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 89

Revista de Educación Matemática

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Utrerana de Ediciones, s.l.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

ISSN:
2340-714X

Período
1er cuatrimestre 2015

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

Sixto Romero Sánchez
Presidente
Francisco España Pérez
Vicepresidente
Mª Belén Sepúlveda Lucena
Secretaría General
José María Vázquez de la Torre Prieto
Secretario de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58 - Fax: 954 236 378
e-mail: **thales@cica.es**

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas
Campus del Río San Pedro, s/n
Torre Central, 4ª Planta
11510 Puerto Real (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 012 833
e-mail: **thales.matematicas@uca.es**

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial

CÓRDOBA

Marina A. Toledano Hidalgo (provis.). *Delegado provincial*

GRANADA

Margarita García Schiaffino
Delegado Provincial

HUELVA

Mª Rocío Benítez Cambra (provis.). *Delegada provincial*

JAÉN

Mª Eugenia Ruiz Ruiz
Delegada provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado provincial

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial

SUMARIO / CONTENTS

7 **INVESTIGACIÓN**

7 **Persistencia del razonamiento equívoco en álgebra. Una interpretación de su génesis escolar/Persistence of equivocal reasoning in algebra. An interpretation of its genesis scholar**
Eddie Aparicio, Martha Jarero, Landy Sosa e Isabel Tuyub (Universidad Autónoma de Yucatán)

19 **Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria/ Large numbers estimation problems in Primary education classroms**
Lluís Albarracín, Cristina Lorente, Antoni Lopera, Héctor Pérez y Núria Gorgorió (Universitat Autònoma de Barcelona)

35 **La aritmética comercial de Miguel Gerónimo de Santa Cruz/ The mercantile Arithmetic of Miguel Gerónimo de Santa Cruz**
María José Madrid (Universidad de Córdoba), Alexander Maz-Machado (Universidad de Córdoba) y Carmen López (Universidad de Salamanca)

49 **EXPERIENCIAS**

49 **Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico/Resolution of geometry problems with manipulatives or technological support**
Kaouthar Boukafri (Universitat Autònoma de Barcelona)
Miguel Ferrer (Universitat Autònoma de Barcelona)

67 **IDEAS PARA EL AULA**

67 **Propuestas de Innnovación para la clase de matemáticas/Innnovación proposals for math class**
María José Peña y María José Madrid (Universidad de Córdoba)

75 **Resolución de operaciones matriciales con papel/Resolution of matrix operations with paper**
Josué Francisco Gracia Rodríguez (Universidad de Córdoba)

79 MISCELÁNEA

79 **Alumnos de nuevo ingreso en ingeniería: un análisis de competencias matemáticas básicas/ undergraduates students in ingeneering: an analysis of the basic mathematics skills**
Ángel F. Tenorio Villalón, Ana M. Martín Caraballo y Sergio Bermudo Navarrete (Universidad Pablo de Olavide, Sevilla)

91 **500 años de Matemáticas en la Biblioteca del Hospital Real**
(Reseña: Maria Jose Madrid, Universidad de Córdoba)

Persistencia del razonamiento equívoco en álgebra. Una interpretación de su génesis escolar

Eddie Aparicio, Martha Jarero, Landy Sosa e Isabel Tuyub
Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen: *Se analiza la persistencia de raciocinios equívocos vinculados a dificultades y errores algebraicos correlacionados con lógicas procedimentales relativas a la linealidad, extrapolación de propiedades, generalización, entre otros; que deviene de causas asociadas al discurso matemático escolar, procesos cognoscitivos y la naturaleza de saberes algebraicos. Para el análisis se recabaron datos mediante un cuestionario aplicado a ingresantes a estudios superiores en las áreas de ingenierías y ciencias exactas en un periodo de siete años consecutivos. Se infiere que la presencia de raciocinios algebraicos equívocos entre los jóvenes da cuenta de un fenómeno didáctico de persistencia, cuyo origen puede deberse al discurso matemático escolar.*
Palabras clave: *Persistencia, razonamiento algebraico, fenómeno didáctico, didáctica de las matemáticas.*

Persistence of equivocal reasoning in algebra. An interpretation of its genesis scholar

Abstract: *The persistence of equivocal algebraic reasoning linked to such difficulties and errors is analyzed as a didactic phenomenon that comes from causes associated with scholar mathematical discourse, as well as from the cognitive processes and the nature of algebraic knowledge. For analysis data were collected algebra content applied, over a period of seven consecutive years, to higher education in the areas of engineering and exact sciences. It was possible to infer that the presence of equivocal algebraic reasoning among youth realizes a didactic persistence phenomenon, whose origin may be due to mathematical discourse school still in force nowadays.*
Keywords: *Persistence, algebraic reasoning, didactic phenomenon, mathematics education.*

PRESENTACIÓN

En Álgebra como en cualquier otra área del conocimiento matemático se reconocen dos modos de pensamiento asociados, el pensamiento procedimental y el estructural. Y aunque en algunos trabajos conste la sugerencia de iniciar la enseñanza del Álgebra con un sentido procedimental para transitar hacia uno estructural (Sfard, 1991; Kieran, 1992), cierto es que en la práctica educativa actual todavía es posible identificar una inclinación hacia lo estructural o semiestructural. Ello no debiera extrañar si se comparte el hecho de que para las comunidades académicas y científicas, lo axiomático estructural es inherente a la matemática y por ende, no solo comunicada y practicada en la escuela, sino adoptada por la sociedad en general.

Diversas investigaciones y experiencias didácticas han dado cuenta de lo poco funcional que resulta para los ámbitos escolares, materializar prácticas educativas bajo la lógica anterior (Aparicio y Cantoral, 2014; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001), pues se conduce a discursos escolares centrados en objetos por sobre prácticas de aprendizaje (Aparicio, 2012).

Ya en su momento Kieran y Filloy (1989), habrían indicado que el Álgebra no es una simple generalización de la Aritmética, requiere de un cambio de pensamiento, de transitar de modos “informales” de representación y resolución de problemas, a uno formal. Lo anterior plantea no solo pensar en epistemologías escolares alternativas donde lo aritmético antecede a lo algebraico solo en términos organizacionales, sino en el planteamiento de estudios que den cuenta de nuevas formas de interpretar y explicar los problemas de aprendizaje en Álgebra (Aparicio, 2012).

Christou y Vosniadou (2012) dejan ver cómo en el tránsito de un sistema aritmético escolarmente tratado de manera procedimental y concreta (con transformaciones que resultan en respuestas numéricas) a un sistema algebraico más estructural y abstracto donde las transformaciones corresponden a expresiones algebraicas y no a números específicos, se produce una “ruptura cognitiva” y un “corte didáctico” que da cuenta de una serie de dificultades y errores en el aprendizaje algebraico de los estudiantes.

De igual manera, en Kieran (1992), se comentaba que la serie de libros publicada en Inglaterra (NMP, 1987), ofrecía una propuesta de reorganización del contenido en los textos de Álgebra sobre la idea de desarrollos sucesivos de las nociones de letras como incógnitas específicas y luego como cantidades dadas en una sucesión que evoluciona gradualmente del proceso al objeto. En su opinión, ese tipo de propuestas indicaban formas en que el contenido algebraico podría ser presentado en las aulas con el fin de evitar diversas fallas al momento de su enseñanza, específicamente, cuando se emplean definiciones formales y estructurales. Algunas de esas fallas han sido ampliamente reportadas en la literatura especializada, aquí solo se referirán las asociadas al tipo de dificultades presentes en su aprendizaje y que tienen relación con el presente trabajo, por ejemplo, investigaciones en las que se aborda la tipificación de errores algebraicos; usos y significaciones asociadas a los símbolos y literales; tipos de obstáculos; el papel de las representaciones semióticas en el aprendizaje; formas de favorecer el tránsito de lo aritmético a lo algebraico; la dualidad de los objetos matemáticos y, procesos de desarrollo del pensamiento algebraico.

Épsilon, 2015, Vol. 32 (1), nº 89, 7-18, ISSN: 2340-714X

Un estudio relativo a la tipificación del error algebraico fue realizado por Matz (1982), en él se describe cómo las técnicas de generalización y extrapolación aprendidas en la Aritmética y llevadas al Álgebra, conducen a errores de conceptualización y operatividad de lo variable, e incluso, a una inadecuada interpretación del signo igual, entre otros. La autora señala que la descomposición lineal o la linealidad, es la técnica más usada de forma errónea y los ejemplos de errores más comunes son de distribución generalizada: $\sqrt{A+B} \to \sqrt{A} + \sqrt{B}$; $(A+B)^2 = A^2 + B^2$; $A(BC) \to AB * AC$; $2^{a+b} \to 2^a + 2^b$; $2^{ab} \to 2^a 2^b$.

En la misma línea del error algebraico, Socas (2007) refiere que el error y el obstáculo están relacionados toda vez que a un obstáculo se le puede considerar como el origen de un error, en consecuencia, el obstáculo posibilitaría hacer un análisis más fino del error, pues como es sabido, los obstáculos en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas se clasifican según su naturaleza: en epistemológicos, cognitivos y didácticos, e incluso, en ontológicos. Dicho así, el análisis del error posibilita pensar en un entramado inconsciente o en una condición implícita subyacente en los razonamientos y procedimientos de los estudiantes ante determinadas situaciones algebraicas.

Los estudios respecto a los usos y significados de las letras en el contexto algebraico se han elaborado considerando la noción de número y sus operaciones, la representación de la realidad y todo un sistema formal de representación simbólico (Palarea y Socas, 2000). Se ha documentado que aun cuando los estudiantes logran manipular las letras en sus distintos significados, pocos son los que llegan a reconocerlas como variables (Kücheman, 1981, citado en Kieran, 1992; Asquith, Stephens, Knuth y Alibali, 2007). Las dificultades en el entendimiento del concepto de variable real en Álgebra han sido referidas a partir del uso e interpretación de símbolos literales (como abreviaturas de nombres, como valores desconocidos únicos, en oposición a números generales o que admiten solo números naturales,…); e inducidas por el concepto inicial de número (natural) en los estudiantes, entre otros factores (Christou y Vosniadou, 2012).

Como es sabido, una peculiaridad en Álgebra es tratar con todo un sistema matemático de símbolos y signos interconectados en razón de las operaciones definidas en la Aritmética, empero, no necesariamente con la misma lógica operacional y conceptual. En ese sentido, diversas investigaciones han realizado un análisis sobre el papel de las representaciones simbólicas o más ampliamente, de las representaciones semióticas en el aprendizaje algebraico. Algunos trabajos pioneros en esta dirección son los de Janvier (1987), Duval (1988) y Kaput (1989), en ellos se refiere que la articulación y el tránsito entre múltiples representaciones en Álgebra o en cualquier dominio de las matemáticas, favorece el entendimiento de ideas complejas por parte de los estudiantes. Más recientemente se sitúan los trabajos de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), Carpenter, et al (2003) y Radford (2010), en éste último se discute una tipificación y generalidad del pensamiento algebraico a partir de dos aspectos centrales, la naturaleza del problema matemático a resolver y los recursos semióticos a movilizar en dicho problema, esto desde una perspectiva semiótica cultural del pensamiento matemático.

La dualidad de los objetos matemáticos también ha sido tema de análisis en diversas investigaciones para explicar dificultades de entendimiento con literales y conceptos algebraicos, por ejemplo, dificultad para interpretar a las literales como número generalizado, diferenciando el carácter procedimental y el estructural (conceptual) como entidad algebraica en sí misma. Desde este enfoque se dice que los estudiantes tienden inicialmente a entender las ideas matemáticas procesalmente, empero, según Sfard (1991); Sfard y Linchevski (1994) ha de desarrollarse una comprensión más profunda de los conceptos algebraicos en la medida que los estudiantes accedan de forma flexible al carácter estructural de estos. Visto así, tal dialéctica entre lo procedimental y estructural concierne a un fenómeno complejo que produce cambios ontológicos cualitativos respecto a las significaciones y aplicaciones de los conceptos escolarmente, tanto como en las perspectivas investigativas en el campo.

Sin duda alguna, los hallazgos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en Álgebra, han posibilitado cambios favorables en la concepción del currículo escolar algebraico y su contenido. Un indicativo de ello son los trabajos de Carpenter et al (2003), Cedillo y Kieran (2003), Kieran (2006) y Dougherthy (2008), de manera que en la literatura actual se coincide en reconocer que la enseñanza del Álgebra debe ir más allá de la comunicación y manipulación formal de las representaciones simbólicas estructurales, para entendérseles como una forma de pensar y conceptualizar lo variable (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005) expresar la generalidad y la abstracción (Kilpatrick et al, 2001; Carpenter y Levi, 2000; Radford, 2006), así como el representar relaciones entre lo concreto y lo abstracto (Carpenter et al, 2003), dicho en otras palabras, lo estructural ha de ser inseparable de lo procedimental.

PROBLEMA DE ESTUDIO

Como se ha venido expresando, los esfuerzos por entender, explicar y contribuir a una disminución de la problemática existente en la enseñanza aprendizaje del Álgebra son considerables y diversos. Los avances en la investigación de las últimas tres décadas, de poco en poco han ido favoreciendo un cambio en la concepción curricular del Álgebra y planteando diversas propuestas para su reorganización, sin embargo, el tipo de dificultades y errores algebraicos reportados en el pasado, aún mantienen vigencia entre los escolares contemporáneos, de ahí que en el presente trabajo se tomara como objeto de análisis el carácter *persistente de raciocinios* algebraicos equívocos, pues se piensa que los errores y razonamientos algebraicos equívocos cometidos por los estudiantes en antaño y en la actualidad, no son impredecibles y arbitrarios, por el contrario, mantienen una lógica interna que los hace persistentes, lo que plantea la posibilidad de caracterizar dicha persistencia como un fenómeno didáctico asociado al discurso matemático escolar más que a dificultades o errores algebraicos que pudieran devenir de generalizaciones o intuiciones incorrectamente elaboradas o aplicadas por los estudiantes.

En Chevallard, Bosch y Gascón (1997) se menciona que un fenómeno didáctico en matemáticas tiene lugar en cualquier proceso de estudio de esta ciencia, por lo que bien podría ser considerado como un hecho recurrente en una situación de enseñanza/aprendizaje e identificable mediante la observancia de algún intérprete. Por tanto, su origen ha de estar vinculado no solo a los procesos didácticos asociados, sino también a la naturaleza misma de la matemática. En ese sentido, cuando un saber matemático ha sido designado como un saber de enseñanza, recibe a partir de ese momento, algún tipo de transformación para su inserción al sistema escolar, tal transformación es un ejemplo de fenómeno didáctico (Chevallard, 1997).

Dicho lo anterior se planteó como objetivo de investigación determinar en qué medida la persistencia de razonamientos equívocos en Álgebra puede considerarse un fenómeno didáctico susceptible de ser analizado mediante un test de conocimientos matemáticos algebraicos típicamente escolares.

Se formula que la persistencia de errores y razonamientos equívocos en Álgebra no resulta ajena al tipo de adaptación escolar que del saber se hace al ser designado un saber de enseñanza y por ende, tampoco será ajena al tipo de discurso escolar conferido en los libros o en las aulas, por lo que el análisis de las posibles causas y efectos de dicha persistencia podrían ser inferibles desde el discurso escolar conferido, tanto igual que de los procesos cognoscitivos de los estudiantes y de la naturaleza de los saberes algebraicos puestos en juego.

Un ejemplo de la enunciación anterior puede extraerse del discurso escolar otorgado a la potenciación en educación básica, cuya presentación se hace a partir de la idea de multiplicación iterativa: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$, n veces con n mayormente entero positivo y sin más representación que lo numérico o algebraico. Luego entonces no sería difícil imaginar una movilización de algunos razonamientos equívocos por parte de los estudiantes como los siguientes: $a^n\, a^m = a^{nm}$ o bien, $a^n\, a^m = b^{nm}$ con $b = a \cdot a = a^2$, pues lo que se fija en la mente de la mayoría de ellos es la idea de que potenciación es "multiplicación iterativa de los números o literales" en la que solo debe cuidarse un cierto orden y lógica operativa, ello en virtud de que no se ofrecen marcos de referencia para conceptualizar la noción de potencia ya sea como un comportamiento exponencial de valores o como una relación funcional entre cantidades. De este modo, $a^n\, a^m = a^{n+m}$ no tendría sentido para los estudiantes, pues una suma de los valores exponenciales se sale del esquema o representación mental asociado.

Casos como el anterior dan lugar a reflexionar sobre el papel del discurso matemático escolar en la presencia y persistencia de estos razonamientos ciertamente equívocos a la luz de la matemática, empero, legítimos desde una perspectiva discursiva escolar, caracterizada por el énfasis dado a la sintáctica más que a la semántica.

MÉTODO

Para identificar en qué medida se presentaba un determinado tipo de razonamiento equívoco en contenidos específicos del Álgebra así como su persistencia, se recurrió a recabar datos de una muestra intencional por un periodo de siete años consecutivos con estudiantes recién egresados de educación media superior que fueron aceptados para realizar sus estudios universitarios en licenciaturas de Ciencias Exactas en las áreas de Matemáticas, Actuaría, Enseñanza de las Matemáticas, Ciencias Computacionales, Ingenierías en Computación e Ingeniería en Software. En la tabla I se presentan los datos de la población estudiantil participante por año y por programa educativo.

A todos los estudiantes se les solicitó responder al término de sus cursos de educación media superior y de manera voluntaria, un cuestionario de opción múltiple con quince reactivos de Álgebra, con cuatro opciones de respuesta, empero sólo una correcta. El tiempo de administración fue de sesenta minutos a cargo de los investigadores.

Cabe decir que de los quince reactivos contenidos en el cuestionario, solo dos de ellos fueron empleados para la recolección de datos respecto a la persistencia de razonamientos equívocos. La primera aplicación del instrumento en el año 2006 fue para seleccionar los reactivos a emplear en el análisis de los subsiguientes años.

Tabla I. Población de estudiantes participantes por programa educativo

Programa educativo	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Lic. en Matemáticas	34	36	37	39	42	37	0
Lic. en Enseñanza de las Matemáticas	34	34	39	40	39	41	35
Lic. en Actuaría	49	49	53	52	37	39	36
Lic. en Ciencias de la Computación	33	35	39	33	37	31	22
Lic. en Ingeniería de Software	33	35	37	35	53	37	39
Lic. en Ingeniería en Computación	31	35	32	33	42	40	36
Total de estudiantes ingresantes	**214**	**224**	**237**	**232**	**250**	**225**	**168**

El cuestionario es considerado un instrumento de confiabilidad aceptable según la escala establecida por Kerlinger y Lee (2002), dado que se obtuvo un α-Cronbach tipificado de 0.894 en el 2006, de 0.8815 en el 2008, de 0.915 en el 2010 y de 0.903 en el 2012; respecto a la consistencia interna así como de la correlación elemento-prueba para identificar aquellos reactivos que no se encuentran en el mismo contexto que el resto del cuestionario.

La objetividad del cuestionario se basó en el hecho de que al ser de opción múltiple, los resultados serán los mismos independientemente de quién los analice; su validez está en contener solo reactivos de conocimientos matemáticos que son prerrequisitos para los cursos de los primeros semestres de educación superior y que fueron estudiados previamente durante la educación media superior. Su fiabilidad deviene del hecho de que los resultados obtenidos en las diferentes generaciones se mostraron estables en todas las ocasiones administradas.

Los dos reactivos empleados para el análisis de datos son los que se presentan en la tabla II.

Cualitativamente se examinaron las respuestas de los reactivos que dan cuenta de la presencia de razonamientos algebraicos equívocos entre los estudiantes. Se consideró como referente tanto las ideas como los modos de pensamiento asociados a dichos razonamientos en relación con las formas de discurso escolar y la naturaleza de los saberes matemáticos subyacentes en cada reactivo.

DATOS Y RESULTADOS

Entre el tipo de respuestas dadas a los reactivos empleados para el análisis de la presencia y persistencia de razonamientos algebraicos equívocos en los estudiantes, se consideraron algunos errores algebraicos reportados en la literatura especializada. A continuación se presentan las consideraciones realizadas para cada una de las respuestas ofrecidas en el cuestionario.

Tabla II. Reactivos de Álgebra para el análisis de la persistencia

Reactivo 1	**Opciones de respuestas**			
Si a y b son números positivos y $a = b$, la expresión $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$ es igual a:	A) $\sqrt{2a^3}$	B) $\sqrt{a^6}$	C) $\sqrt{2a^6}$	D) $\sqrt{4a^3}$
Porcentaje aproximado de selección en cada inciso por año suministrado				
2007	41%	23%	13%	22%
2008	34%	25%	16%	25%
2009	41%	19%	15%	25%
2010	41%	19%	15%	25%
2011	31%	22%	20%	28%
2012	46%	19%	15%	18%
Reactivo 2	**Opciones de respuestas**			
El producto (2^{2x}) (2^{2y}) es igual a:	A) 4^{x+y}	B) 4^{4xy}	C) 4^{xy}	D) $4^{2(x+y)}$
Porcentaje aproximado de selección en cada inciso por año suministrado				
2007	28%	52%	1%	18%
2008	11%	35%	1%	53%
2009	7%	31%	0%	61%
Reactivo 2 (modificado)	**Opciones de respuestas**			
El producto (2^x) (2^y) es igual a	A) 4^{x+y}	B) 4^{xy}	C) 2^{xy}	D) 2^{x+y}
Porcentaje aproximado de selección en cada inciso por año suministrado				
2010	44%	22%	2%	32%
2011	40%	23%	3%	34%
2012	42%	23%	4%	32%

En el caso del reactivo 1, la respuesta del inciso A) $\sqrt{2a^3}$ presupone un razonamiento equívoco sobre la base del reconocimiento y aplicación de una distribución generalizada incorrecta reportada por Matz (1984), a saber, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. No obstante, la incorrecta distribución no es lo único que se asiste en dicho inciso, sino también el papel asignado a la adición o más precisamente, al operador aditivo en este tipo de estructuras algebraicas, pues se incorpora la posibilidad de que el operador actúe sobre las literales empero no en los exponentes.

De modo similar, en el inciso B) $\sqrt{a6}$ se presupone un razonamiento semejante al anterior empero, con el agregado de que la adición actúe sobre los exponentes y deje invariante a las bases, ello bajo la consideración de que ambas son iguales. Esta misma lógica fue aplicada al inciso C) $\sqrt{2a^6}$, con la diferencia de que en este caso la adición estaría operando tanto igual para las bases como para los exponentes y el radical se asume invariante como en el resto de los incisos.

Todas estas consideraciones sobre las opciones de respuestas dadas a los estudiantes no se restringen a la simple consideración de uno u otro tipo de error/dificultad algebraica para dar cuenta de su presencia, eso ha quedado ya reportado suficientemente en la literatura, más bien se buscaba dar cuenta de una persistencia de razonamientos algebraicos equívocos en la medida que las elecciones de los estudiantes no estuvieran completamente contenidas en una clase específica.

Por la distribución porcentual obtenida en la elección de cada inciso de respuesta a lo largo de los años se evidencia no solo los tipos de errores o dificultades algebraicas, sino la persistencia de razonamientos equívocos que a interpretar del tipo de reactivos y respuestas contenidas en el cuestionario, se asume que en mayor o menor medida son causadas por un discurso matemático escolar algebraico que carece de marcos de significación apropiados para tratar la semántica de los símbolos algebraicos y movilizar esquemas cognitivos para transitar a estadios estructurales y autónomos de pensamiento en relación con los sistemas de signos, de modo que se favorezca la comprensión sobre la naturaleza procedimental y estructural del Álgebra.

Para el caso de la radicación (Reactivo 1), tales marcos de referencia pueden hallarse en el escudriño de procesos de desarrollo y construcción de dicha noción *ad hoc* a su naturaleza epistemológica para conferirle un sentido a la radicalización, por ejemplo, en lo relativo al estudio de relaciones de proporcionalidad entre cantidades conmensurables y no conmensurables en contextos geométricos o en situaciones contextualizadas de medición, la mecánica, agrimensura, ebanistería, entre otras. Es decir, referentes que permitan transponer discursos escolares apegados a procesos de axiomatización y desarrollo de la estructura deductiva matemática de los números, en los que el trabajo con radicales se trata como una extensión numérica del exponente natural a un entero y racional (Martínez, 2005).

Respecto al reactivo 2 modificado, al igual que en el reactivo 1, se consideraron los errores de distribución generalizada concernientes a la potenciación: $2^{a+b} \rightarrow 2^a + 2^b$; $2^{ab} \rightarrow 2^a 2^b$, como se reportan en Matz (1984). Así, en la respuesta en el inciso A) 4^{x+y} aunque propiamente no corresponde a uno u otro tipo de los errores de distribución generalizada dados por Matz, se usa ese conocimiento para su elaboración, empero, situado sobre la base de un posible recordatorio de las leyes de los exponentes para cuando las bases son iguales y que al mismo tiempo dé cuenta de la persistencia de razonamientos equívocos más que de simples errores o dificultades algebraicas. En este sentido, en el inciso se incorporó la idea presentada en el apartado anterior en el que el discurso escolar otorgado a la potenciación instala razonamientos equívocos del tipo: $a^n a^m = b^{nm}$ con $b = a \cdot a$, en la cognición de los estudiantes.

