

Software Wolfram Mathematica como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de teoría de grafos

Alan Uriel Gil Casas

Universidad Nacional Autónoma de México, alan.gil@unam.mx

Juan Gabriel Molina Zavaleta

Instituto Politécnico Nacional, jmolinaz@ipn.mx

Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Instituto Politécnico Nacional, alerosas@ipn.mx

Resumen: La presente experiencia de clase aborda la descripción de una secuencia didáctica para modelar problemas de teoría de grafos, apoyada en el uso del software Wolfram Mathematica para favorecer la enseñanza y aprendizaje en el cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Computación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. La secuencia se divide en cuatro actividades: i) escribir la solución de un problema, ii) resolver ejercicios de grafos, iii) usar comandos de Wolfram Mathematica para generar grafos, y iv) modelar un problema real. Los estudiantes lograron: i) establecer las conexiones entre la representación gráfica y la matriz de adyacencia de un grafo, ii) aplicar los comandos apropiados en Wolfram Mathematica para generar grafos y sus matrices de adyacencia, y trabajar con algunos de sus elementos, y iii) modelar situaciones reales utilizando grafos.

Palabras clave: aprendizaje, CAS, enseñanza, teoría de grafos.

Wolfram Mathematica Software as a Tool for Teaching and Learning Graph Theory

Abstract: The present class experience addresses the description of a didactic sequence to model graph theory problems, supported using the Wolfram Mathematica software to promote teaching and learning in the fourth semester of the Computer Engineering degree of the Faculty of Engineering of the Universidad Nacional Autónoma de México. The sequence is divided into four activities: i) writing the solution to a problem, ii) solving graph exercises, iii) using Wolfram Mathematica commands to generate graphs, and iv) modeling a real problem. Students were able to: i) establish the connections between the graphical representation and the adjacency matrix of a graph, ii) apply the appropriate commands in Wolfram Mathematica to generate graphs and their adjacency matrices, and work with some of their elements, and iii) model real situations using graphs.

Key words: CAS, graph theory, learning, teaching.

1. INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de ingeniería en computación de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) cursan la asignatura obligatoria de Estructuras Discretas, en esta se estudia el tema de

teoría de grafos. La experiencia personal como docente, permite identificar que los estudiantes si bien no tienen problema en entender los conceptos básicos de la teoría de grafos, sí se les dificulta modelar un problema como grafo.

Debido al limitado tiempo del curso para abordar este tema, se buscaron alternativas didácticas que permitieran generar distintos tipos de grafos de forma práctica. Después de hacer una búsqueda de tecnología digital para la enseñanza de matemáticas, se decidió diseñar una didáctica apoyada en un Sistema de Álgebra Computacional (usualmente llamado CAS por sus siglas en inglés).

Por experiencias anteriores con el uso de esta tecnología digital se estableció una estrategia didáctica que consta de dos partes: una primera sesión con lápiz y papel durante la clase presencial y una segunda con el uso de Wolfram Mathematica para trabajo fuera de clase.

1.1. Sistemas CAS

El uso de tecnologías es muy común en la práctica docente actualmente, por ejemplo, tecnologías como los teléfonos inteligentes están presentes en las clases de matemáticas, especialmente en el nivel universitario; como señalan Borba et al. (2017), el rápido avance tecnológico supera a la investigación en educación matemática. En este trabajo se centra la atención en los CAS. El álgebra computacional es una disciplina de la computación científica que se sitúa en la intersección entre las matemáticas y las ciencias de la computación. Se enfoca en el diseño e implementación de algoritmos para el cálculo de objetos algebraicos.

Según Lamagna (2019), los CAS se pueden clasificar principalmente en dos: de propósito general y de propósito específico. Los sistemas de propósito general están diseñados para usarse en la mayoría de las áreas de las ciencias y de las matemáticas. Los CAS generales ofrecen principalmente la computación simbólica, la computación numérica, gráficas y programación. Los sistemas de propósito específico están diseñados para resolver problemas en un área específica de las ciencias o matemáticas como puede ser la teoría de grupos.

