

UNIDAD 6: EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA. LA INTEGRAL DEFINIDA

Esta unidad cierra el núcleo de Análisis y a la vez le da sentido:

Vais a poner en práctica todo lo aprendido acerca de derivación, integración, representación de funciones, cálculo de límites, para algo tan tangible como es el cálculo de un área, de un volumen, de consumo diario de energía, de trabajo realizado...

Índice de contenido

OBJETIVOS.....	2
CONTENIDOS.....	3
SESIÓN 1.....	4
SESIÓN 2.....	7
SESIÓN 3.....	13
SESIÓN 4.....	17
SESIÓN 5.....	22

OBJETIVOS

OBJETIVOS DIDÁCTICOS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

Objetivo 1. Conocer el concepto, la terminología, las propiedades y la interpretación geométrica de la integral definida.

Criterio 1.1. Halla la integral, $\int_a^b f(x) \cdot dx$ reconociendo el recinto definido por, $x=a$

y $x=b$ hallando sus dimensiones y calculando su área (aproximada o exacta cuando sea posible) mediante procedimientos geométricos elementales.

Objetivo 2. Comprender el teorema fundamental del cálculo y su importancia para relacionar el área bajo una curva con una primitiva de la función correspondiente.

Criterio 2.1. Responde a problemas teóricos relacionados con el teorema fundamental del cálculo

Objetivo 3. Conocer y aplicar la regla de Barrow para el cálculo de áreas.

Criterio 3.1. Calcula el área bajo una curva entre dos abscisas.

Criterio 3.2. Calcula el área entre dos curvas.

CONTENIDOS

CONCEPTOS

- Integral definida. Propiedades.
- Teorema fundamental del Cálculo
- Regla de Barrow

PROCEDIMIENTOS

- Relación del área de una figura plana conocida con la expresión de la misma mediante la forma integral.
- Cálculo aproximado de una integral definida mediante el método de las sumas.
- Relación de la gráfica de una función y la de la que se obtiene al describir el área que encierra bajo ella.

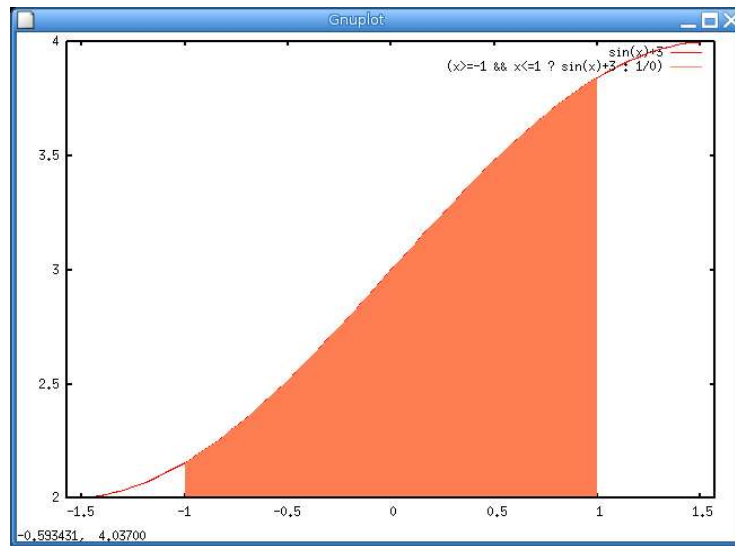
ACTITUDES

- Confianza en las propias capacidades para resolver problemas
- Evaluación crítica del trabajo en equipo para realizar problemas relacionados con las integrales
- Hábito de contrastar el resultado final de un problema en el que intervengan integrales con lo propuesto en éste, para determinar lo razonable o no del resultado obtenido.

SESIÓN 1

INTEGRAL DEFINIDA

Hay infinidad de funciones extraídas del mundo real (científico, económico...) para las cuales tiene especial relevancia el área bajo su gráfica. Vamos a ocuparnos del cálculo de esas áreas.