El inciso B) 4^{xy}, justo se corresponde con la consideración comentada en la última línea del parágrafo anterior y que por los porcentajes obtenidos en los primeros tres años de aplicación con los tres posteriores a su modificación, es posible referir la persistencia de razonamientos equívocos entre los estudiantes.

El inciso C) 2^{xy} corresponde al razonamiento equívoco también discutido previamente en este trabajo: $a^n a^m = a^{nm}$, sin embargo, se decidió presentarse en la forma como

Matz lo refiriera en su momento: $2^{ab} \rightarrow 2^a 2^b$, para obtener datos sobre en qué medida se hace presente una persistencia del razonamiento equívoco en función de una u otro tipo de presentación.

Visiblemente los datos posibilitan interpretar que no se trata solo de una situación de errores o dificultades algebraicas por parte de los estudiantes. La cantidad porcentual de quienes responden de una u otra manera resulta suficiente para pensar que se está ante un fenómeno didáctico de persistencia en razonamientos algebraicos equívocos. Desde luego no se rechaza el que las respuestas proporcionadas en sí mismas conforman algún tipo de error algebraico, empero, tales errores serían el efecto más no la causa, pues tal como se dice en Malisani (1999), parte de los errores que cometen los alumnos en Álgebra se remonta a obstáculos epistemológicos y bien puede agregarse, al tipo de tratamiento que le es conferido al Álgebra en la escuela. En ese sentido, se sostiene la tesis de que en el discurso escolar otorgado al Álgebra se encuentra la causal no solo de la manifestación de errores sino de una pérdida gradual en el proceso de significación de las literales, su uso y funcionalidad, pues la atención ha estado puesta en un supuesto tránsito de descripciones en lenguaje ordinario a representaciones simbólicas impersonales y procedimientos sistematizados, causando así un fenómeno didáctico de persistencia de razonamientos algebraicos equívocos en los estudiantes.

En una dirección similar a los efectos del discurso escolar algebraico se han pronunciado autores como (Pochulu, 2005; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006) quienes refieren que los errores cometidos por los estudiantes se remontan a obstáculos epistemológicos propios del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos y se vinculan con los procesos de enseñanza caracterizados por un uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos, utilización de reglas poco trascendentes, tratamientos apegados a lo algebraico, ausencia de contextos y poco articulación con otros saberes.

CONCLUSIÓN

Desde una perspectiva epistemológica del conocimiento matemático se dice que el error en los estudiantes no es sólo un efecto de la ignorancia, sino de un conocimiento anterior que aun siendo exitoso en algunos casos se manifiesta falso para otros o en su generalidad (Brousseau, 1986), ello queda no solo corroborado en el presente escrito, sino que se asienta el pensar en la persistencia de razonamientos equívocos en Álgebra como resultado de la existencia de tal tipo de conocimientos.

En el sentido anterior y de los datos obtenidos en el presente trabajo, es posible concluir que si bien ha habido esfuerzos por modificar el currículo matemático escolar, particularmente en Álgebra, igual que avances de investigaciones educativas en el tema, los razonamientos algebraicos equívocos por parte de los estudiantes siguen siendo hoy tan presentes como en antaño, lo que permite situar a este tipo de situaciones como un *fenómeno didáctico de persistencia* susceptible de ser inferidle a partir de un test con ítems enmarcados en una visión tradicionalista del currículo escolar de álgebra y su difusión al interior de las aulas.

Ahora bien, bajo la supuesta relación escolar dependiente entre un error y un conocimiento previo, resulta viable hacer una reflexión sobre el papel del discurso matemático escolar en un sentido causal. Esto es, reflexionar sobre las distintivas particularidades de un discurso matemático escolar como elementos germinales de dicho fenómeno didáctico, pues todo conocimiento escolar debe considerarse acción y efecto de la naturaleza organizacional y discursiva otorgada a los saberes de enseñanza. Tal consideración exigiría, para el caso aquí presentado, un análisis de la posible interrelación entre: 1) las concepciones docentes sobre la matemática en general y el Álgebra en particular; 2) la naturaleza organizativa de los contenidos algebraicos escolares y, 3) las interacciones discursivas entre estudiantes y profesores relativas al saber.

Dicho así, sería necesario reflexionar sobre formas favorables de aproximarse tanto al entendimiento de este tipo de persistencia como a su tratamiento en los escenarios escolares, en consecuencia se estaría ante un problema de rediseño del discurso matemático escolar algebraico aún vigente en las aulas.

Dada la evidencia empírica obtenida en este trabajo a partir de un test enmarcado en una visión tradicionalista de organización y difusión escolar del Álgebra respecto a la persistencia de razonamientos algebraicos equívocos entre los estudiantes ingresantes a estudios universitarios, se reconoce la importancia de complementar este tipo de resultados y trabajos con estudios sobre currículo escolar de álgebra difundido en las aulas con el fin de precisar de mejor manera el papel que el discurso matemático escolar tiene en dicho fenómeno de persistencia.

REFERENCIAS

Aparicio, E. (2012). Rendimiento escolar en Matemáticas. Casos en la enseñanza media superior y superior. En Dolores, C. y García, M. (Eds) *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato?,* 23-36. Universidad Autónoma de Guerrero y Plaza y Valdés Editores: México.

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2014). The Social Construction of Mathematical Continuity: A Socioepistemological Approach. *Başkent University Journal of Education* 1(1), 123–135.

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Asquith, P., Stephens, A.C., Knuth, E.J. y Alibali, M.W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Carpenter, T. P. y Levi L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Madison: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science: University of Wisconsin-Madison.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. New Hampshire: Heinemann.

Cedillo, T. y Kieran, K. (2003). Initiating students into algebra with symbol-manipulating calculators. En Fey J. T. (Ed.) *Computer algebra systems in secondary school mathematics education*, 219-239. NCTM: Virginia.

Chevallard, Y. (1997). Familiare et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(3), 17 – 54.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori editorial.

Christou, K. y Vosniadou, S. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning,* 14(1), 1-27.

Dougherthy, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. En Kaput, J., Carraher D. y Blanton, M. (Eds.) *Algebra in the early grades*, 389–412. Lawrence Erlbaum Associates: New Jersey.

Duval, R. (1988). Graphiques et ´equations: l'articulation de deux registres. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1, 235–253.

Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En Janvier, C. (Ed.) *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 67-71. Lawrence Erlbaum Associates: New Jersey.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 167-194. LEA: Michigan.

Kerlinger, F. y Lee, H. (2002). *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales* (4a. ed.). México: McGraw Hill.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7, 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390–419. Macmillan: New York.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11 – 49. Sense Publishers: Rotterdam.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE,* 13,1-26.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(2), 195-218.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En Sleeman, D. y Brown J. S. (Eds.) *Intelligent tutoring systems*, 25-50. Academic Press: London.

NMP (1987). *National Mathematics Project*. London: Longman.

Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1999-2000). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada, 8/9,* 319-336.

Pochulu D. (2005). Análisis y Categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación* [en línea], *35*. Recuperado el 2 de agosto de 2014, de http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 2-21*. Universidad Pedagógica Nacional: Yucatán.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática,* 11, 19-52.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria

Lluís Albarracín, Cristina Lorente, Antoni Lopera,
Héctor Pérez y Núria Gorgorió
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen: *En este artículo estudiamos la presencia de procesos de modelización matemática en las resoluciones de Problemas de estimación de grandes cantidades de alumnos de Educación Primaria. Observamos que los alumnos resuelven los problemas utilizando diferentes estrategias que incluyen modelos matemáticos como la regla del producto, la iteración de un punto de referencia o la densidad de población, con lo que concluímos que estos problemas permiten introducir los procesos de modelización matemática en las aulas de Educación Primaria.*
Palabras clave: *Resolución de problemas, estimación, modelización, Educación Primaria*

Large numbers estimation problems in Primary education classroms

Abstract: *In this paper we study the presence of mathematical modelling processes in Large numbers estimation problems in primary education students solvings. We note that students solve problems using different strategies that include mathematical models as the product rule, the iteration of a reference point or population density. We conclude that these problems constitute a good opportunity allow to introduce mathematical modelling processes in the Primary Education classrooms.*
Keywords: *Problem solving, estimation, modelling, Primary education*

INTRODUCCIÓN

En estudios previos hemos analizado las estrategias de resolución que proponen los alumnos de Enseñanza Secundaria para resolver Problemas de Estimación de Grandes Cantidades (PEGC). Hemos observado que los alumnos los resuelven proponiendo sus propias estrategias, rompiendo el problema propuesto en problemas más pequeños y resolviéndolos por separado (Albarracín y Gorgorió, 2014). De esta forma los PEGC son un subconjunto de los denominados Problemas de Fermi y hemos podido constatar que son una herramienta útil para la introducción de los procesos de modelización en las aulas de Educación Secundaria (Albarracín y Gorgorió, 2013a).

Una revisión de la literatura en el campo de la Educación matemática aparecida en los últimos años evidencia un auge en las propuestas didácticas que incorporan la modelización matemática. En general los esfuerzos se han dirigido a estudiar las posibilidades de los estudiantes de Educación Secundaria y de niveles universitarios, pero los estudios que incluyen alumnos de Educación Primaria son escasos. Por otra parte, nos encontramos con los resultados de las últimas pruebas PISA (OECD, 2014a; 2014b), que ponen en la agenda la resolución de problemas matemáticos contextualizados en situaciones de la vida cotidiana, tanto de forma individual como grupal. En este contexto proponemos el uso de PEGC en las aulas de Educación Primaria.

En este artículo presentamos una investigación basada en diferentes experiencias de aula con alumnos del ciclo superior de Educación Primaria, en las que utilizamos una serie de PEGC. En el análisis de las producciones de estos alumnos observamos que en el trabajo en grupo se elaboran modelos matemáticos y caracterizamos su naturaleza.

En estudios anteriores hemos observado que la resolución de PEGC permite a los alumnos de Educación Secundaria establecer conexiones entre su conocimiento matemático y su entorno. Ahora nos preguntamos sobre las posibilidades de este tipo de tareas con alumnos de menor edad. Por otra parte, es conocido que los problemas de aula con contextos reales no substituyen la toma de decisiones en el mundo real, pero su uso en las aulas promueve actitudes que pueden utilizarse en la vida cotidiana (Jurdak, 2006). Por ello los problemas propuestos en nuestro trabajo se basan en la estimación de grandes cantidades ambientados en contextos cercanos, como puede ser el propio centro.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

La resolución de problemas es un ámbito en el que se han realizado un gran número de estudios y avances en las últimas décadas y ha llegado a jugar un papel fundamental en el campo de la Educación matemática (Rasmussen y King, 2000). Por otra parte, en los últimos años ha aparecido un fuerte interés por el estudio de los procesos de modelización matemática. En lo que sigue entendemos que las actividades de modelización matemática son un tipo concreto de tareas de resolución de problemas contextualizados en las que la creación de una representación matemática de una realidad o fenómeno es uno de los aspectos clave de la resolución. Para definir de forma más precisa el concepto de modelo matemático utilizamos la siguiente formulación propuesta por Lesh y Harel (2003):

> Models are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).
>
> Models include both: (a) a conceptual system for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) accompanying procedures for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals. (p. 159)

A partir de esta definición, entendemos que un modelo matemático es una forma de representar una realidad en la que intervienen elementos de diferente naturaleza. Algunos de estos elementos son propios de las matemáticas pero los modelos también pueden aspectos no formales que permitan una descripción intuitiva de la realidad estudiada. Además, Lesh y Harel (2003) afirman que "the products that problem solvers produce generally involve much more than simply giving brief answers to well formulated questions" (p. 158).

La forma en la que los estudiantes crean modelos matemáticos para resolver problemas es objeto de estudio y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo Ferri, 2006). En términos generales, se acepta que los procesos de modelización tienen una naturaleza eminentemente cíclica. En el proceso de resolución los estudiantes tratan de resolver los problemas pasando por diferentes fases y vuelven a replantearse la situación estudiada. De esta forma, el proceso se repite en diferentes ciclos en los que se mejoran los modelos y las soluciones encontradas para el problema en el que trabajan adaptándose a las necesidades que marca el enunciado en cada momento (Blum y Borromeo Ferri, 2009). Estos procesos no son sencillos para los estudiantes y se han detectado diferentes dificultades, como la presencia excesiva de modelos lineales en situaciones que no los requieren (Esteley, Villarreal y Alagia 2010).

ESTIMACIÓN Y PROBLEMAS DE FERMI

En muchas situaciones de nuestra vida cotidiana no disponemos de todos los medios o informaciones necesarios para poder dar una respuesta precisa y concreta a una pregunta dada. Aún así en muchas de estas situaciones no es realmente necesario obtener respuestas con un alto nivel de precisión para solucionar aquello que se nos plantea. En estos casos una estimación de las cantidades relevantes que intervienen en la situación en la que nos encontramos puede ser suficiente, o incluso la opción más rápida y efectiva para dar solución al problema con el que nos encontramos. En el contexto de la Educación Matemática, entendemos que una estimación es un juicio del valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias y necesidades de la persona que emite ese juicio (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989).

En la literatura se distinguen tres tipos, esencialmente distintos, de formas de estimación: la denominada numerosidad (*numerosity)*, la estimación de medidas y la estimación computacional (Hogan and Brezinski, 2003). Esta variedad se debe a que existen una gran diversidad de tareas que, aunque no compartan los patrones numéricos o conceptuales que permiten realizarlas, recaen en el concepto de estimación (Booth and Siegler, 2006). La numerosidad se refiere a la habilidad de estimar visualmente el número de objetos dispuestos en un plano en un tiempo determinado, la estimación de medidas se basa en la habilidad perceptiva de estimar longitudes, superficies, tiempos, pesos o otros tipos de medidas similares y la estimación computacional se refiere al proceso por el que se aproxima el valor de cálculos como 2.31+5.75/2.1.

Por otra parte, otra actividad en la que las matemáticas son un aspecto fundamental y que es denominada también estimación es el cálculo de valores obtenidos en actividades predictivas o de aproximación de una realidad a partir del uso de modelos que representan una situación. Este tipo de actividad es común en tareas científicas, técnicas o en estudios sociales, pero ha sido poco considerado en el estudio sistemático en el ámbito de la Educación Matemática. Una buena muestra del tipo de situaciones en las que un modelo matemático es la base para realizar una estimación de una cantidad la constituyen los denominados problemas de Fermi, propuestos originalmente por Enricco Fermi (1901-1954), físico ganador de un premio Nobel.

El problema, *¿cuántos afinadores de piano hay en Chicago?* es el ejemplo más utilizado para mostrar las características de los problemas de Fermi. En este caso se puede estimar la solución a partir de dividir el problema en sub-problemas más pequeños que pueden resolverse por separado a partir de estimaciones razonadas. Algunos de los valores relevantes a estimar son el número de casas que hay en Chicago, el porcentaje de estas que poseen piano, el número de horas necesarias para afinar un piano o la jornada anual total de un afinador de pianos. La resolución completa del problema se puede consultar en García Navarro (2013). Se pueden encontrar otros ejemplos de problemas de Fermi en Weinstein (2008, 2012).

La definición de problema de Fermi que ofrece Ärlebäck (2009) es la siguiente:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations. (p. 331)

Carlson (1997) describe el proceso de resolución de un problema de Fermi como "the method of obtaining a quick approximation to a seemingly difficult mathematical process by using a series of educated guesses and rounded calculations" (p. 308). Por su parte, Efthimiou y Llewellyn (2007) caracterizan los problemas de Fermi afirmando que siempre parecen difusos en su planteamiento, dando poca información concreta o pocos aspectos relevantes para iniciar la resolución, pero que se pueden descomponer en problemas sencillos que permiten llegar a la solución de la pregunta original. De esta forma, los problemas de Fermi se caracterizan esencialmente por presentar una pregunta abierta y sin excesivos detalles y los caracteriza especialmente el formato de su resolución, basada en realizar estimaciones de varias cantidades. Robinson (2008) relaciona este proceso de resolución específico con la creación de modelos matemáticos:

> [i]n order to solve a Fermi problem, one has to synthesize a physical model, examine the physical principles which are in operation, determine other constraints such as boundary conditions, decide how simple the model can be while still maintaining some realism, and only then apply some rough estimation to the problem. (p. 83)

Por su parte, Ärlebäck (2011) afirma que el trabajo con problemas de Fermi puede ser útil para introducir la modelización en las aulas porque son accesibles para alumnos de diferentes etapas educativas, no requieren un tipo concreto de conocimiento matemático previo y obligan a los alumnos a especificar la estructura matemática de la información relevante. Otro argumento para la introducción de problemas de Fermi en las aulas es la posibilidad de utilizarlos como puente entre las matemáticas y otras materias escolares, acercando a los estudiantes a diferentes tareas interdisciplinarias (Sriraman y Lesh, 2006). También permiten incorporar diferentes problemáticas sociales de interés, como estimaciones de agua potable consumida, consumos de gasolina u otros combustibles, cantidades de comida desechadas y otros tipos de problemas de tipo ecológico (Sriraman y Knott, 2009).

Los problemas de Fermi se han utilizado mayoritariamente en estudios universitarios de Ciencias Físicas, aunque se ha sugerido su uso en otros ámbitos científicos, con el objetivo de conectar el conocimiento matemático con las problemáticas de interpretación de fenómenos en otras ramas científicas, tal y como describe White (2004) en el estudio de moléculas en el ámbito de la Bioquímica. Como ya hemos señalado, se han utilizado los problemas de Fermi en las aulas de Educación Secundaria. En García Navarro (2013) y Albarracín y Gorgorió (2013b) se pueden encontrar propuestas didácticas basadas en el uso de este tipo de problemas.

A pesar de lo expuesto, los problemas de Fermi han sido poco utilizados en Educación Primaria, aunque los indicios hacen pensar que su adaptabilidad a diferentes niveles educativos debería permitir dinámicas de aula ricas. Las únicas referencias relacionadas con el estudio de Problemas de Fermi en los niveles de Educación Primaria es el trabajo de Peter-Koop (2005) que propone su uso sin analizar con detalle el tipo de estrategias que utilizan los alumnos.

OBJETIVO DEL ESTUDIO

En este estudio nos planteamos utilizar los Problemas de estimación de grandes cantidades (PEGC) como actividades de aula en el ciclo superior de Educación Primaria para estudiar si los alumnos los resuelven a partir de un procesos de modelización matemática. En concreto, nuestro objetivo es identificar elementos de modelización en las producciones de aula de alumnos de Educación Primaria al resolver PEGC.

METODOLOGIA

En las siguientes secciones detallamos los aspectos metodológicos del estudio, detallando la población participante, el tipo de actividades y problemas utilizados, y el formato de los datos recogidos.

Participantes

Los datos de este estudio se recogen a partir de las producciones de alumnos de 5º y 6º cursos de Educación Primaria (entre 10 y 12 años) de tres centros diferentes que trabajan en grupos de 3 o 4 alumnos. La tabla 1 muestra el número de alumnos para cada uno de los tres centros en los que se realizó la actividad y el número de grupos de trabajo en los que se distribuyeron.

Tabla 1. Número de alumnos de cada centro y número de grupos de trabajo

	Número de alumnos	**Grupos de trabajo**	**Curso**
Centro 1	10	3	5º
Centro 2	15	4	5º
Centro 3	26	7	6º
Total	63	14	

Problemas

Para este estudio utilizamos diferentes Problemas de estimación de grandes cantidades (PEGC), que son un tipo concreto de Problemas de Fermi (Albarracín y Gorgorió, 2014). El uso de grandes cantidades dificulta los recuentos exhaustivos o las mediciones directas, con lo que los alumnos necesitan desarrollar estrategias alternativas para justificar sus estimaciones. Para diseñar las actividades se han utilizado problemas contextualizados en el propio centro educativo de los alumnos considerando que la familiaridad con el contexto debería promover que los problemas sean más interesantes y accesibles, así como permitir que se pudieran efectuar las mediciones oportunas en un lugar accesible.

Los problemas utilizados, en abstracto, son los siguientes:

- **Tipo A:** Estimación de la cantidad de personas que se pueden disponer en una cierta superficie.
- **Tipo B:** Estimación de la cantidad de objetos que se pueden disponer en una cierta superficie o volumen.

En cada una de las actividades se dieron enunciados contextualizados para los problemas. En los problemas de tipo A se pregunta por la cantidad de personas que caben en una determinada superficie y están contextualizados a partir del uso de una imagen que sitúa la zona en la que debe disponerse la gente. Por ejemplo, la figura 1 muestra uno de los enunciados propuestos para los problemas de tipo A.

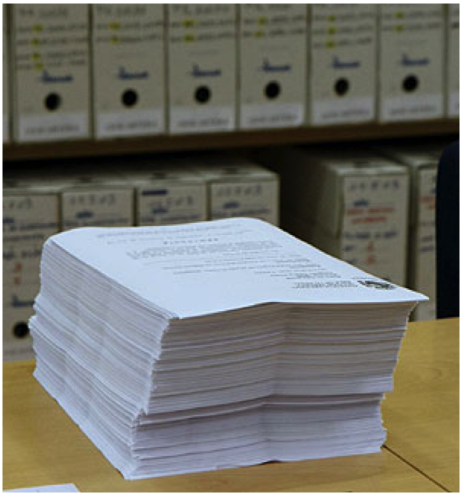
Los enunciados de los problemas de tipo B tienen la misma estructura, pero la naturaleza de los objetos involucrados en los problemas es variada. La figura 2 muestras los enunciados concretos de dos problemas de tipo B en los que se debe estimar la cantidad de objetos en un espacio.

Épsilon, 2015, Vol. 32 (1), nº 89, 19-33, ISSN: 2340-714X

¿Cuánta gente cabe en este porche?

Figura 1. El enunciado de un problema de tipo A (personas).

¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro?



¿Cuántos libros hay en estas estanterías?

Figura 2. El enunciado de dos problemas de tipo B (objetos).

La lista completa de los problemas de tipo B propuestos es la siguiente:

- ¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro?
- ¿Cuántos libros hay en las estanterías de la biblioteca?
- ¿Cuántos ladrillos hay en esta pared?
- ¿Cuántas pelotas de fútbol caben en el círculo central de la pista deportiva?
- ¿De cuántos cuadrados está formada la red que impide que las pelotas de fútbol se escapen de la pista?

En las actividades de aula también se propusieron problemas relacionados con la estimación y medida indirecta de alturas de varios objetos, pero no se incluyen en el análisis de este artículo por pertenecer a otra naturaleza de problemas.

Diseño de las actividades y datos recogidos

Cada una de las experiencias realizadas se basa en el trabajo con una secuencia de 4 PEGC procurando que los alumnos traten de resolver tanto problemas de tipo A como de tipo B, dando enunciados localizados para cada aula o centro educativo. En el aula los alumnos trabajan en grupos de 3 o 4 personas durante dos sesiones. En la primera sesión se plantean los problemas a los alumnos, se les pide que diseñen un plan de acción para resolverlos y se les deja tiempo para que afronten el proceso de resolución y hagan las mediciones que consideren oportunas. En la segunda sesión los alumnos escriben en un informe grupal los procesos seguidos y los resultados obtenidos. El trabajo acaba con una puesta en común de los resultados de los alumnos.

Durante las sesiones, el papel del profesor de aula es de guía, responde a dudas sobre los enunciados promoviendo el trabajo en el aula sin proporcionar ayudas específicas para la resolución de los problemas.

Los datos que analizamos son las producciones escritas de los alumnos para la resolución de cada problema planteado. Para complementar las producciones escritas en el informe de grupo de los alumnos y clarificar determinados aspectos del análisis se utilizaron las notas de campo que tomaron los maestros presentes en cada aula. En total se recogieron 36 resoluciones escritas a los diferentes problemas. La tabla 4 recoge el número de resoluciones obtenidas para cada tipo de problemas.

Tabla 2. Número de resoluciones recogidas para cada tipo de problema.

	Tipo A	Tipo B
Número de resoluciones	16	20

ANÁLISIS

Para analizar las resoluciones de los problemas se han tenido en cuenta los antecedentes de esta investigación en cuanto a las diferentes estrategias de resolución y modelos detectados en la resolución de PEGC (Albarracín y Gorgorió, 2013a; 2014). Cada resolución recogida contiene una serie de acciones y decisiones previas que llevan al uso de procedimientos y conceptos matemáticos concretos. Estos procedimientos y conceptos usados pueden ser recuentos, medidas directas o estimaciones que se apoyan en una forma determinada de interpretar el fenómeno estudiado.