Los CAS han sido utilizados para elaborar prácticas docentes en distintos ámbitos. Morales y Panamá (2019) usan GeoGebra para enseñar álgebra y geometría en el primer y segundo semestre del bachillerato; demostrando que el aprendizaje tiene un incremento significativo en el segundo semestre respecto al primero. Ramírez (2020), también usa GeoGebra en un curso de matemáticas donde se evalúan contenidos sobre integración múltiple, en el cuarto año de la carrera de bachillerato y licenciatura de la enseñanza de matemáticas. Por su parte, Medina et al. (2017) utilizan Maxima para enseñar matemáticas numéricas en el segundo año de Ingeniería informática a 124 alumnos de distintos periodos. El uso de Maxima influye positivamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas numéricas. Vergara et al. (2016) usa Matlab para enseñar álgebra lineal en la licenciatura en matemáticas a 35 estudiantes. Al emplear Matlab, se observa que a los estudiantes se les facilita la comprensión y la solución de problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones lineales y otros temas. Por su parte, Williner (2016) utiliza Wolfram Mathematica para conocer sobre las manifestaciones de habilidades matemáticas en el aprendizaje cuándo se trabaja con el software y cuándo no, en el primer año de ingeniería en análisis matemático. Las actividades que diseñaron incluyen la construcción de tablas, la generación de gráficos y el cálculo de los valores para encontrar la pendiente de una recta secante. Los alumnos pasaron de usar Wolfram Mathematica como calculadora, a utilizarlo como un verdadero instrumento de trabajo.

1.1.1. Acerca de Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica es un software desarrollado hace más de 35 años, que incluye bibliotecas para muchas áreas de la computación (Vílchez, 2015; Vílchez-Quesada, 2019; Musyriyah et al., 2021). Se puede utilizar como un CAS y permite a los participantes desarrollar y probar sus soluciones en la nube a través de un navegador Web. Cuenta con una interfaz que permite publicar su trabajo a través de cuadernos que utilizan un lenguaje de programación propio.

En esta propuesta se presenta a la tecnología Wolfram Mathematica como una herramienta de estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la teoría de grafos, ya que es mucho más completa que otras opciones CAS que se revisaron como GeoGebra, Maxima o Matlab. Además de que la UNAM cuenta con una licencia de uso a través del correo institucional.

1.2. Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica que se presenta está diseñada con una estrategia híbrida como se ha mencionado (una parte a lápiz y papel y otra con tecnología). Se escogió esta estrategia por cuatro razones. La primera es que con base en la experiencia de otros semestres se notó que los estudiantes al utilizar el software directamente, mecanizan la solución sin pasar por una fase de conceptualización. La segunda razón es que el tema se plantea aprovechando la naturaleza dual de las matemáticas; Sfard (1991) aborda de dos formas la concepción de las matemáticas: como concepción estructural u objeto, y como concepción operacional o procesos. Por ejemplo, una función se define, en su concepción estructural, como una relación que se establece entre dos conjuntos; y en su concepción operacional, como un método o proceso que va de un origen a un destino. Mientras que una concepción operacional tiene que ver con acciones y algoritmos, una concepción estructural es más abstracta y menos detallada. La tercera es por el uso de Wolfram Mathematica como apoyo, y esto es siguiendo a lo que Jankvist et al. (2019) encontraron en una investigación al trabajar con estudiantes de secundaria, ellos se preguntaron lo que sucede cuando los procedimientos tradicionales son reemplazados por el uso de CAS. Una de las conclusiones que establecen es que “El uso de los CAS logra que la forma de trabajar con prueba y error sea mucho más eficiente para los estudiantes, lo que ocasiona que pierdan la habilidad de reconocer la naturaleza necesaria de las soluciones matemáticas” (p. 79). La cuarta y última razón obedece a un aspecto económico social, y es que no todos los estudiantes cuentan con un dispositivo electrónico para desarrollar las actividades durante la clase.

La idea es que una vez que el estudiante realice las actividades con lápiz y papel, se refuerce el aprendizaje del tema mediante el uso de Wolfram Mathematica a través de la comprobación rápida de sus soluciones y el desarrollo de retos adicionales. Turm y Barcel (2022) describen esta forma de proceder como un modo de uso que se hace de la tecnología en la clase de matemáticas para favorecer la práctica. Dado que la tecnología CAS ya tiene tiempo considerable en ser usada en la enseñanza (quizá alrededor de 40 años), existen una gran cantidad de trabajos de investigación al respecto, uno de los importantes es el de Lagrange (2005) en el que se reflexiona sobre distintos asuntos que surgen cuando una tecnología con capacidad CAS es llevada a la clase de matemáticas: por ejemplo, la necesidad de replantear las tareas matemáticas pues el uso de CAS podría volver obsoletas a las tareas tradicionales.

