Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2016, Vol. 33 (3), nº 94, 115-128

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

Cuándo me comprometí con la dirección de la revista en el periplo de colaboración con este rincón, pretendía comenzar una especie de expedición a través del campo de la Geometría y la Teoría de Números, inicialmente, sin abandonar la idea de trabajar en otros estadios de las Matemáticas.

Con respecto a la primera, se trata de un apasionado romance en torno a la ciencia que es capaz de modelizar el espacio que percibimos. Permite también introducirnos en estructuras de pensamiento avanzado: la Geometría trabaja con objetos mentales que no dependen de lo que perciben nuestros sentidos. Además, este recorrido permite tener la ocasión de conocer a una ciencia en la que, a partir de postulados y definiciones tomados como verdaderos, se construye un compacto, firme y sólido edificio de afirmaciones cuya formalidad puede argumentarse.

Por el momento, hasta ahora hemos tratado y trataremos, ejemplos en los que se muestra la Geometría como sólo una de las representaciones del entorno, una manera de modelizar el espacio. Sabemos que existen otras geometrías, que sobresalen del nivel para el que está concebida esta sección, aunque no descarto la posibilidad de abordarlas. Particularmente plantearé ejemplos y figuras susceptibles de ser tratados en dos y tres dimensiones.

Como ya indiqué en trabajos anteriores, trato de incitar al docente a la reflexión relativa a toda la riqueza que gira alrededor de la enseñanza de la Geometría, que actualmente ha levantado el vuelo, gracias entre otras cosas al empuje dado, fundamentalmente, por el uso de las nuevas tecnologías. Iré tratando propiedades, teoremas,..., geométricos que desgraciadamente, han sido junto a la Estadística, campos muy mal tratados por los diseños curriculares desde hace mucho tiempo. No se trata solo de una mera exposición de ejemplos más o menos complicados si no que pretendo que se tome conciencia de que su estudio en el aula no consiste sólo en la transmisión de los contenidos sino en adentrar al alumno en todo un mundo de experiencias en el conocimiento del espacio que percibe y en formas de pensamiento propias de la Geometría.

Con respecto a la segunda, la Teoría de Números, como la rama de las matemáticas puras que estudia las propiedades y de las relaciones de los números, incluye gran parte de las matemáticas, en particular del análisis matemático. La mayoría de sus estudios se han referido y se refieren a ejemplos a los números enteros y, en ocasiones, a otros conjuntos de números con propiedades similares al conjunto de los enteros. Contiene una gran cantidad de problemas que son "cómodamente" entendibles e interpretados por los no matemáticos. Una prueba de ello, son los dos ejercicios que hemos propuesto para su resolución en el número anterior.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ (SOLUCIÓN A LA PROPUESTA 1 DEL NÚMERO ANTERIOR 93)

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

a) *Sea* $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ *un triángulo de área* **S**. *Demostrar que la relación:*

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4S}$$

(Problema propuesto en las Olimpiadas Internacionales de Budapest de 1961)

SOLUCIÓN

NOTA 1: Este es un bello ejemplo en el que aparecen propiedades de los triángulos que no se tratan o no se estudian normalmente en los curricula en nuestro país, salvo trabajos en profundidad que encarguen profesores interesados en la Geometría Euclidiana. Es una buena oportunidad para incidir en algunas relaciones notables de los elementos de un triángulo.

Las relaciones métricas en el triángulo son aquellas que tratan los vínculos entre lados o ángulos, entre los cuales se destaca el Teorema de Pitágoras que es válido exclusivamente en el triángulo rectángulo y se aplica sobre la longitud de los catetos, e hipotenusa, la altura relativa a la hipotenusa y los segmentos determinados sobre ésta como proyecciones de los catetos del triángulo en el teorema del cateto y el teorema de la altura.