En este estudio utilizamos un instrumento de análisis que ya nos ha permitido previamente detectar estrategias de resolución basadas en la elaboración de un modelo matemático (Albarracín y Gorgorió, 2013a). Estos modelos se basan en una visión concreta del fenómeno estudiado y van acompañados de los procedimientos necesarios para utilizarlo en ese caso concreto. Las estrategias de resolución de PEGC detectadas son las siguientes:

- Recuento exhaustivo: la estrategia de los alumnos es contar uno por uno todos los elementos del conjunto de objetos.
- Fuente externa: los alumnos delegan la responsabilidad de dar una respuesta al problema a un tercero que debería poseer la información necesaria.
- Reducción y uso de una proporción: los alumnos consideran el problema inicial y intenta resolver un problema equivalente con valores más pequeños para responder al problema inicial utilizando un factor de proporción entre las dos situaciones.
- Medidas de concentración: se basa la resolución en determinar la cantidad de personas u objetos distribuidos en una porción de superficie concreta que ellos mismos determinan.
- Punto de referencia: los alumnos determinan la superficie total del lugar en el que se encuentran las personas u objetos a estimar y lo dividen entre la superficie que ocupa un solo objeto, que actúa como un *punto de referencia* (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman y Subrahmanyam, 2005).
- Distribución en cuadrícula: los alumnos utilizan una imagen mental de distribución de las personas u objetos a estimar en forma de cuadrícula, estiman el número de ellos para cada dimensión (altura y ancho en los casos de superficies) y utilizan la regla del producto para establecer un resultado.

A continuación mostramos el tipo de datos con los que trabajamos, recogidos de uno de los grupos, en concreto un grupo de 6º de Primaria que trata de estimar el número de personas que caben en la pista del patio de su centro. La figura 3 muestra a los alumnos contando el número de personas que caben en media pista a partir de contar pasos tanto a lo largo como a lo ancho del patio.

La figura 4 muestra los cálculos realizados por los alumnos, en los que se pueden observar sus resultados parciales (50 personas en el largo y 25 en el ancho del patio). Como sus datos se refieren a media pista, multiplican el resultado por 2.

Observamos que su resolución se basa en una distribución teórica de personas en el patio en forma de cuadrícula, que es la base conceptual del modelo matemático que utilizan para decidir las medidas necesarias. En este caso los procesos necesarios son el recuento de pasos, como unidad de medida del espacio que ocupa una persona, y el uso de la regla del producto como procedimiento de cálculo final.

Figura 3. Cada paso es una persona.

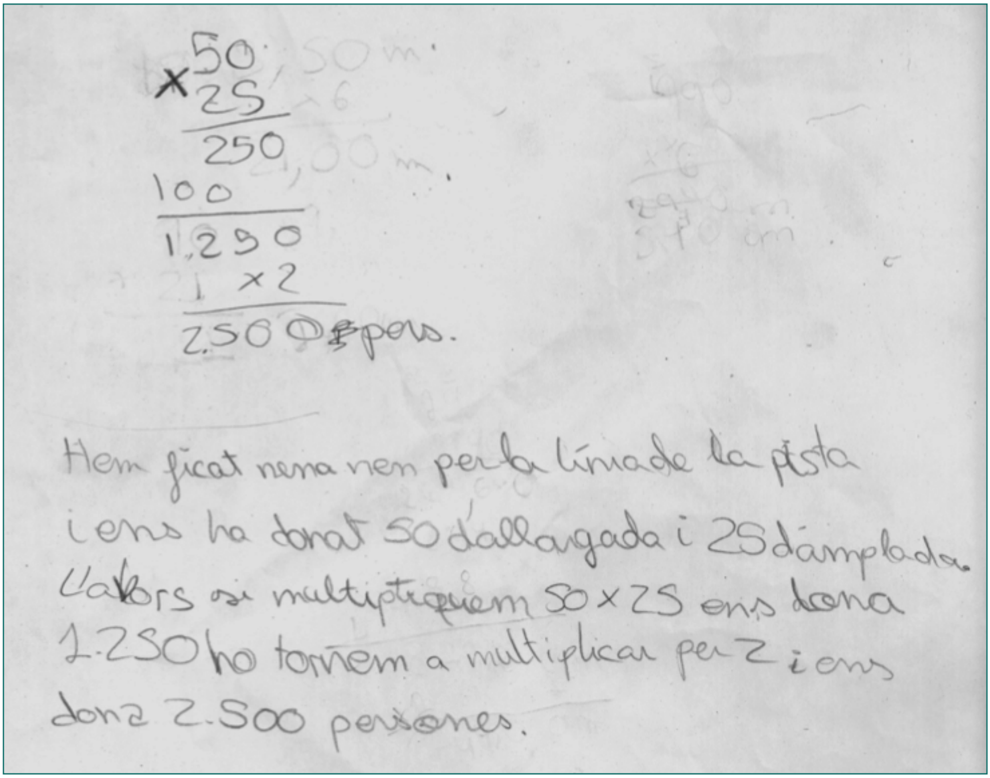


Figura 4a y 4b. La regla del producto en las producciones de los alumnos.

RESULTADOS

En esta sección detallamos las estrategias utilizadas por los alumnos y los modelos detectados para cada tipo de problemas.

Problemas de tipo A

La tabla 3 recoge las estrategias detectadas en la resolución de los problemas de tipo A, en los que los alumnos deben estimar la cantidad de personas que caben en un determinado espacio:

Tabla 3. Estrategias detectadas para los problemas de tipo A

Estrategia	Número de resoluciones
Densidad de población	1
Regla del producto	12
Punto de referencia	3
Total	16

A partir de los resultados obtenidos podemos afirmar que los alumnos basan sus estrategias de resolución en modelos matemáticos que simplifican y explican la situación a estudiar. Observamos que para estos alumnos la distribución de personas en forma de cuadrícula, como la presentada en el apartado anterior, es el modelo preponderante que permite describir y analizar los problemas propuestos. En estudios anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2014) observamos que la incidencia de esta estrategia es menor en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años).

Debemos destacar que no todos los alumnos aplican los métodos propuestos de la misma forma y que algunos grupos introducen matices en su resolución que merecen ser destacados. Dos de los grupos utilizan las baldosas del suelo del espacio en el que se propone el problema determinando el número de baldosas que ocupa una persona y cuentan baldosas a partir de la regla del producto. Otros de los grupos establecen el espacio requerido por una persona a partir de la longitud de un paso, con lo que obtienen una forma rápida y efectiva de contar el número de personas que caben en cada dimensión del espacio propuesto. Un grupo agiliza este proceso estimado el número de personas que caben en media pista y multiplicando el resultado por dos.

Problemas de tipo B

La tabla 4 muestra las estrategias detectadas en la resolución de los problemas de tipo B, en los que los alumnos deben estimar la cantidad de objetos (folios, pelotas, libros...) que caben en un determinado espacio:

Tabla 4. Estrategias detectadas para los problemas de tipo A

Estrategia	Número de resoluciones
Regla del producto	10
Punto de referencia	3
Reducción a un problema más pequeño	6
Fuente externa	1
Total	16

Dado que este tipo de problemas es más variado en su formulación que los problemas de tipo A puesto que las naturalezas de los objetos a contar es diferente, observamos una mayor variedad en las estrategias propuestas. En este caso la regla del producto sigue siendo la estrategia preferida, pero observamos que diferentes grupos proponen reducir el problema inicial a uno más pequeño y aplicar una proporción.

En el caso del problema de estimar el número de folios que forman un montón, encontramos que los alumnos reducen el problema de dos formas diferentes, que se relacionan con dos formas distintas de entenderlo. Una opción es contar el número de folios necesarios para llegar a una altura determinada (1 cm, por ejemplo) y la otra es medir la altura de una cierta cantidad de folios. Los que utilizan esta segunda opción no calculan en ningún momento el grosor de un folio, que sería la unidad de medida que acaban utilizando los primeros. De esta forma vemos que las dos opciones, que son matemáticamente equivalentes, contienen diferencias desde el punto de vista didáctico, ya que la primera de las propuestas podría enlazarse directamente con la idea de establecer una unidad de medida, por lo que nos parece una actividad interesante para desarrollar en el aula.

Por otra parte, los alumnos tratan de resolver el problema de estimar el número de libros en las estanterías de la biblioteca reduciendo la situación a un problema más pequeño y manejable. Eligen una pequeña muestra de estantes, entre 2 y 4, y cuentan el número de libros que los contienen. A partir de estos datos aplican un factor de proporcionalidad entre la parte de la biblioteca que han contado y el total. Nuevamente, observamos que los alumnos no calculan el número medio de libros que contiene cada estante. Al mismo tiempo, uno de los grupos considera que la pregunta no tiene sentido, ya que el problema se encuentra resuelto en la catalogación de los libros y se limita a responder que el responsable de la biblioteca ya tiene la respuesta.

Un problema cuya resolución genera grandes dificultades a los alumnos es el que requiere estimar el número de pelotas de fútbol que caben en el círculo central de la pista deportiva. En este caso, la presencia de circunferencias para medir genera confusiones entre los conceptos de área y perímetro en los alumnos que optan por utilizar un punto de referencia como unidad base. Por su parte, un grupo trata de resolver el problema utilizando la regla del producto a partir de una disposición en forma de rejilla cuadricular de las pelotas, pero al tratarse de un espacio circular confunden el ancho y el largo de la superficie con su perímetro.

Finalmente, en el problema del recuento de ladrillos de una pared, los alumnos usan de forma exclusiva la regla del producto, pero la combinan con una reducción del problema para realizar recuentos más rápidos. En concreto, 4 de los 6 grupos que resuelven el problema combinan estas dos estrategias.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio nos permiten afirmar que los alumnos del tercer ciclo de Educación Primaria (10-11 años) pueden enfrentarse a los Problemas de estimación de grandes cantidades propuestos. De hecho, en sus resoluciones grupales introducen numerosos elementos que permiten confirmar el uso de modelos matemáticos involucrados. En este sentido coincidimos con Peter-Koop (2005) cuando establece la posibilidad de usar Problemas de Fermi en las aulas de Educación Primaria.

Entre los modelos detectados en este estudio destaca el uso de la regla del producto, basado en la distribución en cuadrícula de objetos, que parece la forma predominante de enfrentarse a este tipo de problemas para los alumnos de Educación Primaria. En estudios anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2013a; 2014) no hemos observado esta preponderancia tan marcada, con lo que intuimos que la regla del producto puede plantearse como modelo para introducir conceptos como la densidad de población, aunque consideramos que se debería estudiar con más detalle la forma en la que evoluciona el uso de estas estrategias con la edad de los alumnos. También hemos detectado otros modelos matemáticos en las resoluciones de los alumnos como el uso de la reducción a un problema más pequeño, el uso de un punto de referencia y la densidad de población. En línea con lo que afirma Ärlebäck (2011), hemos corroborado que los PEGC, en tanto que problemas de Fermi, pueden ser útiles para introducir la modelización en las aulas y podemos afirmamos que son accesibles para alumnos de Educación Primaria sin requerir un tipo concreto de conocimiento matemático previo.

Algunos de los modelos detectados en las resoluciones de los alumnos se relacionan con diferentes conocimientos que utilizarán los alumnos en diversas materias escolares más allá de las matemáticas, como es el caso de la establecer unidades o un punto de referencia, o la densidad de población. Por ello consideramos que las secuencias de PEGC se muestran como una opción válida y interesante para introducir estos conceptos a los alumnos de Educación Primaria.

A partir del análisis de las resoluciones de los alumnos y de las estrategias utilizadas, consideramos que los problemas de tipo A son más asequibles para ellos y permiten iniciar el trabajo con este tipo de problemas. Por ello proponemos elaborar secuencias de PEGC que se inicien con la resolución en el aula o el centro escolar de alguno de estos problemas para posteriormente afrontar la resolución de diversos problemas de tipo B, que demandan a los alumnos diferentes formas de acercarse a las estimaciones requeridas en función de las características de los objetos a cuantificar.

REFERENCIAS

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013a). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 289-315.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013b). Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: una propuesta de aula a partir de los modelos generados por los alumnos. *Modelling in Science Education and Learning* 6, 33-48

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331– 364.

Ärlebäck, J. B. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic fermi problem from the perspective of the anthropolgical theory of didactits. En M. Pytlak, E. Swoboda y T. Rowland (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 1010–1019). Rzeszów: University of Rzeszów, Poland.

Blum, W., y Borromeo Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Booth, J. L. y Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41(6), 189–201.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95.

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, *35*, 308-309.

Efthimiou, C. J., y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics education*, *42*(3), 253.

Esteley, C. B., Villarreal, M. E., y Alagia, H. R. (2010). The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 86-108.

García, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Epsilon, 30*(2), 57-68.

Hogan, T. P. y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259–280.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4-23.

Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 283–301.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 157—189.

OECD. (2014a). *PISA 2012 results: Creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (Volume V)*. PISA, OECD Publishing.

OECD. (2014b). *PISA 2015: Draft collaborative problem solving framework.* PISA, OECD Publishing.

Peter-Koop, A. (2005). Fermi Problems in Primary Mathematics Classrooms: Fostering Children's Mathematical Modelling Processes. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *10*(1), 4.

Rasmussen, C. L., y King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31,* 161-172. doi: 10.1080/002073900287219

Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education, 43* (1), 83-87.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida*. Madrid, España: Síntesis.

Sriraman, B. y Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 247– 254. DOI: 10.1007/BF02652808

Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, *40*(2), 205-223.

Weinstein, L. (2008). *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton University Press.

Weinstein, L. (2012). *Guesstimation 2.0: Solving Today's Problems on the Back of a Napkin*. Princeton University Press.

White (2004). Math Literacy. *Biochemistry and Molecular Biology Education, 32*(6), 410–411.

Épsilon - Revista de Educación Matemática 2015, Vol. 32(1), nº 89, 35-47

La aritmética comercial de Miguel Gerónimo de Santa Cruz

María José Madrid, Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba
Carmen López
Universidad de Salamanca

Resumen: *En este artículo se presenta un primer análisis de contenido de los aspectos más importantes de la aritmética comercial el Dorado Contador, escrita por el autor español del siglo XVI Miguel Gerónimo de Santa Cruz.*
Para este análisis se ha recurrido a la técnica del análisis de contenido, ampliamente utilizada por diversos autores en investigaciones relativas a la historia de las matemáticas. Destacan en la obra la gran diversidad tanto de contenidos como de ejemplos, contextualizados en su mayoría en el comercio; si bien muy semejantes a los de otras obras publicadas durante el mismo siglo.
Palabras Clave: *Historia de la educación matemática, Libro de texto, Aritmética Comercial, Siglo XVI, Dorado Contador.*

The mercantile arithmetic of Miguel Gerónimo de Santa Cruz

Abstract: *During this work it presents a first content analysis of the most important aspects of the mercantile arithmetic Dorado Contador, written by the Spanish sixteenth-century author Miguel Gerónimo de Santa Cruz.*
The technique used for this analysis is the content analysis, which has been repeatedly used by several authors in History of Mathematics Education research. This book presents a great variety of both, contents and mercantile examples; however, they are similar to the ones which appear in other sixteenth-century arithmetics.
Keywords: *History of Mathematics Education, Text Book, Mercantile Arithmetic, 16th Century, Dorado Contador*

INTRODUCCIÓN

El análisis de libros de texto posee un papel clave en las investigaciones relativas a la historia de la educación matemática; el libro de texto refleja una gran cantidad de información sobre el periodo en el que fue escrito y la educación en ese momento, ya que suele marcar de uno u otro modo la posterior actividad que se realiza en las aulas.

Esto ha potenciado que, en las últimas décadas, se hayan llevado a cabos numerosas investigaciones relativas al análisis de libros de texto históricos, tanto a nivel internacional como nacional, por ejemplo las de Schubring (1987) o Sierra y López (2013).

Dos grandes motivos permiten destacar al siglo XVI dentro de las investigaciones sobre el análisis de libros de texto; por un lado la aparición de la imprenta, ya en el siglo anterior, favoreció la difusión del conocimiento matemático en castellano; a su vez, el auge del comercio español en el siglo XVI, debido fundamentalmente a la conquista y explotación de América, favoreció que un mayor número de gente necesitará poseer conocimientos matemáticos básicos, impulsando la aparición de un gran número de libros con este objetivo.

A consecuencia de esto, diversos autores han enfocado sus investigaciones al estudio de aritméticas publicadas en el siglo XVI, por ejemplo el análisis realizado por Meavilla del contenido algebraico de la aritmética de Pérez de Moya (2005), o el estudio de las recreaciones matemáticas que se pueden encontrar en la aritmética de Ortega (2013).

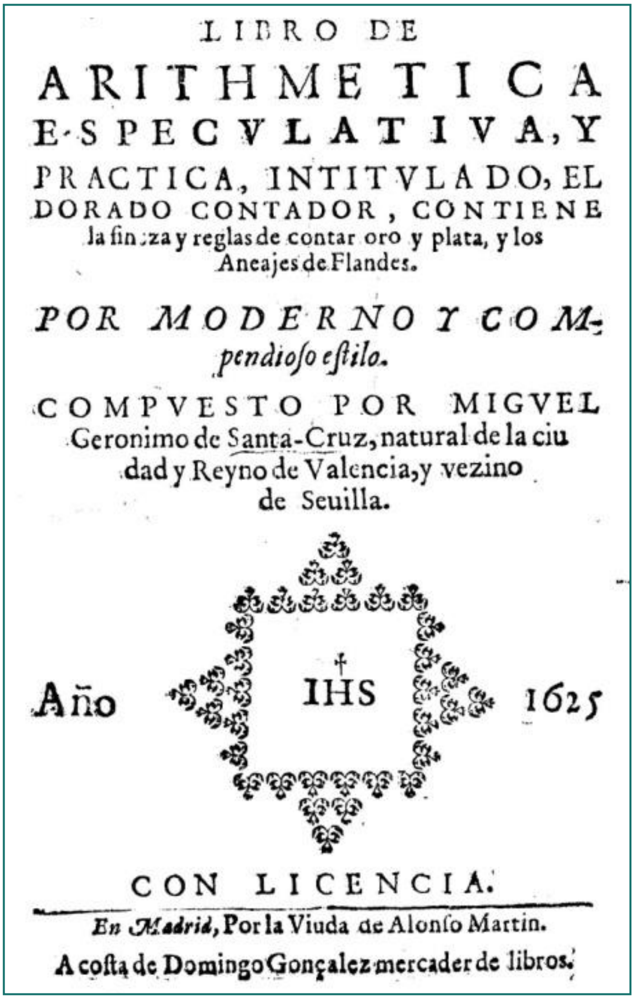
Puig y Fernández por su parte realizaron los preliminares para el estudio de la aritmética algebraica de Marco Aurel (2013). Se han analizado también la fenomenología y las representaciones en la *Arithmetica Practica* de Juan de Yciar (Maz-Machado, López y Sierra, 2013).

Continuando con esta línea de investigación, el objetivo de este artículo es realizar un primer análisis de contenido de la aritmética comercial de Miguel Gerónimo de Santa Cruz, el *Dorado Contador*, publicada por primera vez en 1594 y que contó con varias reimpresiones. Esta aritmética refleja de forma clara la necesidad que surgió durante el siglo XVI de adquirir conocimientos matemáticos básicos.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada ha sido el análisis de tipo histórico apoyado en el análisis de contenido de libros de texto que utilizan de forma frecuente los investigadores del Grupo de investigación de Pensamiento Numérico de la SEIEM (Maz y Rico, 2007, 2009; Sierra y López, 2013) y centrado en tres dimensiones:

- Contenidos, ejemplos y ejercicios: Se revisarán los temas, los problemas y los ejercicios resueltos o propuestos que aparecen en el libro. A continuación, se elaborará un mapa conceptual a través del cual se pueden identificar los focos conceptuales en los que se estructura la obra (Sierra y López, 2013).
- Sistemas de representación: Se entienden por sistemas de representación en educación matemática a las diversas formas de presentar un concepto. Se pueden utilizar distintos tipos de símbolos, gráficas, signos, tablas, figuras, etc. (Maz y Bracho, 2013).



LIBRO DE
ARITHMETICA
ESPECVLATIVA, Y
PRACTICA, INTITVLADO, EL
DORADO CONTADOR, CONTIENE
la fineza y reglas de contar oro y plata, y los
Aneajes de Flandes.

*POR MODERNO Y COM-
pendioso estilo.*

COMPVESTO POR MIGVEL
Geronimo de Santa-Cruz, natural de la ciu
dad y Reyno de Valencia, y vezino
de Seuilla.

Año IHS 1625

CON LICENCIA.

En Madrid, Por la Viuda de Alonso Martin.
A costa de Domingo Gonçalez mercader de libros.

Figura 1. Portada del *Dorado Contador* (1625).

- Análisis fenomenológico: Se presentarán aquellas situaciones o fenómenos en las que los conceptos matemáticos incluidos en el libro tienen uso, es decir aquellos que muestran su funcionalidad. Una situación viene dada por una referencia al medio en el cual se sitúan los ejemplos o ejercicios propuestos en la aritmética (Sierra y López, 2013).

RESULTADOS

El autor: Miguel Gerónimo De Santa Cruz

Son muy pocos los datos que se conocen sobre este autor, únicamente a través de su propio libro se puede saber que era natural de la ciudad de Valencia y vecino de Sevilla.

En 1594 se publica por primera vez su *Libro de aritmética especulativa y práctica, titulado el Dorado Contador*.

Picatoste (1891) afirma que es probable que Miguel Gerónimo de Santa Cruz ejerciera la profesión de comerciante. Igualmente, Smith (1908) sostiene que era un comerciante y aritmético de la segunda mitad del siglo XVI. Salavert (1990) añade sobre él, que poseía un alto nivel de conocimientos sobre la matemática renacentista.

La posibilidad de que Miguel Gerónimo de Santa Cruz fuera un comerciante de la época permite entender mejor los motivos que le llevaron a la escritura de su obra. En ese caso, su profesión le permitía ser consciente de las numerosas dificultades que suponía el desconocimiento de las matemáticas a la hora de realizar transacciones comerciales, y los problemas que se evitarían si un mayor número de personas tuviera acceso a estos conocimientos.

La obra: El Dorado Contador

El título completo de la obra es *Libro de arithmetica especvlativa, y práctica, intitvlado, el Dorado Contador, contiene la fineza y reglas de contar oro y plata, y los Aneajes de Flandes,* se publica por primera vez en Madrid en 1594. Se constatan múltiples reimpresiones de esta obra, la primera en Sevilla en 1603, posteriormente en Madrid en 1625, 1643 y la última también en Madrid y en el siglo XVIII, en concreto en el año 1794 (Picatoste, 1891).

El texto representa una aritmética comercial que refleja fundamentalmente la actividad mercantil valenciana y sevillana, ciudad donde residía el autor. Su aprobación aparece firmada por el director de la Academia de Matemáticas, Pedro Ambrosio de Ondériz. A consecuencia de esto, la obra fue utilizada como libro de texto en la Casa de Contratación de Sevilla durante mucho tiempo (Salavert, 1990).

La edición analizada se trata de la tercera reimpresión, correspondiente al año 1625, impresa en Madrid por la viuda de Alonso Martín, a costa de Domingo González, mercader de libros. Esta aritmética contiene dos páginas sin numerar, en las que realiza un prologo al lector y una exhortación, después 238 páginas numeradas de contenidos, divididas en dos libros: el primero con 22 capítulos y el segundo con 11; y finalmente incluye una tabla de contenidos.

La edición impresa en Madrid en 1643 tiene unas dimensiones de 13.8x20 cm, siendo el texto de 9.9x16.8 cm, y contiene el mismo número de páginas que la edición aquí utilizada (Smith, 1908).

Los objetivos principales que manifiesta el autor en esta obra son poner las matemáticas al alcance de todos y ser de utilidad para los lectores en situaciones de su vida cotidiana, del comercio, de su trabajo, sirviéndoles para mejorar sus negocios, evitar engaños, etc.

Además, concede importancia a la unión entre las propias matemáticas; él mismo dice que todo en las matemáticas está relacionado y por eso habla en un capítulo de cuestiones que se explicarán después o al revés. Afirma que unas especies se valen de otras, y eso hace que todas sean útiles y se pueden aprovechar.