El objetivo de este trabajo es presentar una propuesta didáctica que utiliza Wolfram Mathematica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de grafos. Se plantean cuatro objetivos didácticos: i) identificar cómo los estudiantes expresan la solución de un problema, ii)

establecer las conexiones entre la representación gráfica y la matriz de adyacencia de un grafo, iii) aplicar los comandos apropiados en Wolfram Mathematica para generar grafos y sus matrices de adyacencia, y trabajar con algunos de sus elementos, y iv) modelar situaciones reales utilizando grafos. Esta propuesta está dirigida a estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Computación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

2. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

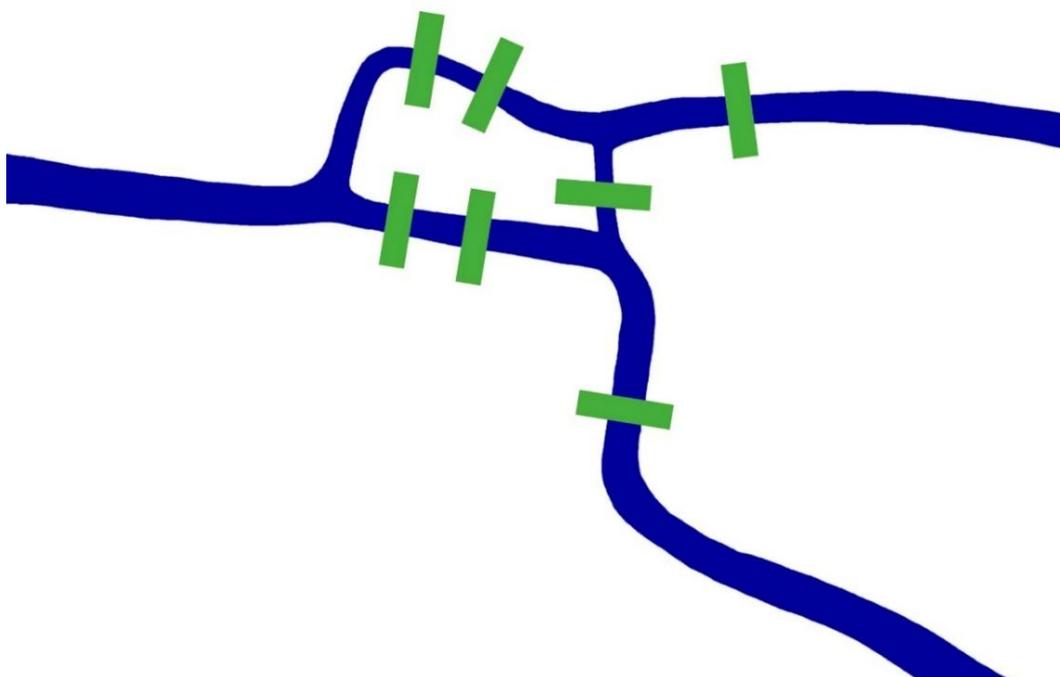
La experiencia, que fue implementada de forma presencial en un grupo de 28 participantes, se divide en tres momentos: presentación del tema, desarrollo del tema y cierre.

2.1. Presentación del tema

Dentro del aula, en la clase presencial, se explica a los participantes la historia de los puentes de Königsberg en el año de 1700 y, con el proyector, se muestra en el pizarrón la Figura 1. Se plantea a los estudiantes las preguntas: ¿era posible cruzar cada uno de los puentes exactamente una vez?, ¿puedes probarlo? Se invita a los alumnos a que escriban las respuestas con lápiz en un papel.

Figura 1

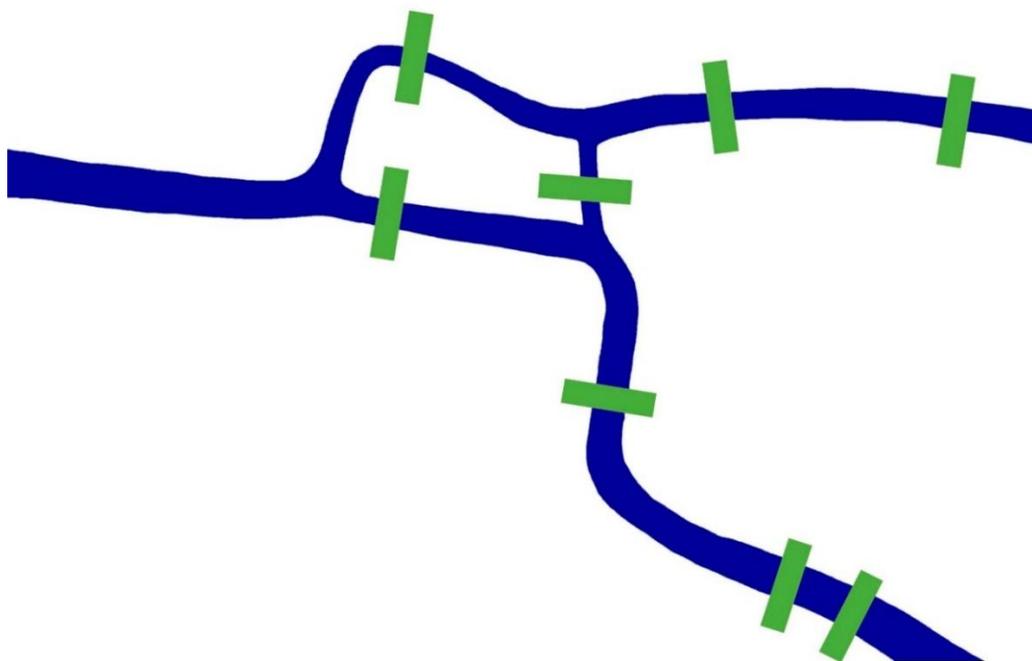
Problema de los puentes de Königsberg 1700.