Al estudiar las relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo Euclides vio inconvenientes. En un triángulo rectángulo, $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ *¿cuánto debería valer numéricamente el lado* ***a*** *en un triángulo oblicuángul*o? Euclides dio respuesta a estas cuestiones con los dos teoremas:

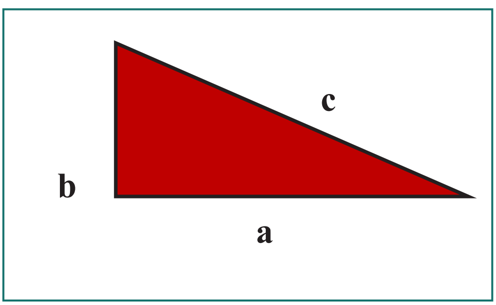


Fig.1. Triángulo Rectángulo.

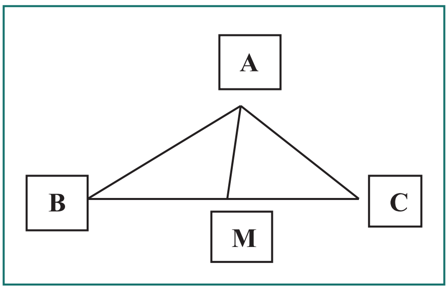
1. El ***primer teorema de Euclides*** para los triángulos oblicuángulos:

"En cualquier triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo equivale a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces uno de ellos por la proyección del otro sobre él".

2. El ***segundo teorema de Euclides*** para triángulos obtusángulos:
   "En cualquier triángulo obtusángulo, el lado opuesto al ángulo obtuso al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos más el doble de la base por la proyección de la altura trazada desde uno de los ángulos menores".

A partir de los teoremas citados se pueden obtener fórmulas para el cálculo de las líneas notables de un triángulo, como por ejemplo el teorema de **Apolonio**, también llamado teorema de la mediana, que relaciona la longitud de la mediana de un triángulo con las longitudes de sus lados:

"En todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente".



$$\mathbf{AB^2+AC^2= (1/2)BC^2+2AM^2}$$

Fig.2. Triángulo Oblicuángulo.

PASO 1

Sea este nuestro caso el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ de área **S**, en la Fig.2. Se tiene según el teorema de Apolonio

$$\mathbf{AB^2+AC^2= (1/2)BC^2+2AM^2}$$

Si se deja **B** et **C** fijos y se desplaza el punto **A** sobre una paralela al lado **BC**, entonces el área **S** queda invariante y $\mathbf{AB^2+AC^2}$ es mínimo para un valor mínimo de **AM**, es decir si **A** se encuentra en la mediatriz de **BC.**

Por lo tanto el problema se reduce a demostrar la desigualdad para los triángulos que sean isósceles en el ángulo en $\hat{\mathbf{A}}$. Sea **h** ahora la altura, **AM**, del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, tomada desde **A**, y sea **a** el lado **BC.**

PASO 2

Tenemos que demostrar que

$$\mathbf{AB^2+ AC^2+BC^2 \geq 4\sqrt{3}\, S}$$

Podemos escribir $\mathbf{AB^2+AC^2= (1/2)BC^2+2AM^2= (1/2)a^2+2h^2}$, Por lo tanto, la desigualdad $\mathbf{AB^2+ AC^2+BC^2 \geq 4\sqrt{3}\,S}$ se puede escribir así $\mathbf{(1/2)a^2+2h^2+a^2 \geq 4(1/2)ah}$ ya que el área del triángulo es $\mathbf{S=(1/2)ah}$.

Es decir, $\mathbf{(3/2)a^2+2h^2 \geq} 2\sqrt{3}\,\mathbf{ah}$. Realizando operaciones y pasando todo a un miembro la desigualdad es equivalente a

$$\mathbf{3a^2+4h^2-4\sqrt{3}\,ah \geq 0}$$

PASO 3

Y esta desigualdad es cierta ya que siempre se cumple porque el primer miembro de la desigualdad es $(\mathbf{2h-\sqrt{3}}\,a)^2$, que evidentemente al tratarse de un cuadrado es siempre mayor o igual que 0.