En el aspecto educativo, cabe destacar que otorga al profesor un papel de gran importancia en el proceso de enseñanza aprendizaje, en varias ocasiones avisa a los

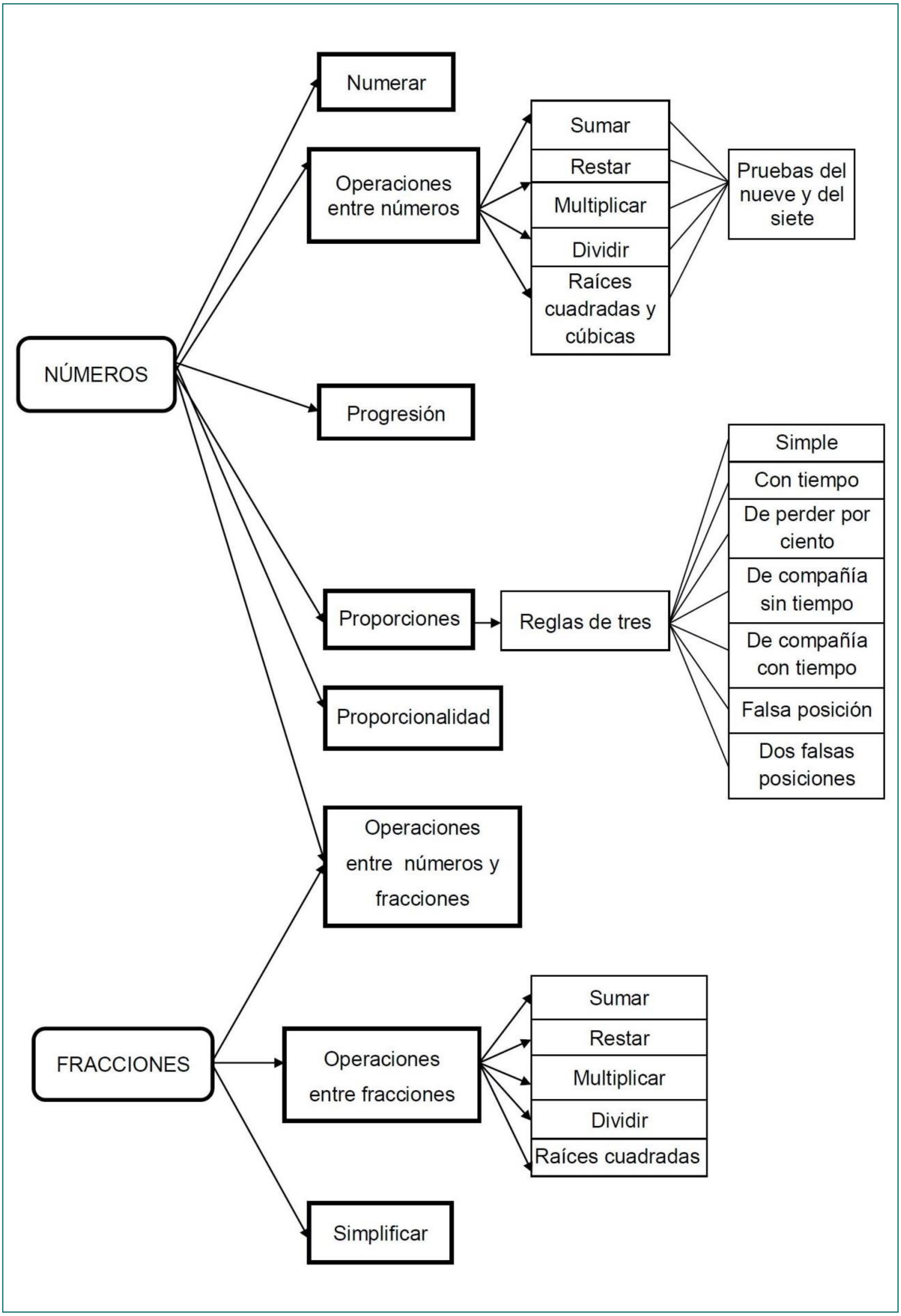


Figura 2. Mapa conceptual del *Dorado Contador.*

LA ſegunda eſpecie de la Aritmetica practica, es ſumar, y la primera regla de las cinco reglas principales, y no es otra coſa ſino ayuntar pocos, o muchos numeros iguales, y diferentes de qualquier cantidad, o medida, o peſo, o numero, que ſea vna coſa ſola, la qual toda llegada y ayuntada, y ſubtraidas a el las dichas partes, ſe puede ſaber que valen y montan, o que peſo y medida, o numero de marauedis contienen todas para la tal coſa entender, conuiene

Figura 3. Representación verbal.

```
 1549
   24
 ----
 6196
3098
-----
37176
-----
```

Y ſumaras el 6. primero, que eſtà en la vnidad, y luego el 8. cõ el 9. hazen diez y ſiete, aſsienta 7. y va vno, y nueue, diez, y vno q̃ eſta encima ſon onze, aſsienta vno, y va vno, juntalo con el 6. ſeran 7. aſsienta 7. debaxo la raya del cero, no hagas caſo, y no lleuamos coſa alguna, el 3. aſſentaras debaxo la raya, y q̃dara la quenta acabada, como parece en la figura, y aſsi diras, que las dichas libras de axenxibre al dicho precio, ſuman y montan treinta y ſiete mil ciento y ſetenta y ſeis reales. Bien has viſto como eſta eſpecie de multiplicar es ſumar, y aun ſe concluye ſumando.

Figura 4. Representación verbal y numérica.

lectores que si buscan entender correcta y completamente los contenidos necesitarán la ayuda de un profesor con el cual practicarlos “a viva voz”. Añadir que a lo largo del libro, y fundamentalmente en las definiciones, se observa la influencia de Euclides, pues se mencionan en varias ocasiones las traducciones de su libro hechas por Tartaglia, y Commandino. Se encuentran también referencias a Arquímedes, Platón, Aristóteles, Juan de Sachrovosco, Michael Escoto, etc., y a autores del siglo XVI como Juan Pérez de Moya, Marco Aurel, Pedro Nuñez, Juan Vantallols, Fray Juan de Ortega.

ANÁLISIS

A lo largo de las próximas páginas se presenta un breve resumen de los resultados que se han obtenido al realizar un análisis de contenido de esta aritmética.

Contenidos:

El primer libro incluye un primer capítulo sobre aritmética teórica o especulativa. En los siguientes se explican las operaciones elementales, las fracciones y las operaciones

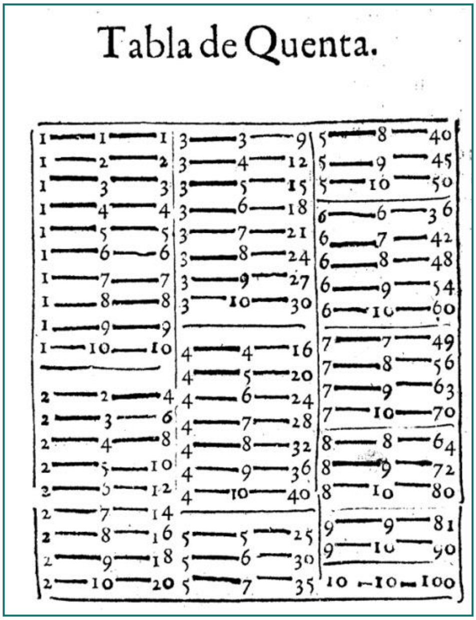


Tabla de Quenta.

1 — 1 — 1	3 — 3 — 9	5 — 8 — 40
1 — 2 — 2	3 — 4 — 12	5 — 9 — 45
1 — 3 — 3	3 — 5 — 15	5 — 10 — 50
1 — 4 — 4	3 — 6 — 18	6 — 6 — 36
1 — 5 — 5	3 — 7 — 21	6 — 7 — 42
1 — 6 — 6	3 — 8 — 24	6 — 8 — 48
1 — 7 — 7	3 — 9 — 27	6 — 9 — 54
1 — 8 — 8	3 — 10 — 30	6 — 10 — 60
1 — 9 — 9	4 — 4 — 16	7 — 7 — 49
1 — 10 — 10	4 — 5 — 20	7 — 8 — 56
2 — 2 — 4	4 — 6 — 24	7 — 9 — 63
2 — 3 — 6	4 — 7 — 28	7 — 10 — 70
2 — 4 — 8	4 — 8 — 32	8 — 8 — 64
2 — 5 — 10	4 — 9 — 36	8 — 9 — 72
2 — 6 — 12	4 — 10 — 40	8 — 10 — 80
2 — 7 — 14	5 — 5 — 25	9 — 9 — 81
2 — 8 — 16	5 — 6 — 30	9 — 10 — 90
2 — 9 — 18	5 — 7 — 35	10 — 10 — 100
2 — 10 — 20		

Figura 5. Tabla de multiplicar.

entre ellas, las sumas y restas en el contexto comercial, las progresiones aritmética y geométrica, y las raíces cuadradas y cúbicas. Finaliza este libro con un último capítulo dedicado a las pruebas del nueve y el siete.

A lo largo del segundo libro se explican las proporciones, las reglas de tres directas, inversas, compuestas, los repartos proporcionales simples y compuestos, el método de la falsa posición y de las dos falsas posiciones. El libro finaliza con tres capítulos dedicados a transacciones comerciales con oro, plata y aneajes de Flandes y Francia.

Estos contenidos son en general los habituales en las aritméticas comerciales españolas e italianas de la época (Smith, 1908). Por ejemplo, en las aritméticas escritas por Juan Pérez de Moya o Marco Aurel se pueden encontrar similares contenidos, a excepción del álgebra, contenido que estos incluyen y sin embargo no forma parte de la aritmética de Miguel Gerónimo de Santa Cruz.

Ejemplos y ejercicios:

Son bastante numerosos y diversos los ejemplos y ejercicios que se pueden encontrar en la obra, se incluyen ejercicios con operaciones básicas, fracciones, raíces cuadradas, reglas de tres, etc. En general, cada contenido explicado lleva asociado varios ejemplos sencillos y contextualizados en su mayoría al comercio, que pretenden que el lector adquiera las destrezas explicadas. Para lograr esto resuelve muchos ejemplos detallando

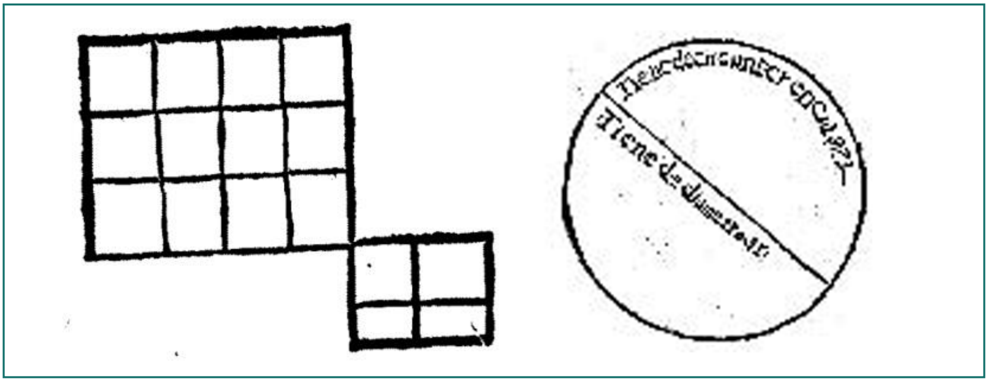


Figura 6. Gráficas geométricas.

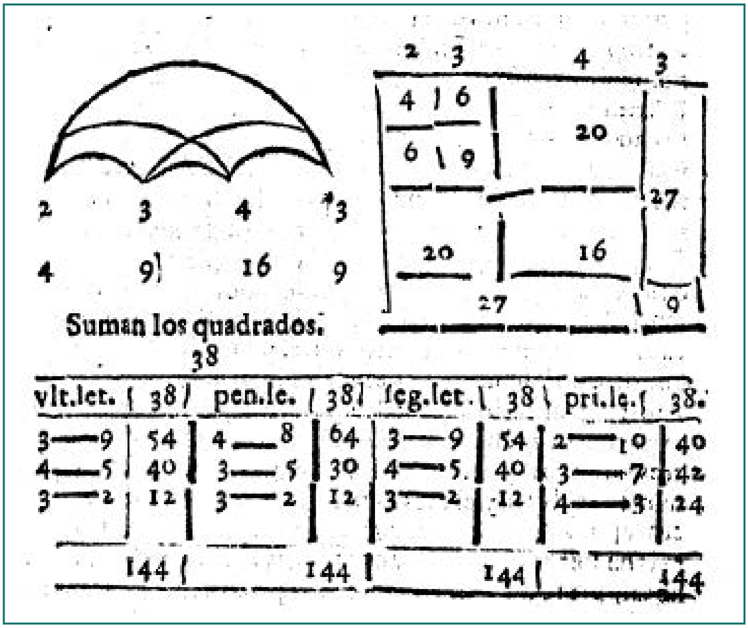


Figura 7. Gráficas mixtas.

SI con 24.ducados en 4.meſes gano 50. ducados,con 150 ducados,y en 5.meſes que ganarè reſpetiuamente.Pare-

Figura 8. Ejemplo de fenómeno contable.

SI huuieſſes comprado,o vendido 5. varas de lienço por ¾ de ducado a como ſale la vara: agora has de partirlas

Figura 9. Ejemplo de fenómeno comercial.

TRes compañeros compraron vna partida de cochinilla por 120. ducados,en que el primero puſo 26. ducados que tenia. El ſegũdo puſo 36 ducados. Y el tercero puſo 58 ducados,los quales compañeros quando vẽdierõ ſu cochinilla,hallaron que auia ganado 600.ducados , horro el caudal.Preguntaſe,quãtos ducados ha de auer cada vno de los cõpañeros de ganãcia,reſpeto del dinero que metio en la compañia,haras aſsi,diſpon los tres numeros de duca

Figura 10. Ejemplo de fenómeno de repartos.

2. Auos de vn cahiz de trigo quantas hanegas valen, nota, que el cahiz en Caſtilla tiene doze hanegas, y la hanega es doze almudes, y el almud es quatro quartillos, haras

Figura 11. Ejemplo de fenómeno de medida.

de tal 64. lo miſmo de vn paño Frances, que fueſſe quadrado en perfecion, el qual tendido y deſplegado tuuieſſe 16. anas en toda la area ſuperficie y cantidad, dixeramos que el tal paño tendria por rayz 4. anas, que ſe entiende 4. anas de cayda, y 4. de amplaria, y anſi multiplicando la rayz por ſi miſma, o longitud por latitud, montara tanto como todo el paño tiene anas, porque 4. vezes 4. ſon 16.

Figura 12. Ejemplo de fenómeno geométrico.

Dos ducados valen 750. mrs. quiero ſaber, que valen 10. ducados en oro, añade vn cero, y montan 7500. quie-

Figura 13. Ejemplo de fenómeno de cambio monetario.

VN hombre tiene plata de 7. dineros de ley, y otra de 11. dineros de ley, quiere hazer plata de 10. dineros de ley. Preguntaſe, que cantidad de plata tomarà de cada ley de aquellas, para que juntas y ligadas, ſea de los dichos diez dineros de ley, diſpon los numeros en figura, y nota la pratica della.

Figura 14. Ejemplo de fenómeno de aleaciones.

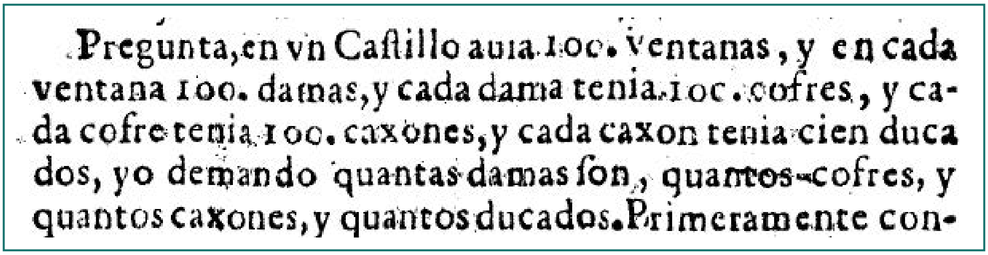

Pregunta, en vn Caſtillo auia .100. ventanas, y en cada
ventana 100. damas, y cada dama tenia .100. cofres, y ca-
da cofre tenia 100. caxones, y cada caxon tenia cien duca
dos, yo demando quantas damas ſon, quantos cofres, y
quantos caxones, y quantos ducados. Primeramente con-

Figura 15. Ejemplo de fenómeno de juegos.

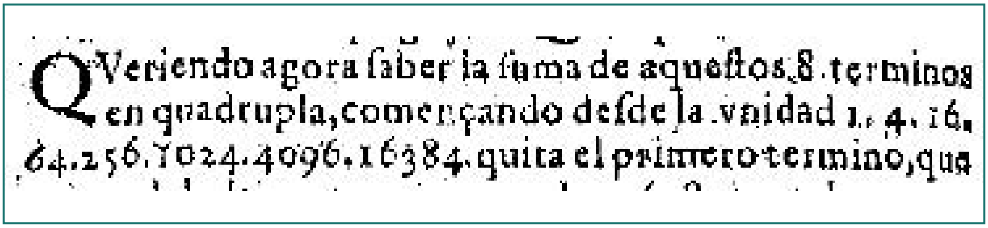

QVeriendo agora ſaber la ſuma de aqueſtos .8. terminos
en quadrupla, començando deſde la vnidad 1. 4. 16.
64. 256. 1024. 4096. 16384. quita el primero termino, que

Figura 16. Ejemplo de fenómeno aritmético.

todos los pasos, si bien en algunos casos se proporciona simplemente la solución sin detallarla.

Mapa conceptual:

Finalmente, se presenta el mapa conceptual de contenidos de la obra (Figura 2). Este muestra los dos grandes bloques en los que dichos contenidos se dividen, por un lado el estudio de los números naturales y la realización de diversas operaciones con ellos, y por otro el estudio de las fracciones y la realización de operaciones básicas con ellas. A su vez, estos dos bloques se unen mediante la realización de operaciones en las que se incluyen tanto números naturales como fracciones.

Sistemas de representación

En la obra se pueden encontrar representaciones verbales, numéricas y gráficas.

- **Verbales:** Son el principal sistema de representación en la obra, el autor utiliza las palabras para explicar la mayoría de conceptos y ejercicios.
- **Numéricas:** Las representaciones verbales se combinan en muchas ocasiones con las numéricas. En general en la obra se utilizan números y rayas, y aunque su uso es amplio los convenios que sigue no son los actuales. Por ejemplo en la Figura 4 se puede observar cómo explica Miguel Gerónimo de Santa Cruz los últimos pasos para realizar una multiplicación.

- **Gráficas:** Además de las representaciones verbales y numéricas, aparecen distintas representaciones gráficas: tabulares, geométricas, esquemas y mixtas. El autor recurre en varias ocasiones a las tablas para reforzar las explicaciones (figura 5).

Se incluyen gráficas geométricas representando polígonos básicos que sirven para explicar conceptos relacionados con raíces cuadradas (figura 6).

Aparece también un esquema para explicar la proporcionalidad, y gráficas mixtas en las que se mezclan números con líneas, figuras, etc. (figura 7).

Análisis fenomenológico

A lo largo de la obra se pueden encontrar nueve tipos de fenómenos o situaciones: contables, comerciales, de repartos, de medida, geométricos, de cambios monetarios, de aleaciones, de juegos, y aritméticos (Maz-Machado, López y Sierra, 2013).

Fenómenos contables: Se presentan situaciones en las que se debe determinar una ganancia o una pérdida económica (figura 8).

Fenómenos comerciales: Se plantean contextos de compra y venta de objetos, animales, etc. (figura 9).

Fenómenos de repartos: Estas situaciones requieren de la distribución equitativa de objetos o ganancias, o del uso de la regla de compañía para distribuir la rentabilidad de un depósito o negocio (figura 10).

Fenómenos de medida: Se incluyen aquellos problemas en los que se hallan longitudes de objetos o en los que se deba encontrar la equivalencia entre determinadas medidas utilizadas en regiones geográficas diferentes (figura 11).

Fenómenos geométricos: El autor recurre a ellos cuando establece relaciones entre las raíces cuadradas y la geometría (figura 12).

Fenómenos de cambios monetarios: Se plantean situaciones de equivalencias entre monedas de diversas regiones y países (figura 13).

Fenómenos de aleaciones: El autor presenta ejemplos de aleaciones y ligaduras entre metales según diversas especificaciones dadas (figura 14).

Fenómenos de juegos: Se incluyen problemas referidos a juegos o a matemáticas recreativas (figura 15).

Fenómenos aritméticos: Se trata de problemas asociados con operaciones matemáticas y sin contexto (figura 16).

CONCLUSIONES

La trascendencia e impacto de la aritmética de Miguel Gerónimo de Santa Cruz durante los siglos XVI y XVII, su última reimpresión se realizó 200 años después de la primera publicación, han motivado la realización de este breve análisis sobre ella. En dicho análisis se ha hallado que la obra incluye y desarrolla contenidos similares a los de otras muchas aritméticas de la época.

Estos contenidos se presentan a través de diversos sistemas de representación, aunque los más abundantes son el verbal y el numérico. Si se comparan esta obra con su contemporánea la *Aritmética Práctica* de Juan de Yciar, en esta última se puede encontrar una mayor diversidad de figuras ilustrando los ejemplos y problemas, mientras que en el Dorado Contador solo aparecen figuras geométricas.

Por otro lado, en la obra destaca su carácter fundamentalmente práctico, evidenciado por la gran variedad de ejemplos y situaciones que presenta. Además, desde el punto de vista fenomenológico, muestra una gran variedad de situaciones relacionadas en su mayoría con la vida cotidiana. Se manifiesta por tanto, el propósito de presentar un manual útil para que cualquiera pueda comprender los contenidos básicos de la aritmética y aplicarlos en su vida diaria.

La continuación de este trabajo pasará por realizar un análisis más exhaustivo sobre los conceptos de esta aritmética, y por la comparación entre distintas aritméticas de la época, observando sus similitudes y por supuesto sus diferencias debidas a distintos contextos geográficos, culturales, etc., y teniendo en cuenta sobre todo, las influencias que se produjeron entre los distintos autores.

REFERENCIAS

De Santa Cruz, M.G. (1625). *Libro de arithmetica especvlativa, y práctica, intitvlado, el Dorado Contador, contiene la fineza y reglas de contar oro y plata, y los Aneajes de Flandes.* Madrid: Viuda de Alonso Martín.

Maz, A. y Bracho, R. (2013). *Acercamiento entre la historia de las matemáticas y la educación matemática mediante el análisis de contenido*. En Rico, L., Lupiañez, J.L. y Molina, M. (ed.), *Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática* (pp. 349-358). Granada: Editorial Comares.

Maz, A. y Rico, L. (2007). *Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX*. PNA, 1(3), 113-123

Maz, A. y Rico, L. (2009). *Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations*. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la *Arithmetica Practica* de Juan de Yciar. En Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (eds.) *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro,* 77-84. Granada, España: Editorial Comares.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596). *Revista Brasileira de História da Matemática*, *5* (9), 19-35.

Meavilla, V. (2013). Recreaciones matemáticas en la Aritmética (1512) de fray Juan de Ortega. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 84, 30(2).

Picatoste, F. (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI; estudios biográficos y bibliográficos de ciencias exactas físicas y naturales y sus inmediatas aplicaciones en dicho siglo.* Madrid: Manuel Tello. Recuperado el día 13 de enero de 2015, de http://bibliotecadigital.jcyl.es/i18n/consulta/registro.cmd?id=13965

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (eds.) *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro,* 143-150. Granada, España: Editorial Comares.

Salavert, V. (1990). Introducción a la historia de la aritmética práctica en la Corona de Aragón en el siglo XVI. *DYNAMIS,* 10, 63-91.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors. *For the learning of mathematics.* 7(3), 41-51.

Sierra, M. y López C. (2013). Análisis de contenido en Aritmética y Álgebra en manuales de Formación de Maestros (1839-1971). En Rico, L., Lupiañez, J.L. y Molina, M. (eds.) *Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática,* 375-402. Granada: Editorial Comares.

Smith, D. (1908). *Rara Arithmetica: A Catalogue of the Arithmetics Written Before the Year MDCI, with a Description of Those in the Library of George Arthur Plimpton of New York.* Boston and London: Ginn and Company Publishers. Recuperado el 13 de enero de 2015, de https://archive.org/details/67224711

Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico

Kaouthar Boukafri y Miquel Ferrer
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen: *La resolución de problemas permite a los estudiantes entender las matemáticas como un todo y evitar trabajarlas como bloques de contenidos curriculares separados. A su vez, pasar de hacer ejercicios mecánicos a resolver problemas puede ser confuso para algunos alumnos. En el presente artículo proponemos como complemento del enunciado verbal del problema el uso de material manipulativo o soporte tecnológico en la actividad de enseñanza. Con este fin, presentamos dos ejemplos de problemas de geometría, detallamos la fase de preparación de los problemas, su implementación en clase, y seleccionamos dos alumnos para ilustrar sus resoluciones.*
Palabras clave: *Resolución de problemas; material manipulativo; GeoGebra; actividad de enseñanza; secundaria.*

Resolution of geometry problems with manipulatives or technological support

Abstract: *Problem solving let students understand mathematics as a whole and avoid working with them as separate structures of the curricular contents. At the same time, the transition from working on mechanical tasks to solving problems can be confusing for many students. As a complement to the wording of the problem, in this article we suggest the use of manipulatives or technological support during the teaching activity. With this aim, we show two examples of geometry problems; we give explicit details on the preparation phase of these problems and their implementation in class, and select two students to exemplify their resolutions.*
Keywords: *Problem solving; manipulatives; GeoGebra; teaching activity; secondary school.*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es un elemento relevante del currículo de matemáticas para la educación secundaria obligatoria y el bachillerato en Catalunya (Departamento de Enseñanza, 2007, 2008), ya que actúa como facilitador en el desarrollo de conocimientos y procesos matemáticos del alumnado. Por ejemplo, para bachillerato el currículo establece:

> "La resolución de problemas entendida como un estilo de enseñanza y aprendizaje que facilita la construcción de conocimiento matemático a partir de la experimentación, la búsqueda de regularidades, y la formulación de resultados conjeturales" (Departamento de Enseñanza, 2008).

En este artículo nos preguntamos cómo trabajar la resolución de problemas en el aula de secundaria para conseguir que los alumnos adquieran un aprendizaje competencial. Para ello consideramos relevante que los problemas se puedan resolver siguiendo diferentes estrategias, que relacionen conceptos matemáticos y que permitan diversos tipos de representación.