Posteriormente, mediante el proyector, se les muestra la Figura 2. Se plantean las mismas preguntas: ¿es posible cruzar cada uno de los puentes exactamente una vez?, ¿puedes probarlo?

Figura 2

Problema de puentes actual.



El objetivo de esta actividad es conocer la manera con la que el participante aborda la solución del problema: un dibujo, un diagrama, prueba y error, etc.

En las figuras 3 y 4 se puede apreciar que los estudiantes hicieron un dibujo de la solución del problema y justificaron sus respuestas de manera textual. En la figura 3, el estudiante intentó mostrar una representación formal a través de etiquetas en vértices y aristas. En la figura 4 se puede apreciar que el alumno utilizó prueba y error para determinar la solución.

Figura 3

Evidencia de la solución de los dos problemas planteados.

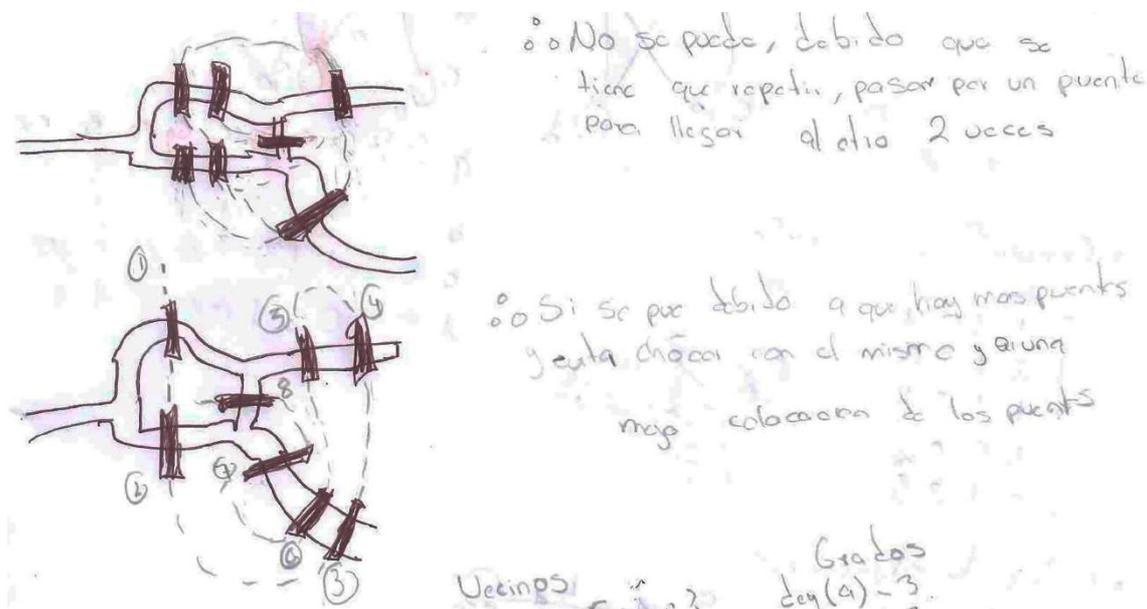
Debido al acomodo de cada puente y que cada uno solo se puede pasar una vez. Recorriendo los caminos de forma grafica falta un puente en todas las veces. ∴ No se pueden cruzar todos un vez.

Si se puean cruzar todas las puentes una sola vez

B-1-A-3-C-4-B-5-C-A-D
-7-C-6-D-2-A

Figura 4

Evidencia de la solución de los dos problemas planteados.



2.1. Desarrollo del tema

Este segundo momento, desarrollo del tema, a su vez se divide en dos partes: una se realiza en clase y la otra fuera de clase, a continuación, se explica cada parte.

2.1.1. En clase

El profesor presenta a los estudiantes los temas a revisar de la teoría de grafos: conceptos, tipos de grafos, representación de grafos y subgrafos con el apoyo de un proyector. Posteriormente se plantean ejercicios que el estudiante debe resolver con lápiz y papel. En la figura 5 podemos ver estudiantes resolviendo los ejercicios en clase. El propósito de esta parte de la actividad es verificar si el participante comprende los temas que le fueron presentados.