Se puede verificar que la igualdad a cero se cumple cuando y solo cuando $h=\sqrt{3}\,a/2$ y esto corresponde a los triángulos equiláteros.

NOTA 2. Esta joyita puede ser enfocada de diferentes maneras utilizando la fórmula de Herón, geometría analítica y trigonometría. ¡Lanzo este reto para el lector interesado dirigiéndose para cualquier duda, si lo desea, al e-mail *sapereaudethales@gmail.com*.

b) *¿Existe un triángulo* $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ *tal que la altura desde el vértice* **A**, *la bisectriz del ángulo* $\widehat{\mathbf{BAC}}$ *y la mediana relativa al lado BC dividan al ángulo* $\widehat{\mathbf{BAC}}$ *en cuatro ángulos con la misma medida?*

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ (ver figura 3).

Dibujemos el círculo circunscrito con centro en **O** , **M** el pie de la altura tomada desde el vértice **A** sobre el lado **BC, A´** la intersección de la mediatriz de **BC** con el arco $\overset{\frown}{\mathbf{BC}}$, por lo tanto **A´** está en el punto medio del arco $\overset{\frown}{\mathbf{BC}}$. Entonces:

- Como **AA'** es la bisectriz del ángulo $\widehat{\mathbf{BAA'}}$, entonces $\widehat{\mathbf{BAA'}} = \widehat{\mathbf{A'AC}}$.
- **AM y OA'** son paralelos porque son perpendiculares al lado BC.
- $\widehat{\mathbf{MAA'}} = \widehat{\mathbf{AA'O}}$ por ser ángulos alternos-internos y $\widehat{AA'O} = \widehat{A'AO}$ por ser ángulos en la base del triángulo isósceles $\overset{\triangle}{\mathbf{AOA'}}$.

En función de la propiedad transitiva $\widehat{\mathbf{MAA'}} = \widehat{\mathbf{A'AO}}$, de dónde se deduce que **AA'** es la bisectriz del ángulo $\widehat{\mathbf{MAO}}$ (ver figura 4).

PASO 2

¿Cuál será la respuesta al problema inicialmente planteado?

Para ello es necesario que **AO** se la mediana relativa al lado **BC**, de modo que **O** sea el punto medio de **BC**, por lo tanto ha de ser el centro del círculo circunscrito al triángulo

$\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, y consecuentemente este triángulo debe ser rectángulo en el vértice **A**. Es una condición necesaria pero no suficiente (ver figura 5).

$\widehat{\mathbf{MAO}} = \widehat{\mathbf{B}} - \widehat{\mathbf{C}}$ (Para cualquier triángulo sea rectángulo o no**)**.

Para un triángulo rectángulo:

$\widehat{\mathbf{MAO}}= \mathbf{45^o}= \frac{\pi}{4}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ $= \mathbf{OAC = 22{,}5^o}= \frac{\pi}{8}$, $\widehat{\mathbf{B}}$ $= \mathbf{67{,}5^\circ} = \frac{3\pi}{8}$.

PASO 3

A modo de conclusión, podemos afirmar que existe un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ tal que la altura trazada desde el vértice **A**, la bisectriz del ángulo $\widehat{\mathbf{BAC}}$ y la mediana relativa al lado **BC** dividen a $\widehat{\mathbf{BAC}}$ en cuatro ángulos iguales. Se trata de un triángulo rectángulo en el ángulo **A** tal que el ángulo **C** es igual a $\frac{3\pi}{8}$.

NOTAS ORIENTATIVAS:

a) Como orientación al alumno: hacerle ver que otra solución válida y que se puede obtener, si se trabaja el planteamiento de que los

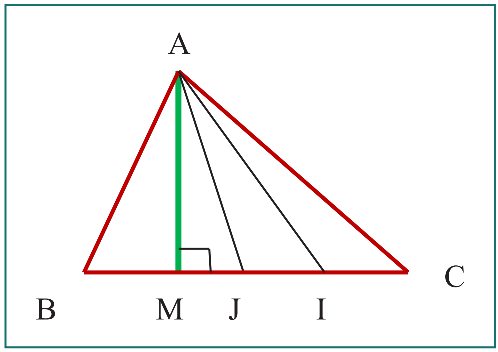


Fig. 3. Triángulo Cualquiera.