En concreto, hemos seleccionado dos problemas de geometría para ser resueltos con un material manipulativo o soporte tecnológico. Luego hemos aplicado una sistemática de tres fases centradas en la preparación de la actividad de enseñanza previa a la implementación de los problemas en clase. Finalmente, obtenemos datos de un aula de secundaria y seleccionamos dos alumnos para mostrar cómo resuelven los problemas planteados.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Muchos autores (véase, por ejemplo, Mason, Burton y Stacey, 1988; Pólya, 1981; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985, 1992) presentan distintas consideraciones respecto del término «problema» en educación matemática y las introducen desde múltiples perspectivas. Pólya (1981) considera que "tener un problema significa buscar de manera consciente una acción apropiada para conseguir un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata". Interpretando esta definición se llega a la consideración de que un problema debe cumplir tres condiciones: (a) *aceptación*: la persona o grupo deben aceptar la tarea como un reto y establecer un compromiso formal para resolverla; (b) *bloqueo*: los intentos iniciales no dan buen resultado y las técnicas habituales para abordar la tarea no funcionan; y (c) *exploración*: se indaga en nuevos métodos para resolver satisfactoriamente la tarea.

Como analiza Schoenfeld (1985), diferenciar un verdadero problema matemático de un mero ejercicio es una cuestión compleja y depende en gran medida del sujeto a quien va dirigida la experiencia:

> Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace de esta un problema para aquella persona. La palabra «problema» se utiliza para designar una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Asimismo, esta dificultad debe representar un embrollo intelectual más allá de un mero cálculo. (Schoenfeld, 1985, p. 74)

A diferencia de lo que sucede cuando se resuelve un ejercicio, el proceso de resolución de un problema no suele producirse según unas reglas preestablecidas. El conocimiento y el comportamiento matemático de quien resuelve problemas se puede clasificar en función de: los *recursos* – conjunto de conocimientos matemáticos básicos y necesarios para que el resolutor se enfrente al problema –, las *heurísticas* – técnicas generales de resolución –, y el *control* – la forma como cada persona se enfrenta a la resolución de problemas, teniendo en cuenta los recursos y las heurísticas que conoce – (Schoenfeld, 1985). El cumplimiento, o no, de estos componentes por parte del resolutor es lo que determinará la dificultad del problema. Así, por ejemplo, un sujeto puede presentar unos recursos adecuados y un buen dominio de la heurística, pero la falta de seguridad en su sistema de creencias puede no permitir que alcance la solución del problema. Por tanto, comprender y analizar estos elementos es importante para entender cómo se enfrenta cada resolutor a un problema, pero también para ser capaz de entender las dificultades que se le presentan.

Fases en la resolución de problemas matemáticos

Pólya centró su programa en la idea de un «resolutor ideal» (Pólya, 1981), es decir, un individuo que cuando resuelve un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta la solución. El objetivo del modelo de Pólya era conseguir que cualquier persona, con la ayuda de un tutor, aprendiera técnicas de resolución efectivas y, así, se pudiera convertir en un buen resolutor de problemas. Pólya consideraba que un alumno aprende por imitación y práctica y, por tanto, se debía combinar la orientación del profesor con el uso personal de las estrategias heurísticas. Para ello, presentó una serie de indicaciones con el fin de que el resolutor pudiera afrontar con mayor facilidad el problema y sugirió algunas estrategias que favorecían el proceso de resolución. Además planteó cuatro fases que intervenían en una buena resolución de un problema matemático:

1) *Comprensión del problema*: determinar cuál es la incógnita y cuáles son los datos y las condiciones que hay que satisfacer. Conviene plantearse si datos y condiciones son suficientes para determinar la incógnita, o bien son redundantes o contradictorios. En esta fase puede ser útil hacer un dibujo y/o simbolizar el problema de forma adecuada.
2) *Concepción de un plan*: encontrar la relación entre los datos del problema y la incógnita, y reformular el enunciado si es necesario. Considerar problemas parecidos, más simples, que el resolutor ya sabe resolver.
3) *Ejecución del plan*: comprobar que cada paso que se sigue en la resolución es correcto y, si es necesario, demostrarlo.
4) *Visión retrospectiva* o *revisión de la solución obtenida*: verificar la solución y el razonamiento utilizado. Pensar si se puede obtener el resultado de alguna manera diferente y si la misma técnica de resolución se puede aplicar en otro problema.

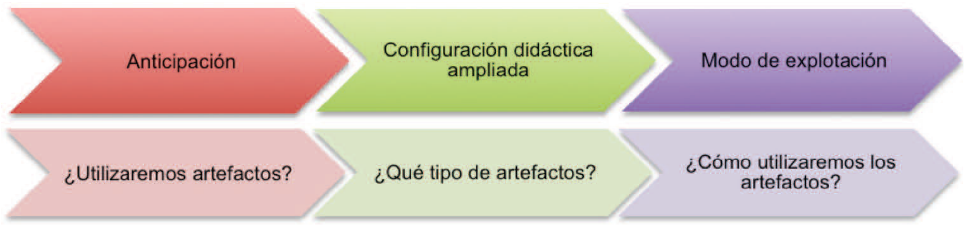


Figura 1: Papel del artefacto en las fases de la sistemática.

Preparación de una actividad matemática

Inspirándose en las discusiones productivas de Stein y Smith (2011) y considerando elementos de la orquestación instrumental de Trouche (2004) y Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010), en Morera (2013) se elaboró una sistemática de seis fases para preparar y gestionar discusiones en gran grupo: *anticipación a través del árbol*, *configuración didáctica ampliada*, *modo de explotación*, *monitorización*, *selección de situaciones* y *secuenciación de la implementación didáctica*. Todas las fases permiten la gestión eficiente de una discusión en gran grupo y pueden contribuir a la creación de oportunidades de aprendizaje matemático para los estudiantes (véase, por ejemplo, Boukafri, Ferrer y Planas, 2015; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014a; Morera, 2013), ya que se potencia la adquisición de habilidades matemáticas de alta riqueza cognitiva, procedimental y de autorregulación. A continuación detallamos las tres primeras fases de la sistemática, las cuales son propias de la preparación de la actividad de enseñanza antes de ser implementada con estudiantes.

1) *Anticipación a través del árbol*: describe la importancia de prever las posibles respuestas de los alumnos, hecho que incluye pensar cómo pueden interpretar la resolución de los problemas y tener un amplio estudio de todas las posibles formas de resolverlos. Para ello se utiliza el «árbol del problema» (Morera, Chico, Badillo y Planas, 2012), el cual se presenta como una herramienta que permite anticipar las estrategias de resolución que seguirán los alumnos en el abordaje de los problemas y sistematizar aspectos que el profesor desea tratar durante la discusión en gran grupo. Para más información sobre la elaboración del árbol del problema, consultar Ferrer, Fortuny y Morera (2014b).
2) *Configuración didáctica ampliada*: consiste en decidir con antelación qué artefactos, manipulativos y/o tecnológicos, entrarán en juego en el aula. La selección de materiales y la utilidad de estos en clase requiere de una minuciosa preparación y estudio previo.
3) *Modo de explotación*: esta fase está íntimamente ligada a la primera, en la que se ha elaborado el árbol del problema. Trata de decidir las actuaciones del profesor cuando gestiona la discusión en gran grupo para guiar a los alumnos y, así, conseguir que estos lleguen lo más lejos posible en la estructura del árbol.

Finalmente, en relación con el planteamiento de la actividad matemática y el aprendizaje competencial es importante preguntarse si, por ejemplo: ¿la actividad ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias curriculares?; o bien, ¿la actividad implica el uso de instrumentos diversos como material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, calculadora, etc.? Además, en relación con la gestión de la actividad en el aula, podemos reflexionar sobre si avanza en la representación de forma que cada vez sea más precisa y se utiliza progresivamente lenguaje matemático más riguroso[1].

Los artefactos

En este artículo entendemos que un «artefacto» es toda herramienta que puede facilitar la interacción entre dos participantes de una clase y ayuda a fomentar el desarrollo de aptitudes, procedimientos y contenidos matemáticos (Ferrer, García-Honrado, Fortuny, 2015). De esta forma, los artefactos favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. En concreto, nos centramos en problemas que se pueden trabajar con artefactos tecnológicos (p.ej., software de geometría dinámica), manipulativos y otros artefactos (p.ej., lápiz y papel, y pizarra ordinaria).

Coincidimos con el documento de las "*Competencias básicas del ámbito de las matemáticas*" (Departamento de Enseñanza, 2013), en que un uso de materiales manipulativos, ya sea material diseñado específicamente u objetos cercanos, es imprescindible para introducir ideas nuevas en clase. Aprender diferentes formas de representar aumentará la flexibilidad de los estudiantes para que se planteen nuevas situaciones y potenciará la confianza de los alumnos.

> "En el camino de lo concreto a lo abstracto hay, como primer paso, la manipulación; es decir, la acción sobre los objetos, y conviene que pese a las dificultades que (…) supone para el maestro o la maestra, no se olvide este aspecto (…) ya que son las acciones las que desencadenan el pensamiento, y sobre las que se pueden construir las representaciones (…). El material que facilitamos al alumnado tiene un papel fundamental." (Biniés, 2008, p. 15).

En relación con la sistemática descrita anteriormente, podemos agrupar las fases en tres momentos (Fig. 1), que nos permiten distinguir el papel que adopta el artefacto en la aplicación de la propia sistemática:

ESTUDIO DE DOS PROBLEMAS. LA RESOLUCIÓN Y PREPARACIÓN DE UN EXPERTO

En esta sección presentamos una propuesta completa de resolución y preparación de dos problemas de geometría desde la perspectiva de un resolutor experto. Para cada problema detallamos la implementación de las fases de *anticipación*, *configuración didáctica ampliada* y *modo de explotación*. Además, hacemos especial referencia al uso de

1. Para más información consultar: <http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/suport-curricular/73-documents-de-suport-curricular/125-indicadors-competencials>

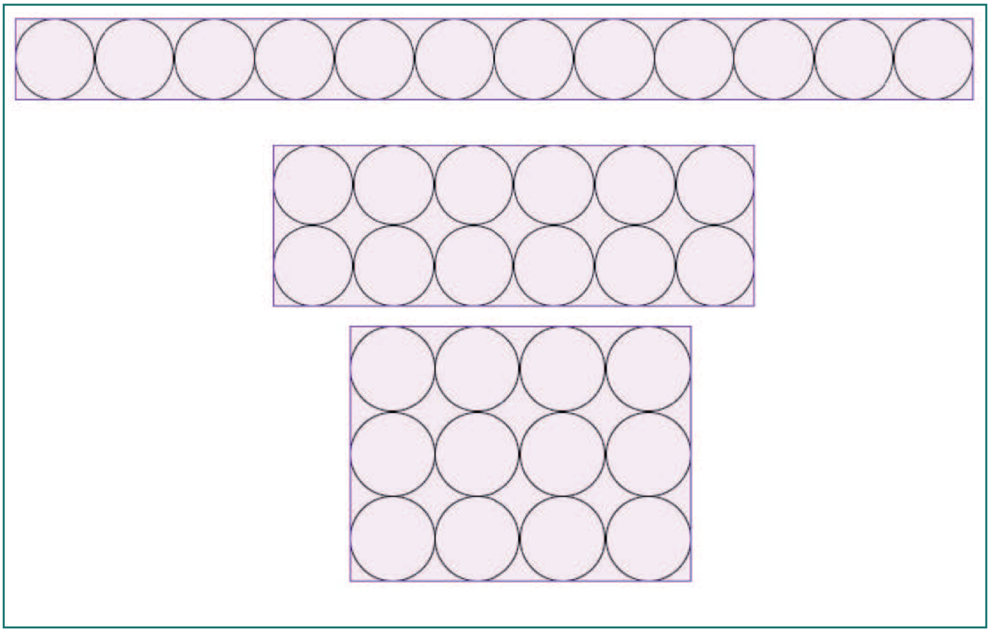


Figura 2: Distribución de los vasos formando cajas

artefactos. En concreto, en el primer problema hemos tomado como artefacto un material manipulativo y en el segundo problema el artefacto consiste en un software de geometría dinámica, el GeoGebra[2].

Problema 1: ¡Empaquetando vasos!

Disponemos de 12 vasos. Cada vaso mide 92mm de altura y 74mm de diámetro del borde por donde se bebe.
Queremos construir una caja lo más económica posible que contenga los 12 vasos.
Además queremos que:
La base de la caja sea rectangular.
Los vasos estén mirando hacia arriba en la caja.
Los vasos no estén situados uno dentro de otro.
Con las restricciones anteriores, ¿qué hace falta minimizar para construir la caja más económica posible? Razona tu respuesta.
¿Qué dimensiones tendrá la caja? Justifica tu respuesta.

Proponemos un problema de optimización de superficies. Durante la fase de *anticipación a través del árbol* discutimos los principales objetivos, que en nuestro caso son:

2. GeoGebra es un programa de geometría dinámica con código abierto y que se encuentra disponible en línea: <http://www.geogebra.org>

(i) estudiar qué elementos influyen en la minimización de la superficie y qué elementos son relevantes; (ii) identificar qué dimensiones caracterizan un ortoedro; (iii) relacionar propiedades en el plano y el espacio; (iv) evitar el cálculo excesivo y reflexionar antes; y (iv) utilizar el material manipulativo para estudiar la viabilidad de las respuestas de los alumnos y, así, poder comprobar si sus propuestas son posibles.

En el árbol del problema (véase el Anexo I), el primer paso es entender las condiciones del enunciado, es decir, ¿qué posición han de cumplir los vasos? Deben estar mirando hacia arriba, no deben estar situados uno dentro del otro y la base de la caja tiene que ser rectangular. Las opciones que resultan consisten en distribuir los vasos formando cajas de 1x12, 2x6 y 3x4 vasos (Fig. 2).

Puede darse la posibilidad de que el estudiante solo identifique una de las posibles cajas que cumplen con las hipótesis del problema. En tal caso se le pedirá una justificación de por qué considera que es la opción óptima.

Las estrategias para resolver el problema pueden ser varias, pero en el árbol consideramos las opciones de centrarse en el área de las paredes laterales (véase E2 en el Anexo I), o en el perímetro de la base (véase E3 en el Anexo I).

Llamamos *d* al diámetro del vaso y *h* a su altura. Si nos centramos en el área, tenemos que la expresión general para calcularla es la siguiente:

$$A_{total} = 2 \cdot (\text{área de la base}) + 2 \cdot (\text{área de la pared lateral}_1) + 2\ (\text{área de la pared lateral}_2)$$

Así, obtenemos que el área de cada caja en función de *d* y *h* es:

Tabla 1: Área total de la caja en función de la distribución de los vasos

Caja	Área total
1 x 12	$2 \cdot (\mathbf{12d^2} + 12dh + dh) = \mathbf{24d^2} + 26dh$
2 x 6	$2 \cdot (\mathbf{12d^2} + 6dh + 2dh) = \mathbf{24d^2} + 16dh$
3 x 4	$2 \cdot (\mathbf{12d^2} + 4dh + 3dh) = \mathbf{24d^2} + 14dh$

Dado que en todas las cajas deben caber 12 vasos, tanto la base como la tapa de todas las posibles cajas van a tener la misma superficie, podemos pues no considerar el valor del área de la base. Indistintamente, con los resultados de todas las áreas queda probado que la caja con menor área es la 3x4 (véase la Tabla 1).

Otra opción consiste en centrarse en el perímetro de la base:

Tabla 2: Perímetro de la base en función de la distribución de los vasos

Caja	Perímetro de la base
1 x 12	$2 \cdot (d + 12d) = 26d$
2 x 6	$2 \cdot (2d + 6d) = 16d$
3 x 4	$2 \cdot (3d + 4d) = 14d$

En la Tabla 2 observamos claramente que la caja con menor perímetro es la 3x4. Dado que la altura de los vasos es constante, igual para todas las cajas, podemos afirmar que la caja que necesita menos material es la 3x4.

También es importante calcular las dimensiones que determinan la caja (véase E4 en el Anexo I). Además hay que realizar la conversión de unidades correspondientes, teniendo en cuenta que los vasos miden 92mm de alto y 74mm de diámetro del borde por donde se bebe.

Así, podemos afirmar que dadas las hipótesis del enunciado la caja más económica es la 3x4 vasos, con dimensiones 222mm x 92mm x 296mm (véase E5 en el Anexo I).

Respecto a la *configuración didáctica ampliada*, en este problema consideramos el uso de artefactos manipulativos: 12 vasos de plástico, cartulina de diferentes colores, papel para que los alumnos desarrollen sus propuestas y la pizarra para que la profesora realice anotaciones para todos ellos. En el desarrollo de toda la actividad, el material manipulativo debe encontrarse al alcance tanto de la profesora como de los alumnos.

Finalmente, proponemos un *modo de explotación* en el que los alumnos trabajen en pequeños grupos o parejas, pero que anoten sus propuestas de forma individual. Repartimos el material entre los diferentes grupos y lo retiramos cuando consideramos que se convierte en un elemento de distracción. El problema está pensado para ser trabajado en una sesión de clase. La profesora dirige una discusión en gran grupo posterior al trabajo por parejas para compartir con el resto de alumnos las diferentes propuestas. También tiene en cuenta las posibles conexiones entre las propuestas usando el material manipulativo como soporte a sus intervenciones. Finalmente, se anima a los estudiantes a revisar sus propuestas, si así lo consideran, y se les da la posibilidad de modificar, corregir y añadir todo aquello que consideren oportuno.

Problema 2: ¡Puntos medios con una intrigante propiedad!

Dada una circunferencia, consideramos un punto, *A*, situado encima de la circunferencia y un punto *B* exterior a ella. ¿Qué cumplen los puntos medios de *A* y *B* cuando desplazamos *A* por encima de la circunferencia? Argumenta tu respuesta.

En lo relativo a la fase de *anticipación a través del árbol*, en primer lugar identificamos los objetivos matemáticos del problema y los enunciamos de la siguiente forma: (i) estudiar la homotecia como un caso particular de semejanza en un problema donde la transformación geométrica queda oculta en la solución; (ii) utilizar triángulos en posición de Tales y el teorema de Tales para argumentar la solución matemática de un problema basado en la homotecia; y (iii) darse cuenta de la importancia de utilizar GeoGebra para conjeturar la solución de un problema y poder realizar la argumentación matemática posterior.

Según el árbol del problema (véase el Anexo II), lo primero que deberían hacer los alumnos es conjeturar la solución (véase E2 en el Anexo II). Para ello, tendrían que representar la situación descrita por el enunciado (Fig. 3) y, a continuación, activar el rastro del punto medio entre *A* y *B*.

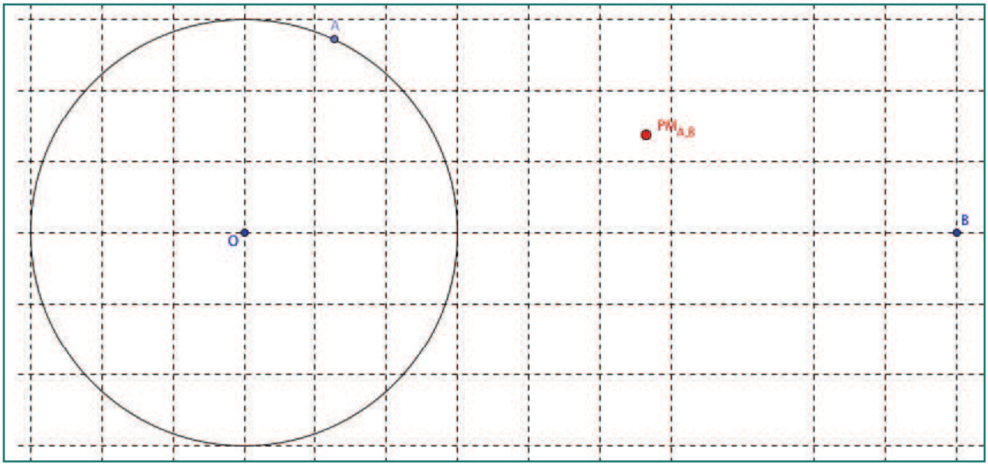


Figura 3: Representación con GeoGebra del enunciado del problema 2

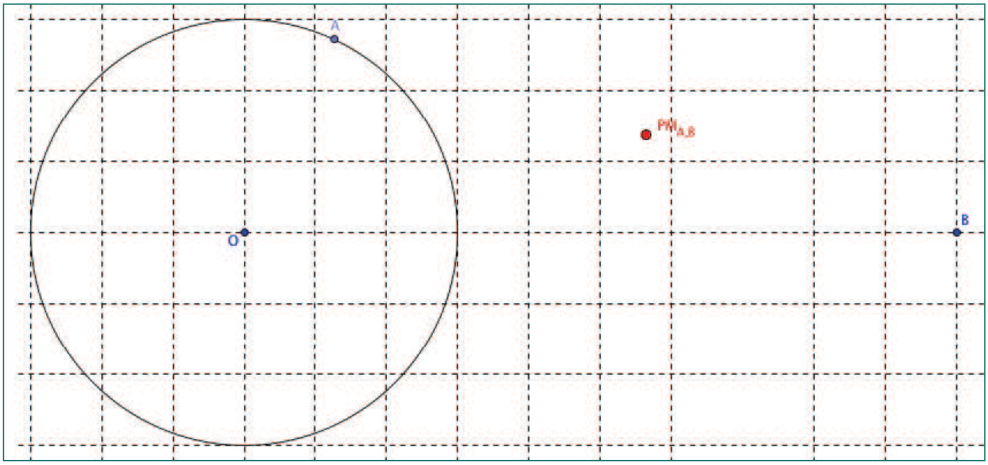


Figura 4: Conjetura de la solución con GeoGebra

De esta forma, los alumnos podrían conjeturar que la solución es una circunferencia más pequeña que la original (Fig. 4). En caso de que un estudiante no sea capaz de realizar la construcción, ya sea por un bloqueo en la comprensión del enunciado o por desconocimiento del funcionamiento del artefacto, el árbol también incluye mensajes de apoyo para ayudar al alumno a seguir con la resolución (véase E1 en el Anexo II).

A continuación, los alumnos deberían preguntarse cuestiones sobre la medida del radio de la circunferencia solución y cómo obtenerla (véase E3 en el Anexo II). En caso de que estas preguntas no se produzcan, el profesor puede formularlas y, así, ayudar a los alumnos a que sigan avanzando en la resolución del problema.

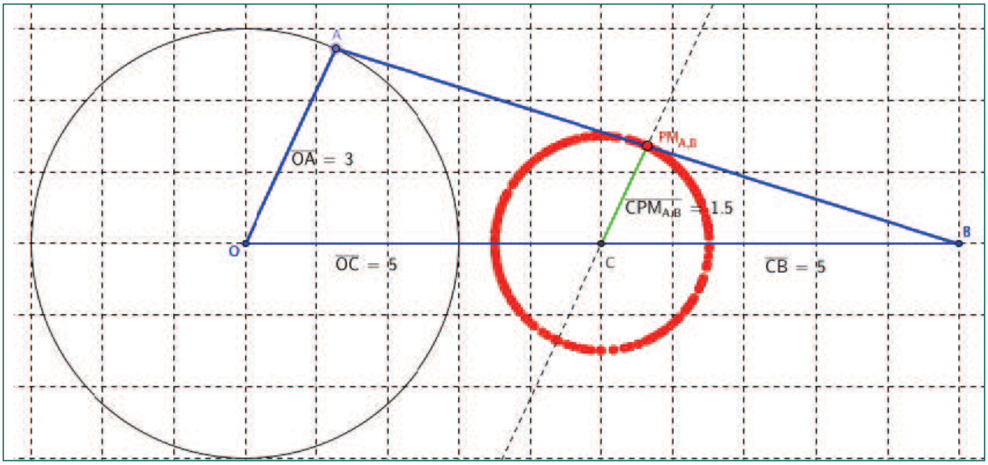


Figura 5: Aplicación con GeoGebra del teorema de Tales

Por último, los estudiantes deberían argumentar la solución conjeturada. A continuación se detalla una construcción que prueba que la solución es una circunferencia homotética a la original y con radio la mitad (véase E4 y E5 en el Anexo I).

Si construimos los triángulos *OAB* y trazamos una paralela a *OA* que pase por el punto medio de *A* y *B* (Fig. 5), observamos que, por el teorema de Tales, esta recta cortará *OB* por el punto medio, *C*. Así, los triángulos *OAB* y $CPM_{A,B}B$ se encuentran en posición de Tales y, como $PM_{A,B}$ es el punto medio de *A* y *B*, por el teorema de Tales, *C* también lo será de *OB*. Entonces, el radio de la circunferencia original, *OA*, será el doble que el de la circunferencia solución:

$$\frac{BPM_{A,B}}{PM_{A,B}C} = \frac{BA}{AO} \leftrightarrow \frac{BPM_{A,B}}{PM_{A,B}C} = \frac{2BPM_{A,B}}{OA} \leftrightarrow \frac{OA}{PM_{A,B}C} = \frac{2BPM_{A,B}}{BPM_{A,B}}(= 2) \leftrightarrow \boldsymbol{PM_{A,B}C = \frac{1}{2}OA}$$

Por tanto, queda probado que la solución de este problema es una circunferencia homotética a la original, con respecto del centro de homotecia *B*, y de radio la mitad.