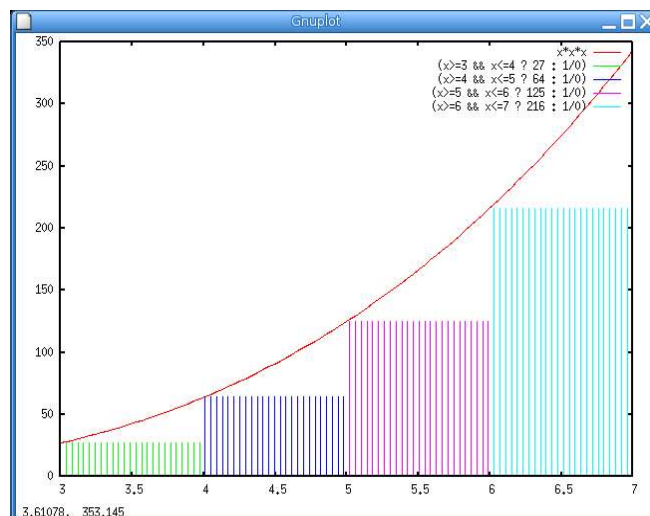


Área bajo la curva $y=f(x)$, entre las rectas $x=-1$ y $x=1$

APROXIMACIÓN AL ÁREA BAJO UNA CURVA

Si conocemos la ecuación de una curva $y = f(x)$ que toma valores no negativos, ¿cómo calcularemos el área entre la curva, el eje X y dos abscisas, $x = a$ y $x = b$?

Una idea útil consiste en dividir $[a,b]$ en tramos y aproximar el área mediante rectángulos con base en el eje X y altura el mínimo valor que toma la función en cada tramo.



Si el intervalo $[a,b]$ se ha partido en n trozos, no necesariamente iguales:

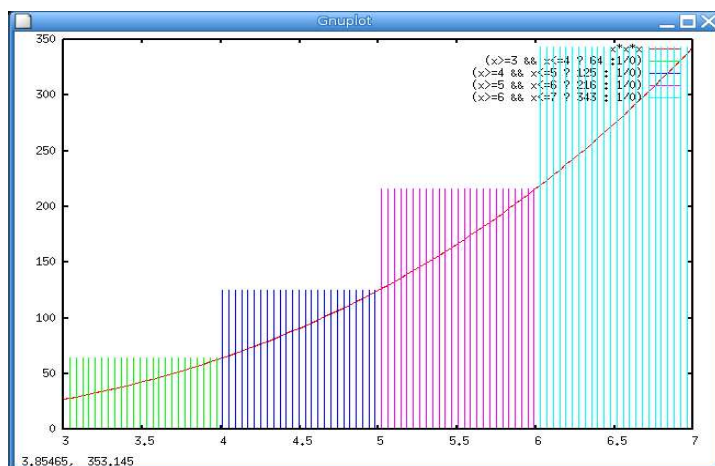
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

y llamamos m_i al menor valor que toma la función en el tramo $[x_{i-1}, x_i]$, el área rayada es:

$$m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \dots + m_n(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})$$

Este área es menor (o, a lo sumo, igual) que el área buscada. Nos hemos aproximado por defecto al área buscada.

También podríamos habernos aproximado por exceso sin más que tomar como altura de cada rectángulo el mayor valor, M_i , que toma la función en el intervalo correspondiente.



¿Cómo aproximamos más al valor del área que buscamos?

- Evidentemente, si tomamos unos rectángulos más finos, es decir, si los puntos x_i tomamos cada uno más cerca del siguiente, tanto el área por defecto como el área por exceso se aproximan más que antes al área del recinto.
- Y si, en vez de tomar el valor máximo o el mínimo de cada intervalo, tomamos un valor intermedio, la aproximación podría ser mejor todavía.

INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$. Al área entre la gráfica de f , el eje X y las abscisas $x = a$ y $x = b$ la llamaremos $\int_a^b f$, que se lee *integral entre a y b de f*.