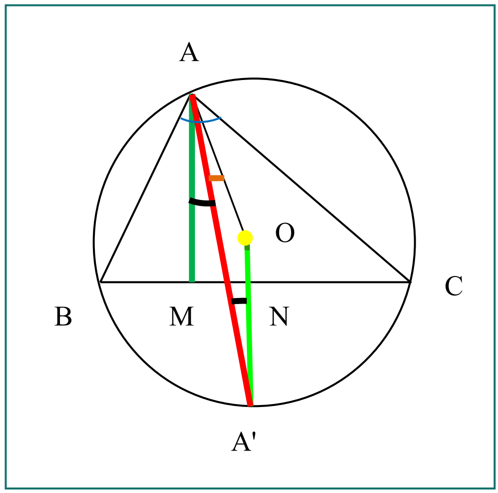


Fig .4. Triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ y Circulo Circunscrito.

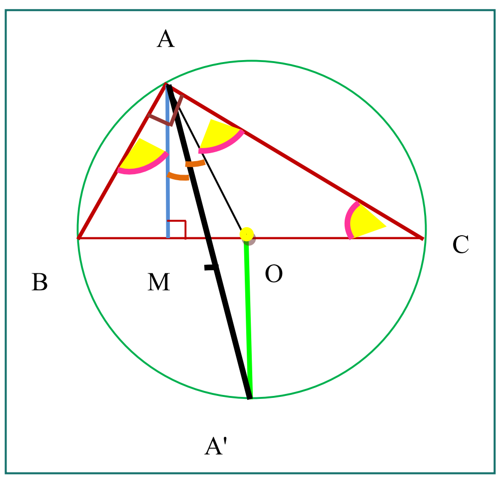


Fig.5. Triángulo Rectángulo en el ángulo $\widehat{A}$.

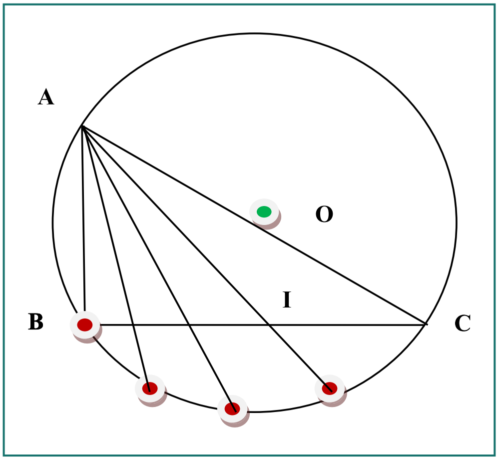


Fig. 6. Círculo Circunscrito al triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$.

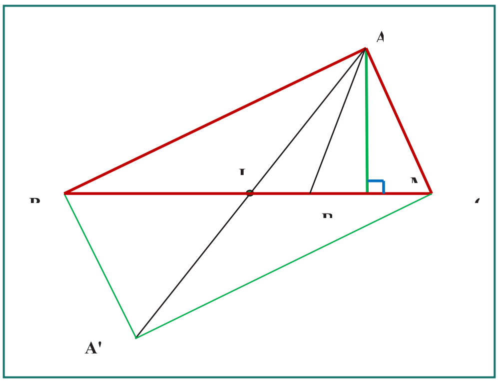


Fig. 7. Rectángulo ABA'C.

cuatro ángulos iguales interceptarán cuatro arcos de la misma longitud sobre el círculo circunscrito al triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ (ver figura 6)**.**

b) Otra idea para obtener la solución consiste en demostrar que el paralelogramo $\overset{\square}{\mathbf{ABA'C}}$, siendo **A'** el simétrico con relación al punto medio del lado **BC**, es un rectángulo (ver figura 7).