Respecto a la *configuración didáctica ampliada*, consideramos el uso de dos artefactos tecnológicos: GeoGebra y proyector para visualizar las soluciones en clase. Se considera que los alumnos pueden resolver la actividad directamente en un fichero de GeoGebra y el profesor puede utilizar un proyector para mostrar diversas soluciones durante la clase.

Finalmente, sugerimos un *modo de explotación* que presenta un ciclo de trabajo colaborativo y comprende dos sesiones de clase. En la primera, los alumnos trabajan por parejas, con GeoGebra, y resuelven el problema. En la segunda sesión, el profesor dirige una discusión en gran grupo que gestiona de acuerdo a su criterio profesional. Para ello, debe tener en cuenta las soluciones de los alumnos trabajando por parejas y los elementos descritos en el árbol del problema 2. Luego se pide a los alumnos que reflexionen individualmente sobre la resolución del problema y que incluyan en su fichero de GeoGebra todos los elementos que no habían considerado en la resolución por parejas.

EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA. LAS RESOLUCIONES DE DOS ALUMNOS

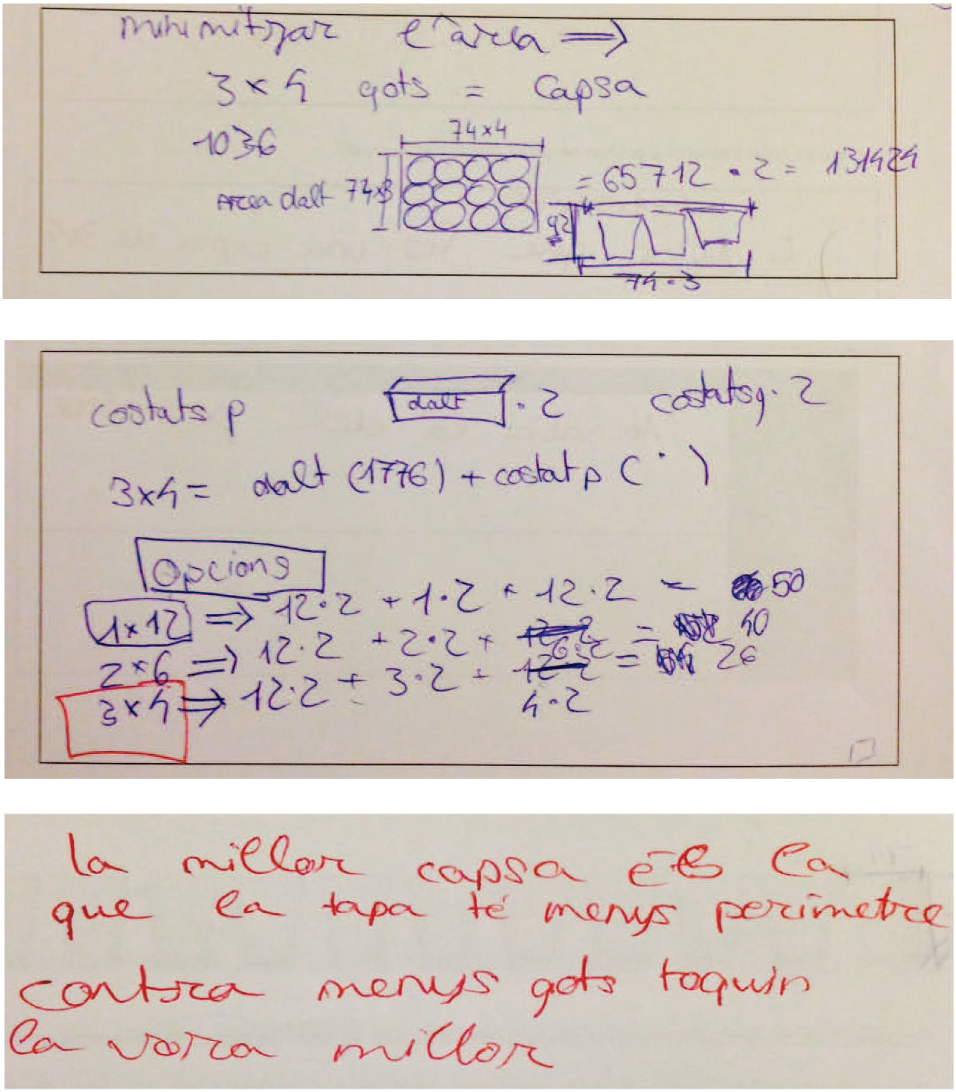
La experimentación de los dos problemas en el aula se realizó en dos clases ordinarias con alumnos de secundaria – 1º de ESO para el primer problema y 3º de ESO para el segundo problema –. El centro educativo donde se obtuvieron los datos pertenece a un ámbito sociocultural medio-alto y cumple con el desarrollo curricular normativo del Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Catalunya. La profesora que gestionó las sesiones de clase era la docente habitual de matemáticas de los alumnos. En el momento de la experimentación, la profesora presentaba ocho años de experiencia docente en el mismo centro de educación secundaria. Para gestionar las clases tuvo a su alcance los árboles de los dos problemas y los comentarios relativos a las fases de *configuración didáctica ampliada* y *modo de explotación*.

En los dos problemas se siguió un ciclo de trabajo que combinaba la resolución por parejas, la discusión en gran grupo y la posterior reflexión escrita e individual de los alumnos. A continuación detallamos las resoluciones finales de Jorge para el primer problema y de Andrea para el segundo problema. Ambas respuestas estaban en el mismo documento o fichero de GeoGebra, y se pidió a los alumnos que escribiesen en dos colores distintos: azul para el trabajo en pareja, y negro o rojo para la reflexión individual.

Jorge y su compañero de trabajo consideraron que la caja más económica, es decir, la que requería menos material, era aquella que presentaba menos área (véase la primera imagen de la Fig. 6). Para justificar su respuesta, estos alumnos realizaron los cálculos detallados en la Tabla 1, tomado d = h = 1 (véase E2 en el Anexo I), y obtuvieron que la caja que tenía menor área era la caja 3 x 4 (véase la segunda imagen de la Fig. 6). Después de la discusión en gran grupo, Jorge recogió en su dossier las propuestas de sus compañeros (véase la tercera imagen de la Fig. 6). La primera propuesta que detalló Jorge se correspondía con la estrategia E3 del árbol del primer problema (véase el Anexo I), la cual consideraba que la mejor caja era aquella que presentaba menor perímetro. En la segunda propuesta, Jorge consideró que cuantos menos vasos estuviesen en contacto con el borde de la caja, menos material sería necesario[3] (figura 6).

En la resolución individual posterior a la discusión en gran grupo del segundo problema, Andrea creó varios puntos encima de la circunferencia original (véase circunferencia de centro *A* en la Fig. 7) y, para cada punto, construyó el correspondiente punto medio respecto de *C*. Así observó que se creaba la silueta de una circunferencia más pequeña (véase E3 en el Anexo II). Luego, con el GeoGebra activó el rastró de los puntos medios e identificó que la transformación aplicada era una homotecia que tenía como centro el punto *C*. Para calcular la razón de semejanza y justificar la elección del centro empleó el teorema de Tales (véase E5 en el Anexo II). Por este motivo, dividió la longitud del segmento *PC* entre la longitud del segmento *FC*, obteniendo que la razón era igual a ½ y el centro de la homotecia se correspondía con el punto *V*.

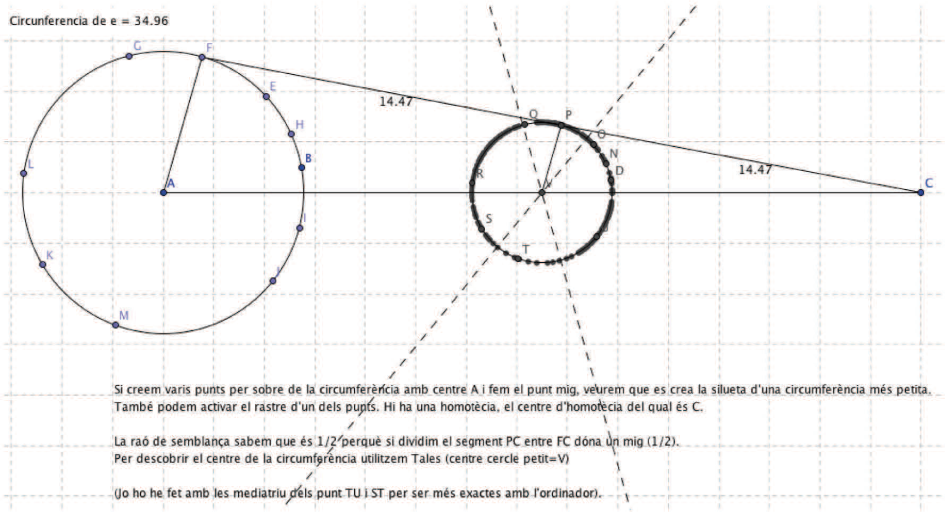
3. Durante una entrevista realizada a Jorge, posterior a la resolución del problema, el alumno nos indicó que no había considerado la opción de minimizar el perímetro.



Notas:

1. Minimizar el área.
2. La caja solución es la caja 3 x 4 vasos.
3. La mejor caja es la que la tapa tiene menos perímetro. Cuantos menos vasos estén en contacto con el borde mejor.

Figura 6: Fragmento de la resolución de Jorge para el primer problema



Notas:
1. Si creamos varios puntos por encima de la circunferencia con centro A [izquierda] y hacemos el punto medio, vemos que se crea la silueta de una circunferencia más pequeña. También podemos activar el rastro de uno de los puntos. Hay una homotecia, el centro de homotecia del cual es el punto C.
2. La razón de semejanza sabemos que es ½, porque si dividimos el segmento PC entre FC obtenemos ½. Para descubrir el centro de la circunferencia utilizamos Tales (centro del círculo más pequeño = V).

Figura 7: Resolución final de Andrea para el segundo problema.

CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo principal de este artículo era estudiar cómo la resolución de problemas en el aula de secundaria favorecía que los alumnos adquiriesen un aprendizaje competencial. Para ello, hemos mostrado que una buena selección de problemas competenciales permite que emerjan diferentes estrategias de resolución, procesos y conceptos matemáticos en el aula. Además, anticipar la actividad matemática en clase favorece que el profesor pueda aproximarse a los procesos de resolución de los estudiantes y realizar conexiones entre ellos.

En relación con las cuatro fases propuestas por Pólya, el profesor puede ofrecer ayudas en función del estadio en el que se encuentra la resolución del alumno, evitando así explicar directamente la solución del problema. Por ejemplo, es diferente el tipo de ayuda que el profesor puede ofrecer a un alumno que no entiende las condiciones del enunciado del problema, o bien la ayuda que debe proporcionar a un estudiante que no recuerda la fórmula del perímetro de un círculo. En este punto el artefacto facilita que el profesor identifique la interpretación del enunciado del problema que realiza cada alumno y los procesos que siguen en su resolución.

La preparación de los problemas que se realizó antes de la implementación en el aula tuvo repercusión en las resoluciones finales de los alumnos. Tanto Jorge como Andrea fueron capaces de resolver satisfactoriamente los problemas. Los alumnos iniciaron la resolución manipulando el artefacto, hecho que les condujo a abordar el problema centrándose en una estrategia concreta. No obstante, en la discusión en gran grupo se favoreció que los alumnos compartiesen diferentes estrategias, las cuales dependían de múltiples factores. Algunos ejemplos son el tipo de manipulación del artefacto, la gestión de la clase que realizó la profesora o los conocimientos previos de los alumnos. Por tanto, la discusión en grupo se postuló como un elemento clave para favorecer el aprendizaje competencial, ya que los alumnos se centraron habitualmente en la ejemplificación de cálculos aritméticos y omitieron, en sus protocolos escritos, la redacción argumentada del proceso de resolución que habían seguido. Aún así, la reflexión individual posterior a la discusión en gran grupo resultó importante para que Jorge y Andrea incorporasen en sus protocolos escritos nuevas estrategias que no habían considerado trabajando por parejas.

Finalmente, en futuros trabajos será interesante continuar estudiando este tema para determinar hasta qué punto la manipulación es capaz de fomentar las habilidades matemáticas de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por los Proyectos EDU2011-23240 (Miquel Ferrer) y EDU2012-31464 (Kaouthar Boukafri), por las becas FPI BES-2012-053575 (Miquel Ferrer) y BES-2013-063859 (Kaouthar Boukafri), del Ministerio de Economía y Competitividad. Ambos autores son miembros del equipo GIPEAM – Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia SGR2014-972 de la Generalitat de Catalunya.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biniés, P. (2008). *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals: O com fer de les matemàtiques un aprenentatge apassionat.* Barcelona, España: Graó.

Boukafri, K., Ferrer, M., y Planas, N. (2015). Whole class discussion in the context of mathematics problem solving with manipulatives. *Proceedings of the IX Congress of the European Society for Research of Mathematics Education* (en prensa). Praga, República Checa: ERME.

Departamento de Enseñanza (2007). *Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*. Barcelona, España: Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Departamento de Enseñanza (2008). *Decret 142/2008 de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyament del batxillerat*. Barcelona, España: Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Departamento de Enseñanza (2013). *Competències bàsiques en l'àmbit de matemàtiques*. Barcelona, España: Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. Consultar en línea:
<http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_primaria.pdf>

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 213-234.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014a). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 385-405.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014b). Sobre las discusiones en gran grupo: ejemplificación en un problema de semejanza. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *67*, 57-66.

Ferrer, M., García-Honrado, I., y Fortuny, J. M. (2015). Estudio de la calidad de la enseñanza comparando discusiones en gran grupo de tareas de semejanza. *Actas del Cuarto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático* (en prensa). El Escorial, España: ETM.

Mason, J., Burton, K., y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Tesis doctoral no publicada. Barcelona, España: UAB.

Morera, L., Chico, J., Badillo, E., y Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 70*, 9-20.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. Nueva York, EEUU: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

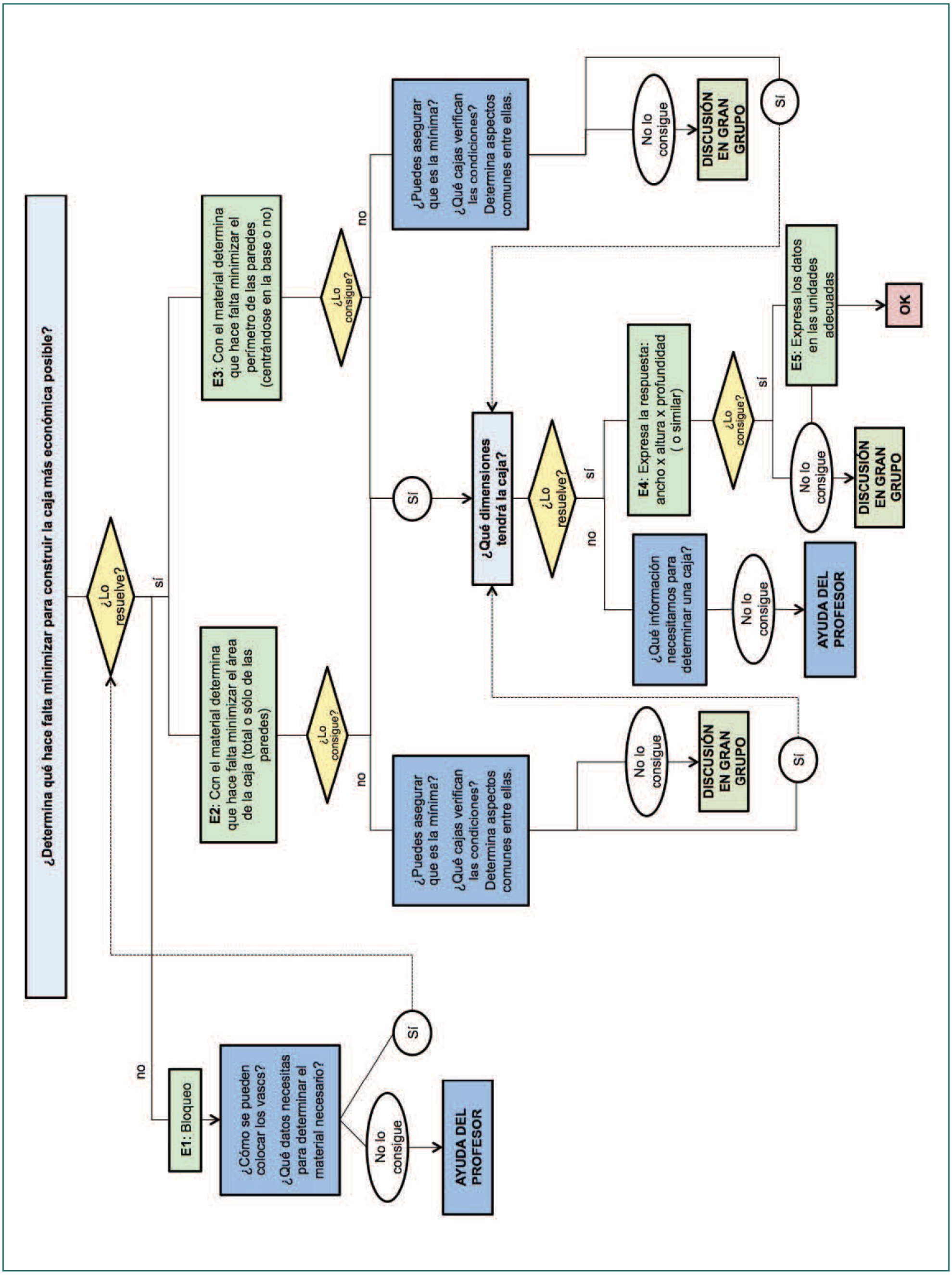
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, EEUU: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En A. D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, EEUU: Macmillan.

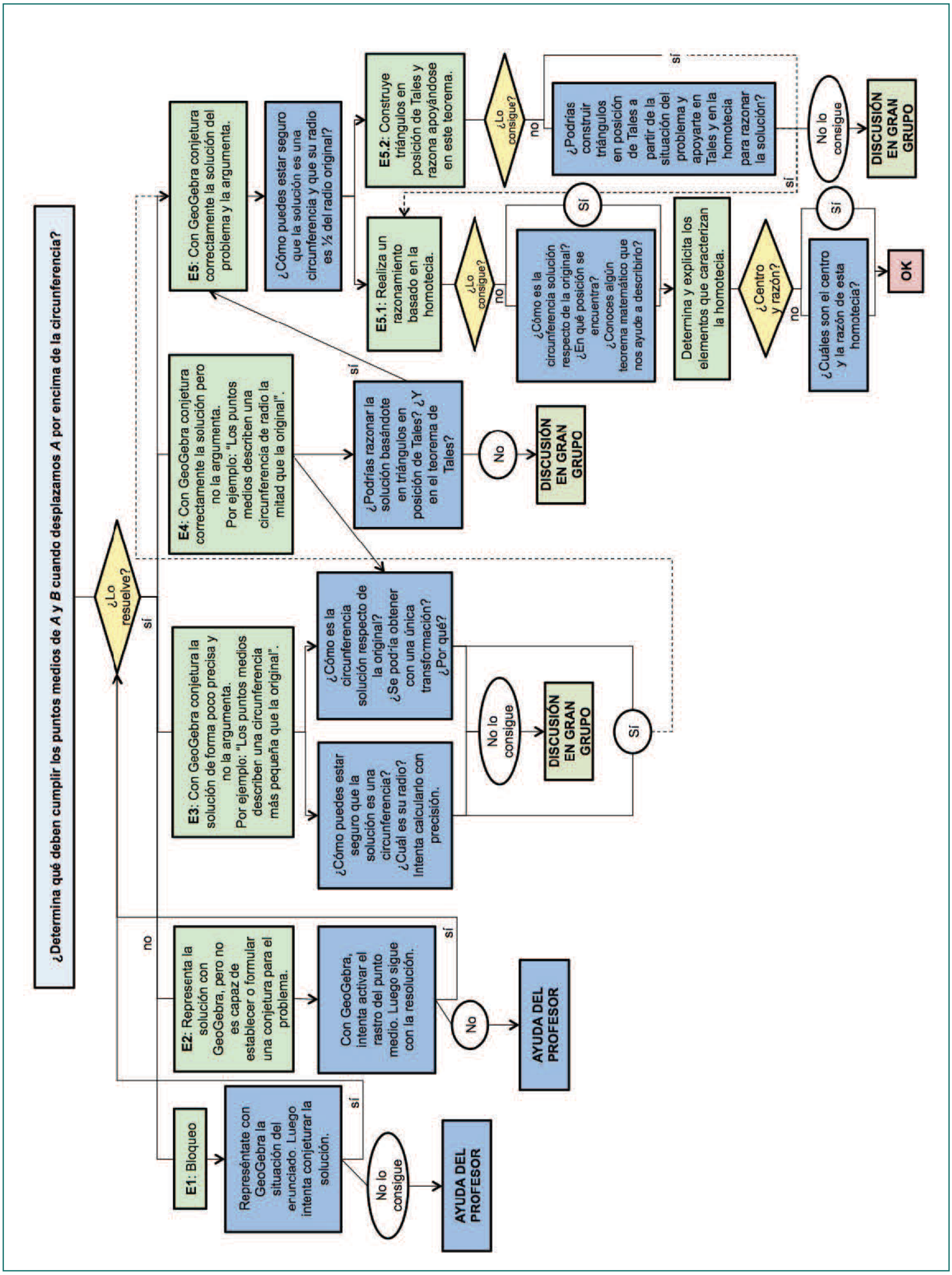
Stein, M. K., y Smith, M. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, Virginia, EEUU: NCTM.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Anexo I: Árbol del problema 1.



Anexo II: Árbol del problema 2.



Propuestas de Innovación para la enseñanza de los números primos

María José Peña Carrilero y María José Madrid
Universidad de Córdoba

Resumen: *Las dificultades que presentan muchos alumnos durante la etapa de la educación secundaria obligatoria en su aprendizaje de contenidos matemáticos han llevado a la aparición durante los últimos años de un amplio grupo de recursos y actividades que buscan facilitar la comprensión de ideas y contenidos matemáticos así como de las conexiones entre ellos. Desde este contexto, este trabajo propone una serie de actividades innovadoras para el trabajo con los números primos que desarrolladas en el aula junto con las actividades habituales pueden favorecer tanto la comprensión de los contenidos de la unidad como el desarrollo de las competencias básicas por parte de los alumnos.*
Palabras Clave: *Educación matemática, números primos, innovación, competencias.*

Innovative ideas for the teaching of prime numbers

Abstract: *The difficulties that many students present during their stage of secondary education in their process of learning mathematical contents have led to the realization during the last years of a large group of resources and activities aimed at facilitating the understanding of mathematical ideas and content as well as the connections between them. From this context, this paper suggests a series of innovative activities to work with prime numbers that if are developed in the classroom along with the usual activities can contribute to both help understanding the contents of the unit and develop basic skills by students.*
Keywords: *Mathematics education, prime numbers, innovation, skills.*

INTRODUCCIÓN

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria incluye en el primer curso de esta y más específicamente en su bloque de números como contenido mínimo la divisibilidad de números naturales y el desarrollo de dicho contenido implica el trabajo con los números primos. La importancia del completo y correcto aprendizaje de estos contenidos es clave tanto por su necesidad en los futuros cursos de matemáticas cómo por su aplicación en diversas áreas. Sin embargo en numerosas ocasiones los alumnos presentan grandes dificultades y cometen números errores al trabajar con ellos.

A su vez, el decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía indica que "con la intención de favorecer el desarrollo de las capacidades del alumnado, se integrarán de forma horizontal en todas las materias las competencias básicas" (p.15).

Considerando las competencias básicas de la educación secundaria obligatoria cómo el: "conjunto de destrezas, conocimientos y actitudes adecuadas al contexto que todo el alumnado que cursa esta etapa educativa debe alcanzar para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la integración social y el empleo" (p.17).

El currículo de la educación secundaria obligatoria deberá incluir al menos las siguientes competencias básicas: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y competencia digital, competencia social y ciudadana, competencia cultural y artística, competencia para aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.

La enseñanza en las aulas debe tener por tanto la doble función de buscar que los alumnos realicen aprendizajes significativos de los contenidos y a su vez desarrollen competencias básicas tanto de carácter personal como social. Con este fin durante los últimos años se ha concedido una gran relevancia a lar realización de experiencias de innovación en el aula, de hecho en el decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía se manifiesta que "la Consejería competente en materia de educación impulsará la investigación, la experimentación y la innovación educativas, incentivando la creación de equipos de profesores y profesoras, así como la colaboración con las Universidades andaluzas" (p.23).

Sin embargo no todas las experiencias docentes son innovadoras, para caracterizar una innovación esta debe suponer una mejora en los resultados obtenidos tanto por profesores como por alumnos, empleando el mismo esfuerzo que antes de la innovación o al menos se deben obtener los mismos resultados en el proceso de enseñanza aprendizaje pero disminuyendo el esfuerzo necesitado (de Haro,2009). En definitiva no importa lo novedosa, diferente o motivadora que sea la experiencia si al ser llevada a cabo en el aula esta no mejora el aprendizaje significativo por parte de los alumnos o al menos permite obtener el mismo resultado de aprendizaje con menos esfuerzo.