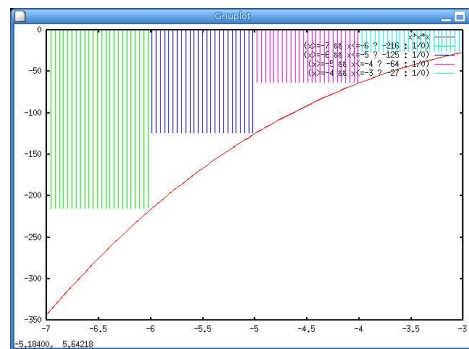
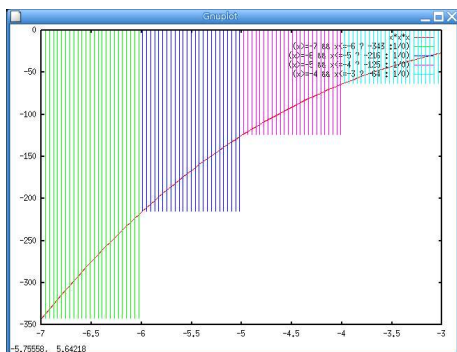
También se designa por $\int_a^b f(x)$ y por $\int_a^b f(x) dx$.

ÁREAS NEGATIVAS

Si consideramos que los recintos situados debajo del eje X tienen área negativa, entonces el proceso anterior es válido para funciones cualesquiera, sin imponerles la condición de que

$$f(x) \geq 0$$

Para funciones negativas, también el área por defecto queda debajo de la curva y el área por exceso, encima de la curva, como puedes apreciar en las imágenes que siguen.