Figura 5

Estudiantes resolviendo los ejercicios.

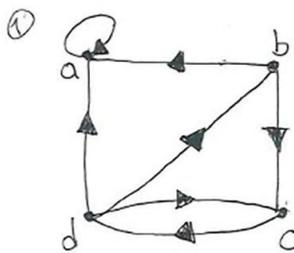


En la figura 6, al resolver los ejercicios #3: “Determinar los grados de entrada y salida del grafo”, #4: “Escribir la matriz de adyacencia del grafo”, #5: “Dibujar el grafo de la matriz de adyacencia”, #6: “Escribir la matriz de adyacencia del grafo dirigido” y #7: “Escribir la matriz de incidencia del grafo”, se puede apreciar que el estudiante ya utiliza la representación formal de un grafo. En la representación gráfica, coloca etiquetas a los vértices y aristas de los grafos, además de indicar la dirección de las aristas con flechas en el caso de grafos dirigidos. En la representación matricial, establece los nombres de los renglones y las columnas, además de colocar los corchetes adecuadamente.

Figura 6

Evidencia de la solución de los ejercicios.

Ejercicio #3

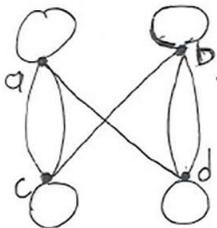


Entrada
 $\text{deg}^-(a) = 3$
 $\text{deg}^-(b) = 1$
 $\text{deg}^-(c) = 2$
 $\text{deg}^-(d) = 1$
 $\underline{\quad 7}$

Salida
 $\text{deg}^+(a) = 0$
 $\text{deg}^+(b) = 2$
 $\text{deg}^+(c) = 2$
 $\text{deg}^+(d) = 3$
 $\underline{\quad 7^*}$

Teorema*
 $\sum_{v \in V} \text{deg}^-(v) = \sum_{v \in V} \text{deg}^+(v) = |E|$
 Representaciones
 - Matrices
 - Adyacencia

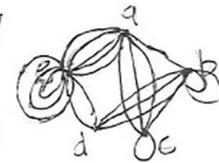
Ejercicio #4 Matriz de adyacencia



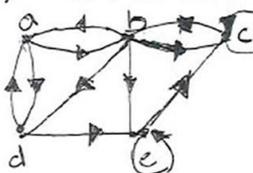
$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ejercicio #5 Dibuje el Grafo

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

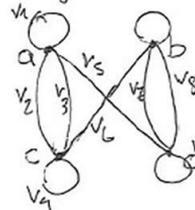


Ejercicio #6 Matriz de adyacencia



$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ejercicio #7 Matriz de incidencia



$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2.1.2. Fuera de clase

En la segunda parte de este momento, se trabajan tres cuadernos desarrollados en Wolfram Mathematica en la nube, ellos describen conceptos y tipos de grafos, representación de grafos y subgrafos. En cada cuaderno se plantean ejercicios que el estudiante debe resolver con la ayuda de Wolfram Mathematica y guardarlos en un nuevo cuaderno. Al estudiante se le solicita que comparta tres cuadernos con las soluciones solicitadas. El propósito de esta parte es que el participante compruebe la solución de los ejercicios con el uso de la herramienta.

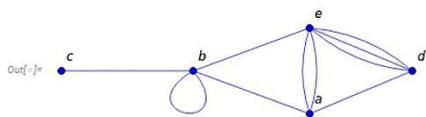
Al resolver el ejercicio “Genera el grafo de la figura y determina su tipo” (ver Figura 7), el alumno generó un grafo utilizando la sintaxis de Wolfram Mathematica e indicó el tipo de grafo que es, además de justificar su respuesta. La notación para definir los vértices del grafo respeta

las convenciones matemáticas tradicionales, sin embargo, la notación para definir las aristas no cumple con la convención. Si bien, utiliza las llaves para denotar el conjunto de aristas, no respeta el uso de paréntesis sustituyéndolos por corchetes. Esto podría causar dificultades a estudiantes que no estén familiarizados con la sintaxis de los lenguajes de programación; sin embargo, no fue un problema para los estudiantes de ingeniería en computación que cursan asignaturas de programación desde el primer semestre de la carrera.