Innovar tampoco implica hacer algo nuevo en un sentido absoluto, basta con que lo sea para el que lo ponga en práctica y suponga una mejora significativa en su actividad docente. De nuevo, no es necesario para innovar disponer de grandes presupuestos, ni conocer los últimos recursos tecnológicos, lo importante es seleccionar y utilizar las herramientas, técnicas o recursos nuevos que puedan ser prácticos para el aula y desechar aquellos que no lo son (de Haro, 2009.)

Siguiendo con esta idea de innovación, en este artículo se presenta una propuesta para trabajar las matemáticas en el aula poniendo énfasis tanto en el desarrollo de las diferentes competencias por parte del alumnado durante esta etapa educativa como en favorecer su proceso de aprendizaje de los números primos y su capacidad para realizar conexiones entre este y otros temas. Con este objetivo se proponen varios recursos que se han agrupado en tres grandes ámbitos en los que junto con la competencia matemática, presente en todas las actividades que se realicen en la materia de matemáticas, se pondrá énfasis en el desarrollo de alguna de las otras competencias.

El primer ámbito se refiere a recursos de expresión y comunicación, las competencias que se trabajaran a través de ellos son:

- Competencia en comunicación lingüística
- Competencia cultural y artística
- Competencia en el tratamiento de la información y competencia digital.

El segundo ámbito se refiere a recursos de relación e interacción, las competencias que se trabajaran a través de ellos son:

- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
- Competencia social y ciudadana.

Finalmente el tercer y último ámbito se refiere a recursos de desarrollo personal, en este caso las competencias sobre las que se pondrá énfasis son:

- Competencia para aprender a aprender
- Competencia en la iniciativa personal y espíritu emprendedor

RECURSOS DE EXPRESIÓN Y COMUNICACIÓN

Se plantean cuatro actividades relacionadas con los números primos y en las que junto con la competencia matemática se pondrá especial énfasis en desarrollar alguna de las competencias previamente mencionadas.

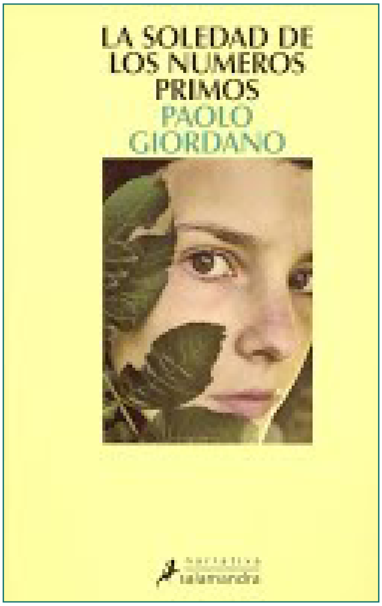


Figura 1. Portada del libro

Brainstorming

Los números primos se trabajan con los alumnos de 1ºESO y los docentes suelen escoger este unidad entre las primeras a desarrollar al principio de curso. Se trata por tanto de alumnos que, en su mayoría, se encuentran en el proceso de transición de la Educación Primaria a la Educación Secundaria y será favorable fomentar su participación en la clase procurando que se sientan cómodos y adaptados al nuevo contexto. Con este fin, se desarrollará una lluvia de ideas (brainstorming) con los principales conceptos a tratar en el tema y buscando recordar los contenidos previos que ya deben conocer de la Educación Primaria y que facilitaran el aprendizaje de los nuevos contenidos. Se potenciará que el mayor número de alumnos posibles participen, expresando con sus propias palabras sus ideas matemáticas y a su vez se anotarán en la pizarra las ideas que vayan surgiendo. Se fomentará por tanto la competencia en comunicación lingüística.

Idiomas y procedencia lingüística

En muchas ocasiones conocer más sobre el significado de una palabra permite comprender mejor su significado, en este caso se comenzará a trabajar con la frase en italiano: "Il due é il primo numero primo".

Se planteará a los alumnos que creen que significa, para después traducirla y centrarse e centrarse en el origen de la expresión lingüística "número primo".

Esta procede del latín primus (cuyo significado es primero) por que estos números son los "primeros" a partir de los cuales se obtienen todos los demás por medio de la multiplicación.

Se tratará en definitiva de una actividad con carácter interdisciplinar en la que se podrá ver la conexión de las matemáticas con materias que los alumnos consideran muy alejadas como lengua e idiomas, y en la que se fomentaran tanto las competencias en comunicación lingüística como la competencia cultural y artística.

Recursos literarios: La soledad de los números primos

Se realizará la lectura del libro *La soledad de los números primos* escrito por el físico teórico Paolo Giordano y publicado por primera vez en italiano en 2008. Se leerán partes del libro relativas con la temática en clase, se debatirá sobre él, fomentando por tanto las competencias en comunicación lingüística y la competencia cultural y artística.

TIC, investigación y autoconocimiento

La actividad consistirá en una búsqueda y selección, ya sea en páginas de internet, en videos, revistas, libros o cualquier otro fuente, de datos históricos y curiosidades sobre los números primos (por ejemplo que el número primo más grande que se conoce tiene 17425170 dígitos), el concepto de divisibilidad o algunas de las otras cuestiones que se hayan explicado en clase. Los resultados seleccionados se comentaran posteriormente en clase, indicando la fuente de dónde se ha obtenido la información. En el caso de que no se disponga en el centro de de medios tecnológicos o de otro tipo para realizar la búsqueda será el profesor el que realice la exposición de datos y curiosidades y los alumnos deberán realizar un comentario u opinión sobre lo que más ha llamado su atención. En esta actividad se desarrollarán las competencias en comunicación lingüística y la digital y tratamiento de la información.

RECURSOS DE RELACIÓN E INTERACCIÓN

Se plantean dos actividades relacionadas con los números primos y en las que junto con la competencia matemática se pondrá especial énfasis en desarrollar alguna de las competencias previamente mencionadas.

Recursos multimedia. La importancia de los números primos y sus aplicaciones en la vida real

En este caso serán la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y la competencia digital y tratamiento de la información las principales a desarrollar.

Video: Los números primos y la criptografía informática

Se reproducirá el siguiente video de 3 minutos de duración:
https://www.youtube.com/watch?v=13FDlSVAdAQ
A continuación se hablará sobre el mismo, destacando los siguientes hechos sobre la seguridad informática:

- Una de las aplicaciones más habituales de los números primos es su uso para la seguridad en Internet.
- Es lo que se denomina criptografía de clave pública (también llamada asimétrica).
- Dos números primos son combinados para generar un sistema de clave pública y privada que permite intercambiar mensajes con seguridad a través de Internet.
- Un conocido algoritmo de encriptación de claves es AES (Advanced Encryption Standard).

Después serán los alumnos los que podrán realizar las preguntas o comentarios que les hayan surgido.

Recursos históricos

En la primera clase de la unidad didáctica se incluirá una sección titulada “Un ápice de Historia”, donde se enseñen de manera breve y concisa aspectos históricos relacionados con la unidad. Algunas propuestas para trabajar con la historia de las matemáticas y los números primos son las siguientes:

Gauss y los números primos

El alemán Karl-Friedrich Gauss nació en 1777 y murió en 1855 y es considerado el príncipe de las matemáticas. Gauss fue un niño prodigio, que desde muy temprana edad destacó por sus habilidades matemáticas. Entre sus muchos trabajos y contribuciones en el campo de las ciencias, destacaremos aquellos relacionados con los números primos (Collette, 1985)

- Durante su etapa en el colegio, formuló la hipótesis del Teorema de los números primos, que describe cómo están distribuidos los números primos en el conjunto de los números naturales. En otras palabras, formalizó el hecho de que el número de números primos disminuya cuando nos desplazamos a números mayores, razonable pues para que un número sea primo no debe ser divisible por ningún número menor salvo 1.
- A los 24 años en su obra *Disquisitiones aritmeticae*, demostró el Teorema fundamental de la aritmética: Todo número natural se puede representar como el producto de números primos de una y sólo una manera. Por ejemplo $12= 2^2 *3$ o $125= 5^3$

Corrigiendo el Calendario

"En la Navidad de 1582, Gregorio XIII atendía distante a un jesuita que estaba visiblemente alterado.

–Ruego a Su Santidad –interpeló el jesuita, Christopher Clavius– me conceda la autorización para justificar el cambio de calendario. ¡Las críticas han llegado al extremo de acusarnos de robarle 10 días al calendario!

Gregorio XIII levantó la cabeza y respondió:

–Eso no es más que un ataque de herejes e ignorantes. La Comisión de Sabios determinó que nuestros cálculos de la duración del año eran erróneos y que nuestro calendario estaba atrasado en 10 días.

El Papa continuó:

–Al 4 de octubre de 1582 le siguió el 15 de octubre, pero no robamos 10 días al calendario sino que recuperamos lo que el calendario anterior tomó sin corresponderle.

De haber seguido así, habríamos terminado por celebrar la Navidad en verano".

Extraído de Matemáticas 1ESO Avanza. Editorial Santillana página 24.

RECURSOS DE DESARROLLO PERSONAL.

Gamificación: El juego en el aula de matemáticas

Siguiendo con la propuesta de innovación en el estudio de los números primos, se ha querido resaltar a De Guzmán (1984) que afirmó: “El juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza.” Por eso a lo largo de esta actividad se plantearán una serie de actividades consistentes en distintos juegos, la mayoría de ellos interactivos, relacionados con los contenidos de la unidad y que favorecen además del desarrollo de la competencia matemática y la competencia digital otras como la competencia para aprender a aprender o la competencia en la iniciativa personal y espíritu emprendedor.

- Juego interactivo para aplicar los criterios de divisibilidad: Number Cop
  http://hotmath.com/hotmath_help/games/numbercop/numbercop_hotmath.swf
- Juego interactivo para identificar números primos: Derriba a los primos
  http://www.ematematicas.net/destructor.php

- Juego interactivo para ayudar a asimilar los conceptos relacionados con los números primos (factores, múltiplos, divisores): Verdadero o falso
http://escritorioalumnos.educ.ar/datos/recursos/juegos/juego-vof/intro.html
- Juego con hojas de dibujo para identificar los números primos del 1 al 100 con facilidad: Juego de números primos
http://neoparaiso.com/imprimir/juegos-de-numeros-primos.html
- Juego deportivo: Se realizarán una serie dorsales que llevaran pintados números primos y compuestos. Cada alumno tomará un dorsal (con su correspondiente número) y deberá encontrar a sus divisores. El profesor tendrá asignado el dorsal número 1. Una vez haya finalizado el juego de localizar a los divisores se comentarán los resultados en clase.

CONCLUSIONES

El trabajo en el aula con los números primos suele realizarse a través de ejercicios y problemas rutinarios que impiden en muchas ocasiones que el alumno alcance un aprendizaje significativo y sea capaz de conectar estos contenidos matemáticos con otros temas. A lo largo de este trabajo se presentan una serie de actividades que combinadas en el aula con las actividades habituales, favorecerán tanto el aprendizaje de los contenidos como el desarrollo de las competencias básicas en los alumnos.

Aunque estas actividades representan una pequeña parte dentro del inmenso número de recursos que pueden encontrarse y utilizarse para trabajar estos contenidos, sí suponen una propuesta de actuación en el aula con un carácter innovador que se puede utilizar para otros muchos contenidos adaptándose a las especificidades de cada uno de ellos.

REFERENCIAS

Ajoy, D. (2014). *Juego de números primos* [Juego para imprimir]. Recuperado de: http://neoparaiso.com/imprimir/juegos-de-numeros-primos.html

Collette, J.-P. (1985). *Historia de las matemáticas II.* Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A.

Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía, BOJA, 156, 8 de agosto de 2007.

Educ.ar. (s.f). *Verdadero o falso* [Juego interactivo]. Recuperado de: http://escritorioalumnos.educ.ar/datos/recursos/juegos/juego-vof/intro.html

Giordano, P. (2009). *La soledad de los números primos*. Salamandra.

De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Santa Cruz de Tenerife. Sociedad Canaria de Matemática Isaac Newton, 49-85.

De Haro, J.J. (2009). Algunas experiencias de innovación educativa. *ARBOR ciencia, pensamiento y cultura*, CLXXXV Extra, 71-92.

Hotmath, Inc. (s.f.). *Number Cop* [Juego interactivo]. Recuperado de: http://hotmath.com/hotmath_help/games/numbercop/numbercop_hotmath.swf

Pino, M. (s.f). *Derriba a los primos.* [Juego interactivo]. Recuperado de http://www.ematematicas.net/destructor.php

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, BOE, 5, 5 de enero de 2007, 677-773:
http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf

Redes, Divulgación y Cultura. (8 octubre, 2013). *Los Números primos y la criptografía informática* [Archivo de video]. Recuperado de:
https://www.youtube.com/watch?v=13FDlSVAdAQ

Varios Autores. (2011). *Matemáticas 1ESO Avanza.* Madrid: Santillana.

Resolución de operaciones matriciales con papel

Josué Francisco Gracia Rodríguez
Alumno de Master de la Universidad de Córdoba

Resumen: *A lo largo de los años se han utilizado toda clase de métodos tradicionales para que los alumnos de los diferentes centros comprendan las propiedades de las matrices y su utilidad. En este artículo se ofrece un método alternativo e innovador con la que enfocar el cálculo de los determinantes de una matriz y el cálculo de la matriz traspuesta.*
Palabras Clave: *: Innovación docente, Matrices, didáctica de la matemática*

Resolution of matrix operations with paper

Abstract: *Over the years we have used all kinds of traditional methods for students from different schools understand the matrix properties and its usefulness. In this article we give an alternative and innovative method with which to approach the calculation of the determinants of a matrix and the calculation of its transposed.*
Keywords: *Teaching innovation, Matrix, mathematics education,*

MARCO TEORICO

Basándome en el artículo *historia del álgebra*.

El origen de las matrices surge antes de cristo, estudiándose tanto los cuadrados latinos como los cuadrados mágicos. El primer cuadrado mágico que se registra, 3 por 3, fue en la literatura sobre el 650 a. C.

Su principal uso a lo largo de la historia se debe a la resolución de ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (Jiu Zhang Suan Shu), es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas. El concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de que el matemático japonés Seki Kōwa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693 lo publicaran.

Por otro lado, los *cuadrados mágicos* se estima que eran conocidos por matemáticos árabes desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India. Esto nos hace pensar que la idea provino de China. Los primeros *cuadrados mágicos* de orden 5 y 6 se registraron en Bagdad en el 983, en la Enciclopedia de *la Hermandad de Pureza (Rasa›il Ihkwan al-Safa)*.

Más tarde, a finales del siglo XVII, Seki Kowa y Leibniz desarrollarían la teoría de los determinantes para facilitar la resolución de ecuaciones lineales, Cramer, por su parte, presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer (teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes).

En 1848/1850, James Joseph Sylvester utilizó por primera vez el término *matriz*. En 1857, Cayley introdujo la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

En 1925, Werner Heisenberg redescubre el cálculo matricial fundando una primera formulación de lo que iba a pasar a ser la mecánica cuántica por lo que se le denominaría el padre de la mecánica cuántica. Olga Taussky-Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

Resumiendo, Cayley, Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius, Olga Taussky-Todd y John von Neumann son algunos de los matemáticos que trabajaron sobre la teoría de las matrices.

Pero con toda esta historia, ¿Qué dice el **currículum** español a cerca de las matrices?

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, publicada en el BOE número 3 del 3 de Enero del 2015, establece en la página 388 y 421 de dicho boletín que tanto las matemáticas para ciencias sociales como para las de ciencias tendrán como estudio las matrices en el bloque de álgebra para el curso de 2º de bachiller.

En cuando a **innovación** se refiere: el BOJA en la Resolución de 12 de enero de 2015, de la Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado, por la que se regulan las medidas de aprobación y acreditación de proyectos de investigación e innovación y desarrollo curricular, y de elaboración de materiales curriculares y recursos didácticos.

Los criterios de evaluación por tanto se definen como:

- Interés educativo del proyecto atendiendo a la mejora de los rendimientos escolares del alumnado y al carácter integrador.

Proponer la introducción de cambios innovadores en la práctica docente o en la vida del centro para la mejora de los resultados y de los procesos educativos del centro, ya sean de tipo curricular, organizativo o función.

Propuesta

Las matrices son utilizadas sin darnos cuenta a lo largo de nuestra vida en infinidad de cosas, por ejemplo, las personas que tienen una empresa con varias sedes y en cada una de ellas se venden varios productos. Este ejemplo es el más característico ya que cada tienda podría responder a una fila y cada columna al precio de los diferentes productos que se ofertan en dicha tienda. Por tanto, daría lugar a un sistema de ecuaciones lineales, donde para su resolución necesitaríamos los determinantes.

Basándonos en la teoría de los determinantes:

- *Dada una matriz cuadrada de orden 3, se llama determinante de A y se representa con |A| al número:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}| = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + * a_{13} * a_{21} * a_{32} - (a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{12} * a_{21} * a_{33} + a_{11} * a_{23} * a_{32}$$

Tradicionalmente, esta explicación y su respectiva ecuación se obtenían tras realizar una serie de líneas sobre la matriz que en muchas ocasiones dificulta su comprensión. La propuesta que se propone para abordar este problema desde un punto de vista más innovador es la siguiente:

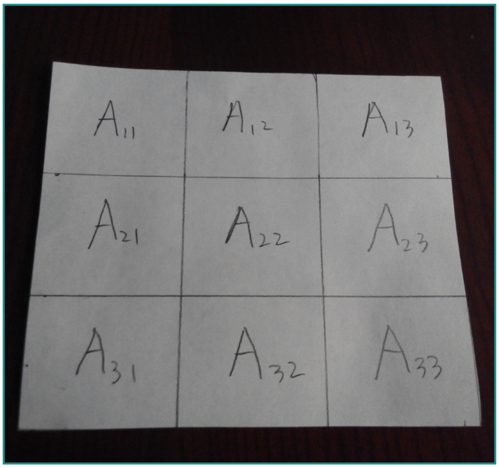


Figura 1.

Representaremos la matriz a averiguar el determinante en un folio, sería conveniente que dicha representación abarcara todo el folio o papel utilizado para ello. A continuación, plegaremos dicho folio formando un cilindro. Por tanto, la columna final o *n* estará precedida por la columna inicial o 1. Una vez acabado solo tendremos que usar diagonales completas, entendiendo este término con que no existirán saltos entre columnas, para obtener la misma fórmula que la anteriormente comentada. La figura1 nos muestra la matriz de prueba, mientras que la figura 2 mostraría el resultado obtenido al construir el cilindro con papel.

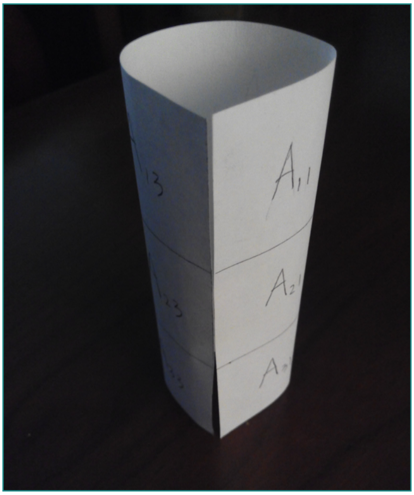


Figura 2.

La segunda propuesta que se plantea es para el calcular la matriz traspuesta. Antiguamente la trasposición se usaba como medio de criptografía para enviar mensajes. Este método fue utilizado por los éforos espartanos, denominado Escítala, y se basaba en la trasposición de dichos mensajes.

Figura 1.

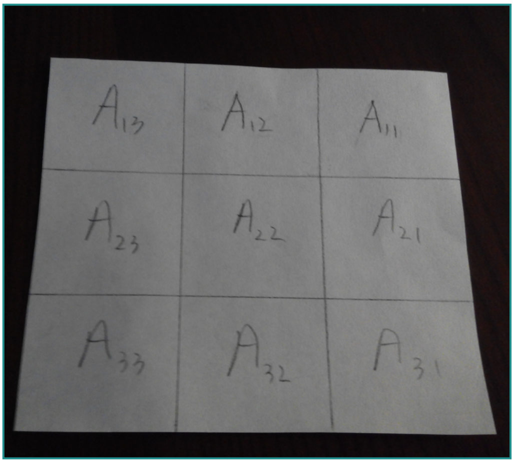


Figura 3.

En el caso de las matrices, la trasposición que se utiliza es de 90º, para hacerlo más visual y conseguir una mayor comprensión de dicho proceso se propone como medio de innovación la utilización de un papel de cebolla donde representamos la matriz o en su defecto un folio donde ambas caras poseerán la misma matriz de tal forma que por una cara tendremos la matriz y por la otra cara tendremos dicha matriz vista desde un espejo. La figura 3 muestra la matriz vista desde la cara contraria.

Tras tener representada dicha matriz bastará con realizar un giro al material utilizado para la representación (folio, papel de ajo, etc), dicho giro será de 180º sobre la diagonal principal pasando de ver la cara *A* a la cara *B* de dicho material. La ilustración siguiente muestra el resultado obtenido al girar la matriz principal (Figura 1) como se comentaba.

Este método servirá para cualquier tipo de matriz (cualquier dimensión) y ayudará a evitar posibles fallos en la transición de los datos. Por ejemplo, si tenemos una matriz de 3x6 podemos cometer el error que un elemento de la matriz se coloque en una posición contraria a la que debería, pero con este método no ocurrirá nunca.

CONCLUSIÓN

Con estos 2 métodos que se presentan se ofrece una versión nueva e innovadora a un proceso en ocasiones bastante lioso para los alumnos. Con el primer método conseguimos disminuir el número de líneas para hallar el determinante, hacer el proceso del cálculo más sencillo y más intuitivo, además de ayudar a los alumnos a calcular dicho determinante de una forma más rápida y ágil que de la forma tradicional.

Con el segundo método que se propone, también se consigue una mayor velocidad en el cálculo de la matriz traspuesta y para los alumnos supondrá una perspectiva adicional que les ayude en su comprensión. Además, evitará errores cuando la matriz sea de mayores dimensiones a 3x3.

REFERENCIAS

Luzardo D., Peña A.J.(2006). Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. Divulgaciones Matemáticas. 14 (2),153–170.

Swaney M. (2004). History of Magic Squares. http://arthurmag.com/2004/02/16/na-84/.

Alumnos de nuevo ingreso en ingeniería: un análisis de competencias matemáticas básicas

Ángel F. Tenorio Villalón, Ana M. Martín Caraballo
y Sergio Bermudo Navarrete
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

RESUMEN: *En este trabajo se realiza un estudio estadístico descriptivo de los resultados que el alumnado en el Grado de Ingeniería Informática de la Universidad Pablo de Olavide obtuvieron al resolver las cuestiones que les fueron planteadas en un aprueba inicial, al comienzo del curso académico, donde se planteaban cuestiones para obtener información sobre el nivel de competencias matemáticas básicas a nivel de Secundaria que tales alumnos tenían.*
Además, a mediados del curso, al comienzo del segundo cuatrimestre se realizó una nueva prueba de control para ver la evolución del alumnado en cuestión después de haber cursado un semestre de Álgebra o Cálculo.
Palabras claves: *Prueba de nivel, competencias matemáticas básicas, alumnos Ingeniería Informática.*

Undergraduates students in ingeneering: an analysis of the basic mathematics skills

ABSTRACT: *In this work we present a descriptive statistical analysis of the results that undergraduate student at the Informatics Engineering Degree at Pablo de Olavide University obtained when the solved the questions proposed in an initial exam at the beginning of the academic year, where some basic questions in mathematics were asked to the students in order to obtain some information about their basic mathematic skills level that they had got in the high school.*
As well as, in the middle of the school year, in the beginning of the second term a new control test was conducted in order to see the evolution of our students after finishing the first term of some subjects as Algebra or Calculus.
Keywords: *level test, basic mathematic skills, undergraduates at Informatics Engineering.*

INTRODUCCIÓN

El alumnado universitario de nuevo ingreso está presentando serias dificultades en las titulaciones científico-técnicas a la hora de afrontar las asignaturas de contenido matemático. En ese sentido, se plantea la posibilidad de si el alumnado accede a esas titulaciones con las competencias matemáticas básicas que debería de haber alcanzado al finalizar sus estudios de Educación Secundaria. En ese sentido, el profesorado de Matemáticas del Grado en Ingeniería Informática en Sistemas de Información de la Universidad Pablo de Olavide hemos venido sufriendo esta problemática que se va acrecentando cada curso y hemos procedido a analizar el nivel de la problemática detectada por medio de una prueba de nivelación que permitiera determinar cuáles eran las competencias matemáticas básicas que no se tenían adquiridas al comienzo de sus estudios universitarios.