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 2 del número anterior 93)

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Sabemos que la teoría de números fue una de las disciplinas de estudio favoritas entre los matemáticos griegos de Alejandría a partir del siglo III a. C., quienes, ya tenían conciencia, por ejemplo, del concepto de ecuación diofántica en sus casos particulares. Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación. Presentamos en este ***sapere aude*** estos dos ejercicios muy interesantes.

a) *Demostrar que, para toda terna de tres números reales,* **{a,b,c}** *cualesquiera se tiene que:*

$$|a+b|+|b+c|+|c+a| \leq |a|+|b|+|c|+|a+b+c|$$

SOLUCIÓN

PASO 1

Notemos en primer lugar que para la terna de números reales ***a, b, c, p, q, r*** **:**

$$a= (1/2)(p+q-r)$$

$$a+b=p;\ a+c=q;\ b+c=r \text{ se tiene que } \Leftrightarrow b=(1/2)(p-q+r)$$

$$c=(1/2)(-p+q+r)$$

De ahí que:

$$| a+b | + | b+c | + | c+a| \leq | a | + | b | + | c | + | a+b+c |$$

realizando operaciones, podamos escribir así:

$$| p | + | q | + | r | \leq (1/2)\ (| p-q+r | + | (-p+q+r))\ | + (1/2)\ (| p+q-r | + |p+q+r|)$$

PASO 2

Nuestro objetivo, a continuación es demostrar esta última desigualdad. Para ello, utilizaremos algunas propiedades de la función valor absoluto: $f(x)= x$.

a) Una de ellas es: $\forall\, x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow | x - y | + | x + y| = 2.\max(|a|, |b|)$ se puede aplicar, por lo que se deduce que en nuestro caso

$\forall p, q, r \in R$, si llamamos $H = (1/2)\ (| p-q+r | + | (-p+q+r) | + (1/2)\ (| p+q-r | + | p+q+r |)$ se tiene que $H= max\ (| r |, | p-q |)+ max\ (| r |, | p+q |)$. Por ello, para todos los números reales p, q, r se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} H \geq | r | + | p-q | \\ H \geq | r | + | p+ q | \end{array}\right. \quad \mathbf{: (i)}$$

b) Utilizando otra propiedad de la función valor absoluto $\forall\ x, y \in R$:

$$|x| + |y| = \begin{cases} |x - y|, sig(x) \neq sig(y) \\ |x + y|, sig(x) = sig(y) \end{cases}$$

para la expresión anterior (i) se tiene $\forall\ p,q,r \in R$:

$$|p| + |q| + |r| \leq H$$

quedando demostrada la desigualdad inicial.

PASO 3

Toda vez que ha sido demostrada esta propiedad se puede proponer al alumno que estudie los casos de igualdad a partir de la expresión (i):

- Si *sig(p) ≠ sig(q)* se tendrá la igualdad sí y solo si

$$|p+q| \leq |r| \leq |p-q|$$

- Si *sig)p) = sig(q)* se tendrá la igualdad sí y solo si

$$|p-q| \leq |r| \leq |p+q|$$

  En definitiva, un resultado interesante en la teoría de números dónde la igualdad se produce si y solo sí **|r|** está comprendido entre **|p − q|** y **|p + q|**, es decir, $\forall$ **a,b,c** $\in$ **R,** si **|a + c|** está comprendido entre **|b − c|** y **|2a + b + c|**.
- También se puede insistir en que la igualdad es evidente si los tres números son del mismo signo o bien si uno de ellos es el cero.
- Eventualmente se podría profundizar si tratamos las permutaciones de las letras (con signos incluidos) que designan genéricamente a los números.

b) *Los enteros positivos* **p** *y* **q** *verifican* $\mathbf{3p^2- 8q^2+3p^2\, q^2=2008}$. *¿Cuál es el valor de* **pq***?*