Figura 7

Evidencia de la solución de los ejercicios de conceptos y tipos de grafos con Wolfram Mathematica.

```
In[ ]:= Graph[{1, 2, 3, 4, 5}, {UndirectedEdge[1, 2], UndirectedEdge[1, 3], UndirectedEdge[1, 4], UndirectedEdge[3, 4], UndirectedEdge[3, 4], UndirectedEdge[3, 5], UndirectedEdge[4, 5], UndirectedEdge[4, 5], UndirectedEdge[4, 5], UndirectedEdge[1, 1]}, {VertexLabels -> {3 -> "a", 5 -> "d", 4 -> "e", 2 -> "c", 1 -> "b"}}, VertexLabelStyle -> Directive[FontSize -> 12, Black, Italic], EdgeStyle -> Blue, VertexStyle -> Blue]
```



Es un Pseudo grafo
Como se observa incluye al menos una arista que conecta a el mismo vértice b. A esta arista se le conoce como bucle.

En la Figura 8 observamos como, al resolver el ejercicio “Genera la matriz de adyacencia del grafo de la figura y comprueba el resultado con el comando AdjacencyGraph, el alumno generó una matriz de adyacencia y su representación gráfica. Aunque la notación para definir la matriz no cumple las convenciones matemáticas tradicionales de los corchetes, la notación para presentarla en pantalla sí lo hace. Además, la representación gráfica cumple con la forma de dibujar vértices y aristas.

Figura 8

Evidencia de la solución de los ejercicios de representación de grafos con Wolfram Mathematica.

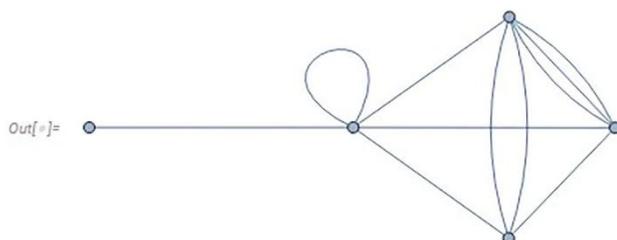
```
In[ ]:= matrizA = { {0, 1, 0, 1, 2}, {1, 1, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 3}, {2, 1, 0, 3, 0} }
MatrixForm[matrizA]
AdjacencyGraph[matrizA]
```

```
Out[ ]:= {{0, 1, 0, 1, 2}, {1, 1, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 3}, {2, 1, 0, 3, 0}}
```

```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

```



En la figura 9, al resolver el ejercicio “Genera el subgrafo que se forman con los vértices b, d y e del grafo de la figura” (misma que se muestra en la propia figura 9), el alumno definió un

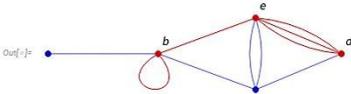
grafo con cinco vértices y generó un subgrafo con un subconjunto de tres vértices. Se tiene la misma situación que en el cuaderno de conceptos y tipos de grafos, ya que la notación para definir las aristas no cumple con las convenciones matemáticas tradicionales. Sin embargo, la manera de dibujar el grafo y la opción de resaltar los vértices que componen el subgrafo ayuda a una mejor comprensión del concepto de subgrafo.

Figura 9

Evidencia de la solución de los ejercicios de subgrafos con Wolfram Mathematica.

```

In[ ]:= grafoOriginal = Graph[{b, c, a, e, d}, {UndirectedEdge[b, c], UndirectedEdge[b, a], UndirectedEdge[b, e], UndirectedEdge[a, e], UndirectedEdge[a, c], UndirectedEdge[a, d], UndirectedEdge[e, d], UndirectedEdge[e, d], UndirectedEdge[e, d], UndirectedEdge[e, d], UndirectedEdge[b, b]},
VertexLabelStyle -> Directive[FontSize -> 12, Black, Italic],
EdgeStyle -> Blue, VertexStyle -> Blue];
subgrafo = Subgraph[grafoOriginal, {b, e, d}];
HighlightGraph[grafoOriginal, subgrafo, VertexLabels -> "Name", VertexLabelStyle -> Directive[FontSize -> 12, Black, Italic], EdgeStyle -> Blue, VertexStyle -> Blue]
    
```



2.1.3. Cierre

En el tercer momento el profesor muestra a los alumnos, con ayuda del proyector, lo que se observa en la Figura 10. En este caso solicita que modelen la red de trenes planeada para el 2050 en México y que hagan una representación de ello. El propósito de esta parte es que dibujen el grafo con nodos y vértices, además de construir la matriz de adyacencia, y también comprobar si los estudiantes pueden aplicar los conceptos comprendidos en el modelado de un problema real. Esto sin decir explícitamente que tienen que hacerlo aplicando teoría de grafos.