Hay que tener en cuenta que el paradigma en la docencia universitaria ha cambiado en los últimos tiempos. Concretamente, el énfasis de la actividad docente ha pasado a la evaluación del alumnado, convirtiéndose en una de las principales cuestiones discutidas y trabajadas en múltiples experiencias docentes, que buscan la innovación no solo en la evaluación del alumnado sino también en la metodología docente utilizada por los docentes. Debe tenerse en cuenta que la evaluación por competencias que debe realizarse en los grados conlleva la implantación de metodologías innovadoras con el consiguiente replanteamiento del modelo docente para impartir la docencia y preparar materiales adaptados a este nuevo paradigma. En relación a experiencias previas sobre experiencias innovadoras en ingeniería para evaluar a nuestro alumnado por medio de la adquisición de competencias puede consultarse Martín, Huertas y Dominguez (2007) así ocmo a Tenorio y Oliver (2012).

Pero para poder asegurar la correcta adquisición de competencias en las asignaturas de Matemáticas en los primeros cursos universitarios, hemos de tener en cuenta que existe una cierta desconexión entre las competencias y conocimientos que debería tener un estudiante al finalizar la Educación Secundaria y los prerrequisitos para afrontar con éxito la evaluación en el primer curso universitario. Parte de este problema se debe al planteamiento del Bachillerato, centrado en que el alumnado supere la Prueba de Acceso a la Universidad y no en asimilar las nociones, procedimientos prácticos y razonamiento lógico que se deberían de adquirir al trabajar problemas matemáticos. En resumen, el alumnado llega al primer curso universitario sólo sabiendo repetir ejercicios y no adaptando y aplicando sus conocimientos (i.e. usando competentemente sus conocimientos), que será el paradigma que tendrá que afrontar en universidad para superar las asignaturas.

DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

El estudio se llevó a cabo pasando una prueba de nivel en el primer día de clase de las asignaturas de Cálculo y Álgebra (primer semestre) y se hizo una prueba similar (midiendo los mismos parámetros al comienzo del segundo semestre en la asignatura Métodos Matemáticos para la Ingeniería (MMI en adelante) para comprobar si se observaba alguna mejora en los resultados tras haber cursado un semestre con asignaturas de contenidos matemáticos en la universidad.

Estas pruebas, entre otros, tenía dos objetivos fundamentales: primero, conocer las carencias matemáticas de base que presentaba el alumnado de nuevo ingreso matriculado en las asignaturas; y segundo, hacerles conocedores de sus carencias para poder actuar sobre las mismas. El objetivo de la segunda prueba era el de actuar como control de la realizada al principio de curso y permitía hacer una comparativa en el alumnado que había realizado ambas pruebas.

Las cuestiones incluidas en la prueba de nivel que se les pasó durante el primer semestre pueden observarse en la Tabla 1, mientras que las preguntas incluidas en la prueba de control al comienzo del segundo semestre se recogen en la Tabla 2.

Tabla 1. Prueba de nivel sobre conocimientos básicos realizada en el primer semestre.

1. Realiza la siguiente operación simplificando todo lo posible: $$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{7}{10}=$$	5. Resuelve la ecuación $4x^2 - 1 = 0$.
2. Simplificar la siguiente fracción: $$\frac{\frac{25}{9}}{\frac{20}{27}}=$$	6. Resuelve la ecuación $2x^2 - 8x + 6 = 0$.
3. Simplifica la siguiente fracción: $$\frac{12\quad -12^3}{12^5}=$$	7. Representa gráficamente la función $f(x) = 6 - 2x$.
4. Resuelve la ecuación . $$\frac{3x}{5}+\frac{5}{4}=0\,.$$	8. Deriva la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$.

La pregunta octava se modificó en las dos pruebas ya que hacía referencia a alguna cuestión concreta en relación a conocimientos que debían saber a la hora de afrontar el semestre en cuestión. En el caso del primer semestre, se optó por pedir el cálculo de la derivada de una función polinómica para saber cuántos de los alumnos y alumnas matriculados conocían el concepto y si habían derivado alguna vez. Debe tenerse en cuenta que las funciones polinómicas son las funciones más simples y su regla de derivación suele ser la primera que se estudia (Tabla 2).

Como se ha indicado anteriormente, la última pregunta de ambas prueba no correspondía ya a contenidos relativos al currículo de la ESO, sino que pretendía determinar alguna información sobre el grado de competencia en relación a los contenidos de Bachillerato. A este respecto, en la primera prueba se procedió a plantear una cuestión sobre derivación de funciones, aunque la función propuesta era sumamente fácil de derivar pues consistía en un polinomio de segundo grado. En el caso de la segunda prueba (empleada como control de la anterior para las primeras siete preguntas), esta octava cuestión se centró en detectar las competencias del alumnado al estudiar el signo de una expresión algebraica. Para ello se utilizó una inecuación de segundo grado, en la que el polinomio ya venía factorizado y debían ver cuándo el resultado del polinomio era positivo.

Tabla 2. Prueba de nivel sobre conocimientos básicos realizada en el segundo semestre.

1. Realiza la siguiente operación simplificando todo lo posible: $\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+\frac{5}{7}=$	5. Resuelve la ecuación $9x^2 - 1 = 0$.
2. Simplificar la siguiente fracción: $\frac{\frac{49}{16}}{\frac{63}{12}}=$	6. Resuelve la ecuación $2x^2 - 10x + 12 = 0$.
3. Simplifica la siguiente fracción: $\frac{14^5-14^3}{14^6}=$	7. Representa gráficamente la función $f(x) = 6 - 3x$.
4. Resuelve la ecuación $\frac{2\boldsymbol{x}}{7}+\frac{3}{5}=0$.	8. Resuelve la inecuación $(x - 1)(x + 2) > 0$.

En la primera y segunda pregunta se plantea un ejercicio básico de operaciones con fracciones para ver el manejo que tiene el estudiante realizando estas operaciones, las cuales les aparecerán constantemente en cualquier problema de Álgebra o Cálculo.

En la tercera pregunta se propone la realización de una operación para observar si saben realizar simplificaciones en una fracción, sin necesidad de realizar todas las operaciones. El conocimiento de los métodos de simplificación es fundamental a la hora de realizar operaciones sin calculadora.

En las preguntas cuarta, quinta y sexta, se plantean, respectivamente, la resolución de una ecuación de primer grado, una ecuación de segundo grado sin término de primer grado, y una ecuación de segundo grado con todos sus términos. Con esto se pretende constatar si recuerdan los métodos de resolución de dichas ecuaciones, que les fueron enseñados en la ESO. Dichas ecuaciones les aparecerán continuamente tanto en Álgebra como en Cálculo.

En la séptima pregunta se pide la representación gráfica de la función más sencilla de representar, una recta, con el objetivo de conocer si saben lo que es una función y su representación gráfica. El conocimiento de la representación gráfica de funciones es fundamental en la parte de Cálculo donde se utilizan las integrales para resolver problemas de cálculo de áreas, longitudes de curvas y volúmenes.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS RESULTADOS

Tras haber realizado una breve descripción de la prueba de nivel llevada a cabo al principio del curso y de la prueba de control siguiente, pasaremos a analizar los resultados de dichas pruebas y así poder finalmente realizar una serie de conclusiones a partir de nuestro estudio.

En la Tabla 3 mostramos los estadísticos descriptivos básicos de los resultados en las dos pruebas realizadas. En estos estadísticos se puede ver que en ambas pruebas la calificación media es de aprobado, pero con una gran variabilidad de resultados en vista de los resultados de las calificaciones mínimas y máximas en cada prueba que van desde el suspenso con calificaciones inferiores a 1 y calificaciones de sobresaliente por encima de 9. También se observa que la media sube algo más de 1 punto tras la finalización del primer semestre y haber cursado alguna asignatura de Matemáticas (Álgebra o Cálculo).

Tabla 3. Estadísticos descriptivos básicos de los resultados de las dos pruebas de nivel.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Primera Prueba de Nivel	73	0	10	5,00	2,782
Segunda Prueba de Nivel	53	,60	9,75	6,1396	2,04425
Nº veces matriculado Cálculo	76	1	4	1,55	,823

En la Tabla 4 se muestran una mayor cantidad de estadísticos en relación a los datos que hemos recopilado de las pruebas de nivel. Concretamente, hemos calculado la nota por encima de la cual está el 50% de la población estudiado que resulta ser de 5,25 en la primera prueba y de 6,4 en la segunda, observándose que ha habido una mejora cuantitativa en los resultados después de un semestre. También es significativo que la nota más obtenida en la primera prueba es la de 1,25 (con una desviación estándar de 2,68) mientras que es de 6 en la segunda prueba (con una menor desviación estándar). Resaltar que en la primera prueba el número de aprobados y suspenso es equivalentes siguiendo las calificaciones una distribución normal mientras que las calificaciones en la segunda prueba muestran una asimetría a la derecha por lo que las calificaciones superiores a 5 son mayoría. Es reseñable observar que el 25% de los alumnos que realizaron la primera prueba no superaron los 3 puntos, mientras el 75% del alumnado está por debajo del 7,45% de la puntuación de una prueba que se centraba en competencias y conocimientos mayoritariamente del período de Educación Secundaria Obligatoria. En el caso de la segunda prueba (realizada tras haber cursado un semestre de Matemáticas), se observa que estos indicadores han cambiado cuantitativamente, así, el 75% del alumnado ha superado la nota de 5,27, el 50% ha superado el 6,4 aunque el 25% sigue estando por debajo de 7,47.

PRIMERA PRUEBA

En Tabla 5 se observa nuevamente la calificación media obtenida en la prueba con el valor de la desviación típica obtenida. Todo esto sobre una muestra de 71 estudiantes y concretándolo después en relación con el número de veces que el estudiante se ha matriculado en las asignaturas Cálculo y MMI (en las que se pasó las dos tandas de prueba de nivel) y en relación con las calificaciones obtenidas en Cálculo y Álgebra (las asignaturas de primer semestre).

Tabla 4. Estudio descriptivo completo de los resultados de las dos pruebas de nivel.

		Resultado Prueba 1	**Resultado Prueba 2**
N	Válido	71	53
	Perdidos	19	37
Media		5,1380	6,1396
Error estándar de la media		,31905	,28080
Mediana		5,2500	6,4000
Moda		1,25	6,00
Desviación estándar		2,68833	2,04425
Asimetría		-,079	-,897
Error estándar de asimetría		,285	,327
Curtosis		-,870	,959
Error estándar de curtosis		,563	,644
Rango		10,00	9,15
Mínimo		,00	,60
Máximo		10,00	9,75
Percentiles	25	3,0000	5,2750
	50	5,2500	6,4000
	75	7,4500	7,4750

Tabla 5. Media y desviación estándar de los resultados de la primera prueba y las matrículas realizadas en las asignaturas y la calificación obtenida en el primer semestre.

	Media	**Desviación estándar**	**N**
RESULTADOS PRUEBA 1	5,1380	2,6883	71
VECES MATRICULADO CÁLCULO	1,55	,823	76
APROBADOS CÁLCULO	5,93	,788	13
APROBADOS ÁLGEBRA	6,06	1,024	14
VECES MATRICULADO MMI	1,23	,422	66

Por su parte la Tabla 6 estudia la correlación entre las variables mostradas en la Tabla 5 con el fin de establecer la dependencia entre dichas variables y poder establecer cuáles variables influyen sobre otras. En vista de los coeficientes de correlación de Pearson mostrados, podemos afirmar que existe escasa correlación entre los resultados de la Prueba 1 y el nº de veces que el alumno se ha matriculado en Cálculo. Por otro lado, existe una correlación considerable (aunque no para poder establecer dependencia entre las variables) entre los resultados de dicha prueba con las Calificaciones de Cálculo. En el caso de las Calificaciones de Álgebra, esta correlación existe pero es inferior a 0.5. Una afirmación similar se puede hacer al respecto de la correlación entre los resultados de la prueba y el número de veces en que un alumno se ha matriculado en MMI. En el caso del nº de matrículas que un alumno ha realizado en Cálculo, la correlación con las calificaciones de Cálculo y Álgebra son inversas, aunque débiles. Sin embargo, existe dependencia directa entre ese nº de matrículas y el de la asignatura MMI. Por su parte, las calificaciones de Cálculo y Álgebra tienen una correlación directa de nivel medio (superior a 0.5).

En la Tabla 7 mostramos los estadísticos principales de las respuestas de cada pregunta en la prueba de evaluación de nivel.

Tabla 6. Estudio de la correlación entre las variables indicadas en Tabla 3.

		Resultado Prueba 1	**Nº veces matriculado Cálculo**	**Calificación Cálculo**	**Calificación Álgebra**	**Nº veces matriculado MMI**
Resultado Prueba 1	Correlación de Pearson	1	,117	,646*	,325	,317*
	Sig. (bilateral)		,356	,032	,278	,030
	N	71	64	11	13	47
Nº veces matriculado Cálculo	Correlación de Pearson	,117	1	-,433	-,387	1,000**
	Sig. (bilateral)	,356		,139	,171	,000
	N	64	76	13	14	59
Calificación Cálculo	Correlación de Pearson	,646*	-,433	1	,567	-,200
	Sig. (bilateral)	,032	,139		,240	,635
	N	11	13	13	6	8
Calificación Álgebra	Correlación de Pearson	,325	-,387	,567	1	.c
	Sig. (bilateral)	,278	,171	,240		,000
	N	13	14	6	14	10
Nº veces matriculado MMI	Correlación de Pearson	,317*	1,000**	-,200	.c	1
	Sig. (bilateral)	,030	,000	,635	,000	
	N	47	59	8	10	66

Tabla 7. Estadísticos para las preguntas de la prueba de nivel de principio de curso.

		Ej. 1.1	Ej. 1.2	Ej. 1.3	Ej. 1.4	Ej. 1.5	Ej.1.6	Ej. 1.7	Ej. 1.8
N	Válido	71	71	71	71	71	71	71	71
	Perdidos	51	51	51	51	51	51	51	51
Media		,8979	,5704	,25	,74	,5239	,66	,67	,8204
Mediana		1,2500	,5000	,00	1,25	,5000	1,00	1,00	1,2500
Moda		1,25	,00	0	1	,00	1	1	1,25
Desviación estándar		,51854	,51441	,489	,584	,46536	,608	,582	,59188
Asimetría		-,974	,115	1,542	-,394	,398	-,129	-,160	-,686
Error estándar de asimetría		,285	,285	,285	,285	,285	,285	,285	,285
Curtosis		-,849	-1,601	,477	-1,775	-1,268	-1,978	-1,885	-1,559
Error estándar de curtosis		,563	,563	,563	,563	,563	,563	,563	,563
Rango		1,25	1,25	1	1	1,25	1	1	1,25
Mínimo		,00	,00	0	0	,00	0	0	,00
Máximo		1,25	1,25	1	1	1,25	1	1	1,25
Percentiles	25	,5000	,0000	,00	,00	,0000	,00	,00	,0000
	50	1,2500	,5000	,00	1,25	,5000	1,00	1,00	1,2500
	75	1,2500	1,2500	,00	1,25	1,0000	1,25	1,25	1,2500

SEGUNDA PRUEBA

En Tabla 8, la muestra es de 53 alumnos y se observa la calificación media obtenida en la prueba con el valor de la desviación típica obtenida, concretándolo, al igual que en la Tabla 3 en relación con el número de veces que el estudiante se ha matriculado en las asignaturas Cálculo y MMI.

Tabla 8. Media y desviación estándar de los resultados de la segunda prueba y las matrículas realizadas en las asignaturas y la calificación obtenida en el primer semestre.

	N	Media	Desviación estándar
Resultado Prueba 2	53	6,1396	2,04425
Veces Matriculado Cálculo	76	1,55	,823
Aprobado Cálculo	13	5,93	,788
Aprobado Álgebra	14	6,06	1,024
Veces Matriculado MMI	66	1,23	,422
N válido (por lista)	3		

Por su parte la Tabla 9 estudia la correlación entre las variables mostradas en la Tabla 8 con el fin de establecer la dependencia entre dichas variables y poder establecer cuáles variables influyen sobre otras. En vista de los coeficientes de correlación de Pearson mostrados, podemos afirmar que existe correlación débil entre los resultados de la Prueba 2 y el nº de veces que el alumno se ha matriculado en Cálculo. Por otro lado, existe una correlación fuerte entre los resultados de dicha prueba con las Calificaciones de Cálculo. En el caso de las Calificaciones de Álgebra, esta correlación es casi inexistente. Respecto de la correlación entre los resultados de la prueba y el número de veces en que un alumno se ha matriculado en MMI es débil e inversamente proporcional. En el caso del nº de matrículas que un alumno ha realizado en Cálculo, la correlación con las calificaciones de Cálculo y Álgebra son inversas y moderadas. Sin embargo, existe dependencia directa entre ese nº de matrículas y el de la asignatura MMI. Por su parte, las calificaciones de Cálculo y Álgebra tienen una correlación directa de nivel medio (superior a 0.5).

Por otra parte, en la Tabla 10 se pueden observar los estadísticos principales de las respuestas de cada pregunta en la prueba de control.

Tabla 9. Estudio de la correlación entre las variables indicadas en Tabla 8.

		Resultado Prueba 2	Veces Matriculado Cálculo	Aprobado Cálculo	Aprobado Álgebra	Veces Matriculado MMI
Resultado Prueba 2	Correlación de Pearson	1	-,152	,756	-,018	-,238
	Sig. (bilateral)		,313	,139	,969	,086
	N	53	46	5	7	53
Veces Matriculado Cálculo	Correlación de Pearson	-,152	1	-,433	-,387	1,000**
	Sig. (bilateral)	,313		,139	,171	,000
	N	46	76	13	14	59
Aprobado Cálculo	Correlación de Pearson	,756	-,433	1	,567	-,200
	Sig. (bilateral)	,139	,139		,240	,635
	N	5	13	13	6	8
Aprobado Álgebra	Correlación de Pearson	-,018	-,387	,567	1	.[b]
	Sig. (bilateral)	,969	,171	,240		,000
	N	7	14	6	14	10
Veces Matriculado MMI	Correlación de Pearson	-,238	1,000**	-,200	.[b]	1
	Sig. (bilateral)	,086	,000	,635	,000	
	N	53	59	8	10	66

Tabla 10. Estadísticos para las preguntas de la prueba de control del segundo semestre.

		Ej. 2.1	Ej. 2.2	Ej. 2.3	Ej. 2.4	Ej. 2.5	Ej. 2.6	Ej. 2.7	Ej. 2.8
N	Válido	52	46	46	54	51	51	46	35
	Perdidos	38	44	44	36	39	39	44	55
Media		1,0356	,7478	,4207	1,0676	,9843	1,1186	1,1902	,1186
Error estándar de la media		,05406	,06178	,08621	,05114	,03285	,04118	,03822	,05310
Mediana		1,2500	,7500	,0000	1,2500	1,0000	1,2500	1,2500	,0000
Moda		1,25	1,25	,00	1,25	1,25	1,25	1,25	,00
Desviación estándar		,38986	,41899	,58467	,37582	,23463	,29410	,25919	,31415
Asimetría		-1,933	-,331	,684	-1,950	-,892	-2,655	-4,496	3,002
Error estándar de asimetría		,330	,350	,350	,325	,333	,333	,350	,398
Curtosis		2,567	-,889	-1,575	2,449	,974	7,103	19,382	8,722
Error estándar de curtosis		,650	,688	,688	,639	,656	,656	,688	,778
Rango		1,25	1,25	1,25	1,25	1,00	1,25	1,25	1,25
Mínimo		,00	,00	,00	,00	,25	,00	,00	,00
Máximo		1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
Percentiles	25	1,0000	,5000	,0000	1,2000	,8500	1,2500	1,2500	,0000
	50	1,2500	,7500	,0000	1,2500	1,0000	1,2500	1,2500	,0000
	75	1,2500	1,2500	1,2500	1,2500	1,2500	1,2500	1,2500	,0000

CONCLUSIONES

El estudio realizado pone de relieve que el alumnado de nuevo ingreso presenta dificultades, a veces bastante serias, para afrontar y superar asignaturas de contenido matemático en titulaciones científico-técnicas; es decir, el alumnado que accede a estas titulaciones, en una buena parte, carece de las competencias matemáticas básicas que deberían estar adquiridas y asimiladas tanto en el alumnado proveniente del bachillerato como en aquel que ha cursado estudios de formación profesional de grado superior y ha superado las pertinentes pruebas de accesos.

Una vez que el/la estudiante ha accedido a la universidad y ha cursado una asignatura de contenido matemático durante el primer semestre (tanto habiéndola superando como si no lo ha hecho), se observa una mejoría de los resultados en la segunda prueba de competencias básicas realizada al comienzo del segundo semestre.

El equipo docente de las asignaturas de matemáticas afectadas por este estudio, después de corroborar y documentar empíricamente las carencias que presenta el alumnado en ciertas competencias matemáticas que se consideran básicas, procedió a realizar una seria reflexión sobre esta situación con el fin de plantear diversas acciones que permitieran trabajar en las dificultades que muestra el alumnado y resolver, aunque sea solo en parte, estos problemas.

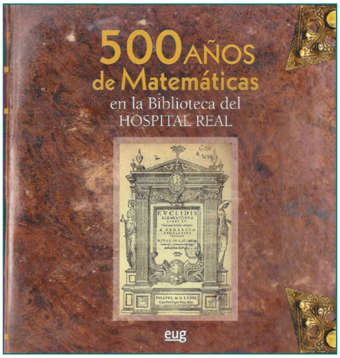
Habida cuenta de que todas las acciones no podían ser llevadas desde las propias asignaturas (seguimiento personalizado del alumnado, asignación de tareas durante el semestre, etc.), se procedió a tener diversas reuniones tanto con la Dirección del centro en el que se imparten estas asignaturas (la Escuela Politécnica Superior) como con el vicerrectorado que tiene las atribuciones relativas a la planificación docente. En dichas reuniones, se tomaron algunas decisiones para el curso 2015/2016 que esperamos puedan influir favorablemente en el alumnado para el curso próximo: Por un lado, se ha decidido dejar solo una asignatura de matemáticas en el primer semestre de primer curso con el fin de suavizar el contacto del alumnado de nuevo ingreso con la titulación y dar la posibilidad que ese primer semestre de contacto solo tenga que afrontarlo con una de las asignaturas (que les resulta de mayor complicación) y no con dos (Álgebra y Cálculo) como venía haciéndose lo que les daba poco margen de reacción al estudiante. Por otro lado, se ha aprobado la implantación de un curso de nivelación de competencias básicas de matemáticas, cuyo objetivo consiste en, una vez detectadas las carencias matemáticas de base presentadas por el alumnado, trabajarlas con ellas durante el primer semestre de modo que sean conscientes de dichas carencias y darles los recursos y asesoramiento necesario para, si no superarlas completamente, reducirlas a un nivel que les permita ser funcionales y operativos en las asignaturas de la titulación.

REFERENCIAS

Martín, A.M., Huertas, J.M. y Domínguez, M. (2007). *La evaluación.com WebQuestions*. Rect@ Vol Actas_15, 616-627.

Tenorio, A.F. y Oliver, E. (2012). Matemáticas sin exámenes finales: Evaluación continua basada en la tutorización personalizada del alumnado. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 35-57.

500 años de Matemáticas en la Biblioteca del HOSPITAL REAL



Editorial: Universidad de Granada
2014
ISBN: 978-84-338-5656-2
122 páginas

La conmemoración del cincuenta aniversario de la creación de la división de Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada motivó, entre otras actividades, la elaboración de este libro que pretende acercar a sus lectores a la colección de libros históricos de matemáticas que esta Universidad posee.

Entre sus páginas se presenta una selección de cincuenta libros de matemáticas pertenecientes a la Biblioteca del Hospital Real de dicha Universidad y que fueron expuestos en ese edificio entre el 23 de mayo y el 4 de julio de 2014.

Los encargados de seleccionar las obras matemáticas para esta exposición, escogieron de entre la amplísima colección de libros que esta biblioteca posee no solo aquellos de más importancia para las matemáticas, si no también textos escritos por matemáticos españoles, o aquellos cuyo autor u obra tenían relación con Granada y su universidad.

En general, para cada libro presentado se incluye una breve semblanza sobre el autor, junto con una pequeña sinopsis sobre la obra expuesta, de la que además se muestran imágenes de su portada u otras páginas.

Las obras incluidas muestran una gran variedad tanto en los períodos y lugares en los que vivieron sus autores, cómo en la temática sobre la que tratan, dentro eso sí de la materia de las matemáticas. Esta diversidad se manifiesta en la posibilidad de encontrar entre las páginas de este libro ediciones procedentes del siglo XVI de las obras de importantes autores griegos como Aristóteles, Euclides o Pappo de Alejandría; junto con autores de los siglos XIX-XX como Julio Rey Pastor, Émile Borel o Juan Antonio Tercedor y Díaz; pasando por otros muchos reputados matemáticos de diferentes periodos como Descartes, Euler o Riemann. Incluso se presenta un libro con los exámenes de matemáticas y lengua francesa que "sufrieron" los alumnos de la Real Maestranza de Caballería de Granada impreso en el año 1798.

En definitiva, este libro es un interesante recorrido por la Historia de las Matemáticas a través de sus textos, que permite apreciar la evolución de esta disciplina y sus libros, y a su vez la importancia de bibliotecas como la del Hospital Real de la Universidad de Granada, que guardan entre sus muros una colección cuyo valor resultaría imposible de calcular.

María José Madrid
Universidad de Córdoba