SOLUCIÓN

PASO 1

Escribamos el primer término de la igualdad $\mathbf{3p^2- 8q^2+3p^2\, q^2=2008}$ así:

$$\mathbf{3p^2- 8q^2+3p^2\, q^2=(3p^2-8)(q^2+1)+8}$$

De aquí se deduce que

$$\mathbf{3p^2- 8q^2+3p^2\, q^2=2008 \Leftrightarrow (3p^2-8)(q^2+1)=2000}.$$

Pero el número 2000 se puede descomponer factorialmente así: $\mathbf{2000=2^4}\times 5^3$.
Utilizando la fórmula para saber cuántos factores tiene un número natural ***n*** sin la necesidad de conocer cuáles son:

$$\forall n \in N \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ......p_t^{\alpha_t} \text{ siendo}$$

- p_i , $\forall$ *i=1,2,3,....t,* número primos tales que $p_i \neq p_j$, $i \neq j$
- α_i , la potencia correspondiente al número primo p_i

Se tiene que el número **D** de divisores de **n** es $\mathbf{D=(\alpha_1+1)\,(\alpha_2+1)\,(\alpha_3+1)........\,(\alpha_t+1)}$

NOTA: En este momento, al alumno se le puede indicar que para calcular el número de divisores también existe el método de la raíz cuadrada. A modo de recordatorio:

1. *Para obtener los divisores de un número n, se obtiene la raíz cuadrada del número, $\sqrt{n}$, exacta (o truncada por defecto, de no ser exacta).*
2. *Se cuenta el número de divisores que son menores o iguales que .*
3. *Multiplica esta cantidad por dos, y si es exacta la raíz se le resta la unidad*

PASO 2

Aplicando lo citado ut-supra se tiene que el número 2000 posee, (4+1)×(3+1)=20 divisores que podemos reagruparlos de dos en dos, y por ello conseguimos los diez pares:

(**1**;**2000**)-(**2**;**1000**)-(**4**;**500**)-(**5**;**400**)-(**8**;250)9
(**10**;**200**)-(**16**;**125**)-(**20**;**100**)-(**25**;**80**)-(40;**50**)

Entre los **20** divisores de **2000**, solo cuatro pueden escribirse de la forma **q^2+1** con **q** natural, son los números:

2, 5, 10 y 50 que corresponden respectivamente a los valores de q

↓ ↓ ↓ ↓

1, 2, 3 y 7

PASO 3

Discutamos a continuación los diferentes casos:

a) $q=1 \Rightarrow q^2+1=2$, y por ello: $3p^2-8=1000$. De ahí que:.

$3p^2 = 1008 \Rightarrow p = \sqrt{\dfrac{1008}{3}} = \sqrt{336} = 18{,}3303...$No conduce a ninguna solución válida para ***p*** entero y por ende para ***pq***.

b) $q=2 \Rightarrow q^2+1=5$, y por ello: $3p^2-8=400$. De ahí que:

$3p^2 = 136 \Rightarrow p = \sqrt{\dfrac{408}{3}} = \sqrt{136} = 11{,}6619....$.No conduce a solución válida para ***p*** entero y por ende para ***pq***.

c) $q=3 \Rightarrow q^2+1=10$, y por ello: $3p^2-8=200$. De ahí que:

$3p^2 = 208 \Rightarrow p = \sqrt{\dfrac{208}{3}} = 69{,}\widehat{3}$. No conduce a solución válida para ***p*** entero y por ende para ***pq***.

d) $q=7 \Rightarrow q^2+1=50$, y por ello: $3p^2-8=40$. De ahí que: .

$$3p^2 = 48 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

PASO 4

Se ha obtenido solo los valores ***p= 4 y q=7***. Por lo tanto, la solución única para **pq** es **pq=28**.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