Figura 10

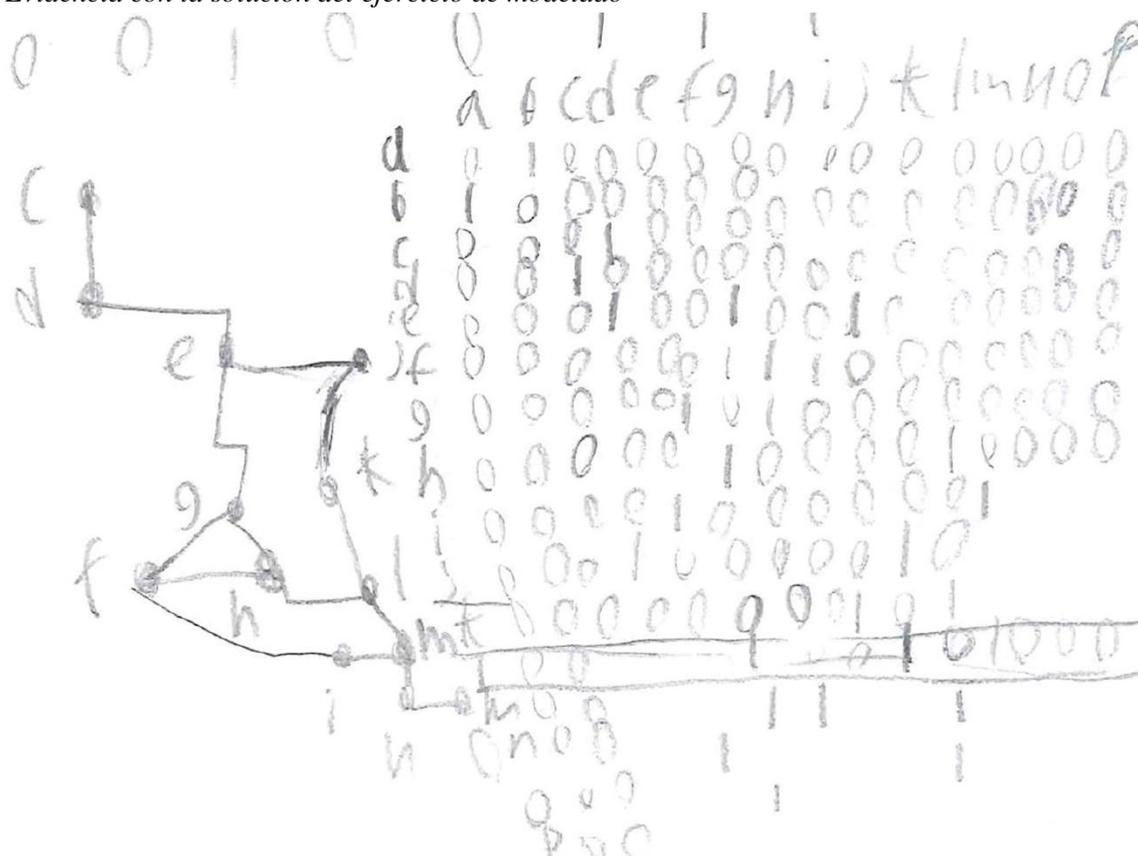
Red de trenes planeada para el año 2050 en México.



En la Figura 11 observamos como el alumno dibujó el grafo con etiquetas en los vértices y aristas no dirigidas, lo que es correcto porque las vías del tren generalmente van en dos direcciones. También construyó la matriz de adyacencia del grafo, aunque omitió el uso de notación de corchetes para su representación.

Figura 11

Evidencia con la solución del ejercicio de modelado



3. CONCLUSIONES

En la parte de presentación del tema, los estudiantes se mostraron participativos y funcionó de acuerdo con lo planeado. La mayoría utilizaron representaciones gráficas como las presentadas en las figuras 3 y 4, y describieron la solución a la que llegaron mediante prueba y error. Las dificultades que presentaron los estudiantes fueron que la mayoría no saben expresar sus ideas en papel, ya sea con notación de conjuntos, con relaciones o con matrices; tampoco saben modelar un problema. Esto no se puede superar en una sesión de una hora. Requiere un trabajo continuo por parte del estudiante. Una posible razón de esto es que los estudiantes no llevan asignaturas previas de modelado, ni metodología de sistemas por lo que es difícil para ellos hacerlo. Consideramos que en esta primera parte de lápiz y papel los estudiantes lograron realizar la mayoría de las cosas que se habían planteado en el diseño de la actividad, por lo que, aunque hubo algunas deficiencias pensamos que esta parte cumplió el objetivo de identificar cómo los estudiantes expresan la solución de un problema.

En el momento de desarrollo del tema, en la etapa presencial, los estudiantes se mostraron activos en el desarrollo de las soluciones y funcionó de acuerdo con lo planeado. Las dificultades que se presentaron fueron en el uso de notaciones formales para representar conjuntos y en los conocimientos previos con respecto a matrices que es un tema que se estudia en álgebra lineal en el primer semestre de la carrera. Estas dificultades se superaron repasando con ellos la notación de conjuntos y listando las propiedades de las matrices. La dificultad señalada es común, suele ser el resultado de la falta de práctica de lo aprendido en los primeros semestres en asignaturas posteriores. Consideramos que el objetivo de establecer las conexiones entre la representación gráfica y la matriz de adyacencia de un grafo, se cumplió en su mayoría.

En el momento de desarrollo del tema, en la parte del trabajo fuera de clase con el uso de Wolfram Mathematica, sólo 15 estudiantes realizaron la actividad debido a la premura en la entrega. Las dificultades que se presentaron fueron técnicas, en relación con el uso de la licencia del CAS y con el uso del lenguaje Wolfram Mathematica. Estas dificultades se superaron respondiendo las dudas por correo electrónico respecto a cómo obtener la licencia y con la documentación del lenguaje utilizado. Las evidencias que enviaron los estudiantes nos dejan ver que lograron cumplir el objetivo de aplicar los comandos apropiados en Wolfram Mathematica para generar grafos, sus matrices de adyacencia y trabajar con algunos de sus elementos.

En el momento de cierre, los participantes se mostraron nerviosos por el límite de tiempo de la actividad, pese a lo cual funcionó de acuerdo con lo planeado. Consideramos que la evidencia analizada permite ver que, aunque con algunas deficiencias, el objetivo de modelar situaciones reales utilizando grafos, casi se cumplió porque la mayoría de ellos dibujaron el grafo y su matriz de adyacencia como se espera. Otros no terminaron la matriz por falta de tiempo para el desarrollo del ejercicio.

Tomando en cuenta la experiencia docente, se pueden sugerir las siguientes estrategias: i) solicitar a los participantes que revisen sus conocimientos previos antes de la secuencia didáctica, ii) proporcionar a los alumnos la documentación del lenguaje de Wolfram Mathematica con antelación para su estudio fuera de clase, iii) incorporar el desarrollo de un problema integral de teoría de grafos, como una actividad preparatoria para el problema del modelado en el cierre, y iv) incrementar el tiempo destinado al desarrollo de la actividad en el cierre para que los estudiantes no se sientan presionados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Linares, S. y Sánchez, M. (2017). Digital Technology in Mathematics Education: Research over the Last Decade. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs* (pp. 222-233). https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_14
- Jankvist, U. T., Misfeldt, M. y Aguilar, M. S. (2019). What happens when CAS procedures are objectified? —the case of “solve” and “desolve.” *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 67–81. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5>
- Lamagna, E. A. (2019). *Computer Algebra*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315107011>
- Medina, J. F., Arteaga, E. y del Sol, J. L. (2017). La enseñanza de las matemáticas, en la carrera de Ingeniería Informática, utilizando el software libre. *Universidad y Sociedad*, 9(5), 219-225.

- Morales, C. y Panamá, G. (2019). Experiencia de la enseñanza y aprendizaje del álgebra y geometría con ayuda de GeoGebra. En *Memorias de la I Jornada Ecuatoriana de GeoGebra* (pp. 129–139). Universidad Nacional de Educación.
- Musyrifah, E., Rabbani, H., Sobiruddin, D. y Khairunnisa. (2021). Development of wolfram mathematica application-assisted learning module on derivative in high school. *Journal of Physics: Conference Series*, 1836, 012076. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012076>
- Ramírez, B. A. (2020). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 21(1), 1-18. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v21i1.5341>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/bf00302715>
- Thurm, D. y Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: A multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 41-63. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10072-x>
- Vergara, G., Avilez, A. y Romero, J. (2016). Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal. *Revista Matua*, 3(1), 83-91.
- Vílchez, E. (2015). Paquete VilGebra: recurso didáctico a través del uso del software Mathematica en el campo del álgebra lineal. *Revista digital—Matemática, Educación e Internet*, 15(1), 1-71.
- Vílchez-Quesada, E. (2019). Estudio de caso: Estrategia de enseñanza y aprendizaje asistida por computadora para un curso de matemática discreta a través del uso del paquete VilCretas en el software Wolfram Mathematica. *Revista Electrónica Educare*, 23(2), 1-25.
- Williner, B. (2016). Análisis de una actividad didáctica en la que se usa la computadora como herramienta cognitiva. En A. De Giusti, I. Sattolo, J. Ierache y P. Pesado (Eds.), *XI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET 2016). Libro de actas* (pp. 301-310). Universidad Nacional de La Plata.