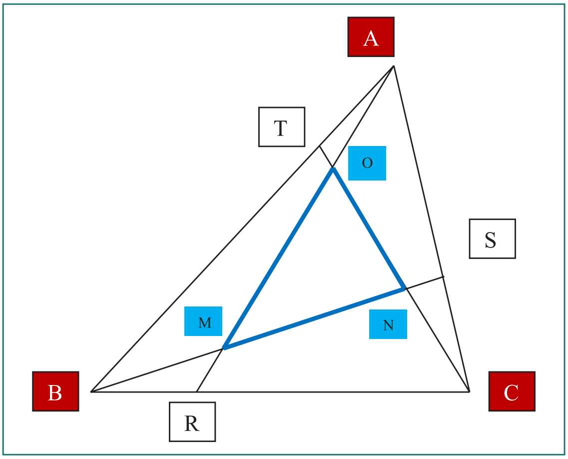
Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Decíamos en el número anterior que la enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática. En esta sección quiero dejar patente que trabajar en la geometría plana se presenta como un instrumento potente desarrollar el pensamiento deductivo, el cual implícitamente considera el desarrollo de la capacidad de abstracción. También considero que trabajando en este estadio se consigue que el alumno se mueva en un espacio de erudición en el que es viable alcanzar la idea de matematización como reconocimiento de patrones, generalizaciones, elaboración de conjeturas, demostraciones, ... piezas claves en el proceso binomial de Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas.

En este número presentamos las dos joyitas siguientes:

a) *En una hoja de papel se corta un agujero circular de 3cm. de diámetro. ¿Se puede hacer pasar una pieza de 4 cm. de diámetro?*

b) *Enrique quiere construir un jardín de forma triangular, MNO, limitado por un terreno también de forma triangular ABC y de área S, seg*ún aparece en la figura. *Se sabe que moviendo los puntos R, S y T respectivamente sobre los lados BC, CA y AB, va a conseguir construir el jardín MNO de la siguiente forma: las rectas que pasan por A y R, B y S, y C y T se cortan en los puntos M, N y O. Si conocemos el valor de las razones BR/BC, CS/CA y AT/AB, determinar el área del jardín en forma triangular, MNO, que quiere construir Enrique en funci*ón d*e*l área *S y las razones citadas.*



Propuesta 2: cuatro joyitas numéricas

En este *Sapare Aude* presentamos cuatro curiosas joyitas con diferentes grados de dificultad tocando distintos enfoques.

Está en el espíritu del que estas líneas suscribe presentar ejercicios de la teoría elemental de números, sin emplear técnicas de gran dificultad procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias.....

a) *Demostrar que cada número de la sucesión*
49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889,..........*es un cuadrado perfecto. Cada número de la sucesión está formado por "***n***" números* ***4****, "***n-1***" números* ***8*** *y solo "un"* ***9*****.**
***(*Propuesto en la competición matemática de Slovenia en 1998).**

b) *Cada una de las cifras* ***1,2,3,4 y 5*** *es utilizada una sola vez para formar un número de* ***5*** *cifras. ¿ Cuál es el valor de la suma de todos los números de cinco cifras que de esta manera se pueden formar?*

c) *Se dispone de monedas sin ser capaces de sumar sólo* ***1 €****, al tomar la totalidad o tomar unas pocas. ¿Cu*ál es la cantidad máxima que podemos juntar de estas monedas*? (No hay ninguna valor superior a € 1)*

d) *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)d &= 420\\
(a+c+d)b &= 403\\
(a+b+d)c &= 363\\
(b+c+d)a &= 228\\
\forall a,b,c,d &\in N
\end{aligned}
$$

Nota: Este último ejercicio no demasiado complicado pero que en un principio a los alumnos de secundaria les puede chocar al no ser un sistema de ecuaciones lineales. Es tarea del profesor indicar la orientación al alumno en las diferentes estrategias de resolución del problema, como por ejemplo utilizar en este caso la teoría de la divisibilidad y los números primos.

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:

sapereaudethales@ gmail.com