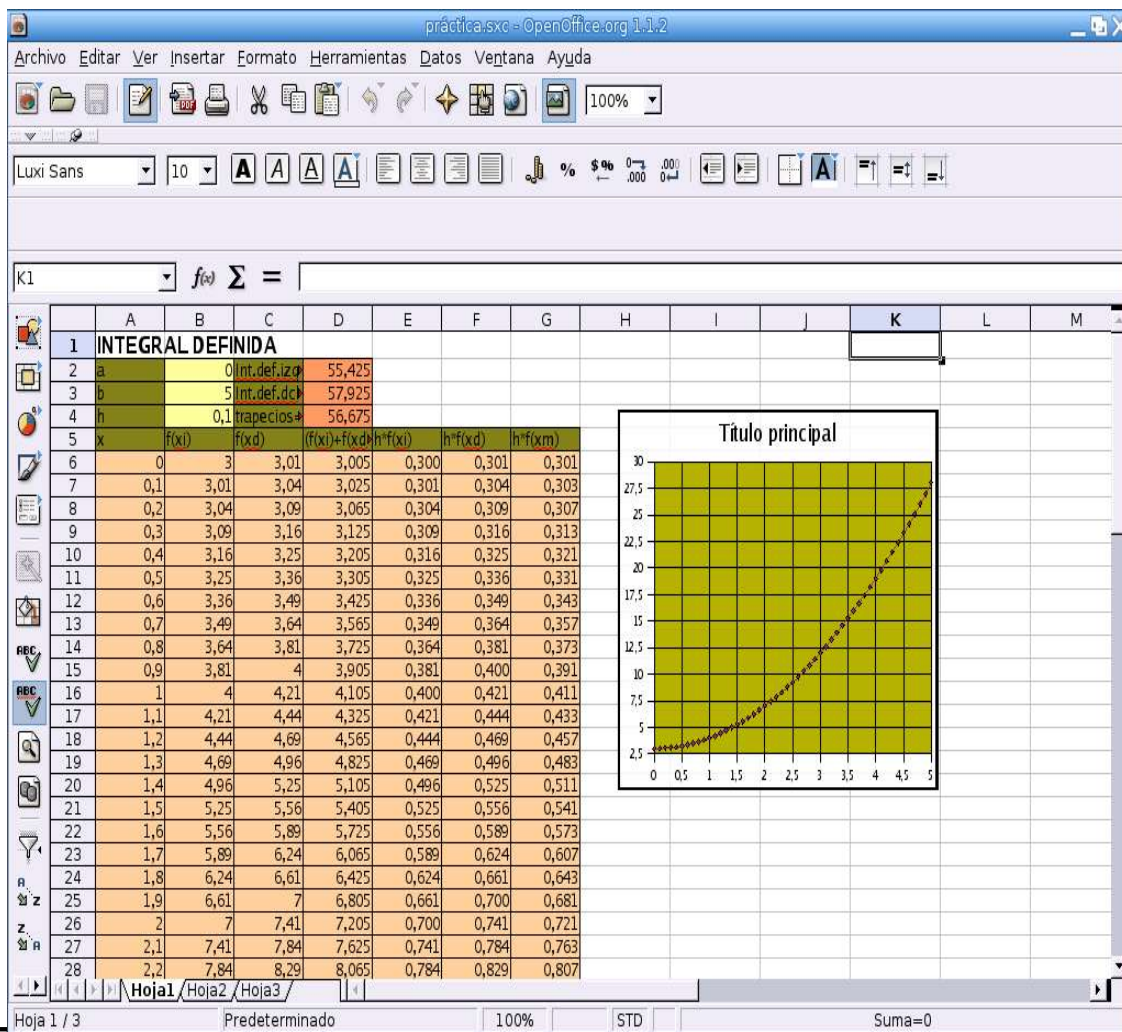


SESIÓN 2

APROXIMACIÓN A LA INTEGRAL DEFINIDA

Vamos a elaborar una hoja de cálculo con OpenOffice Calc para aproximar automáticamente la integral definida de una función en un intervalo dado. Para ello descomponemos el intervalo de integración $[a, b]$ en 50 partes. Cada una será de amplitud $h=(b - a)/50$. Como aproximación del área bajo la curva (área con signo) tomaremos la suma de las áreas de los rectángulos construidos sobre cada uno de los intervalos de la partición de $[a, b]$. El área correspondiente a uno de estos intervalos $[a_i, b_i]$ será $hf(a_i)$ o $hf(b_i)$, según tomemos como altura el valor de la función en el extremo izquierdo o derecho. Si la función es monótona (creciente o decreciente), el valor real de la integral definida se encontrará entre los dos valores obtenidos en la aproximación: $hf(a_i)$ para "Int.def.izq" y $hf(b_i)$ para "Int.def.dch". Podemos mejorar la aproximación aumentando el número de divisiones del intervalo $[a, b]$ o sustituyendo los rectángulos por trapecios. En este caso el área de cada trapecio vendrá dada por $h(f(a_i)+f(b_i))/2$.

Considera $\int_0^5 (x^2+3) dx$. Lo que pretendemos se muestra en el siguiente ejemplo:



CONSTRUCCIÓN DE LA HOJA

Abre una nueva hoja de OpenOffice Calc e introduce en las primeras celdas lo siguiente:

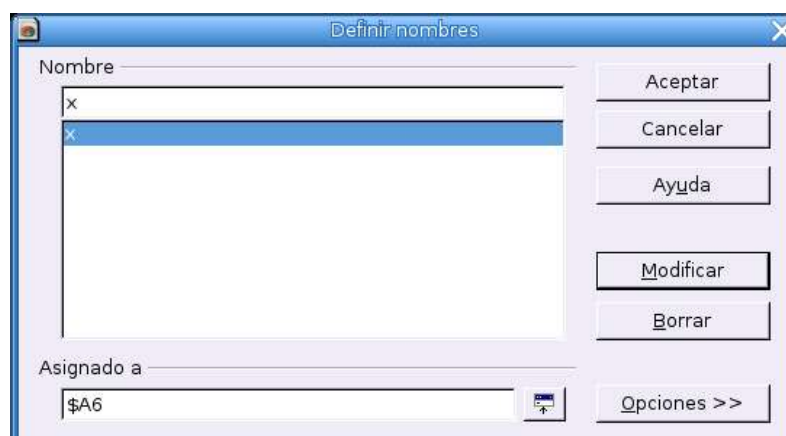
	A	B	C	D	E	F	G
1	INTEGRAL DEFINIDA						
2	a		Int.def.izq				
3	b		Int.def.dch				
4	h	=(B3-B2)/50	Trapecios				
5	x	f(xi)	f(xd)	(f(xi)+f(xd))/2	h*f(xi)	h*f(xd)	h*f(xm)
6	=B2						
7	=A6+B\$4						

En la celda B2 introduciremos el extremo inferior a del intervalo de integración, y en la celda B3 el extremo superior b . En B4 hallaremos la amplitud de cada uno de los 50 intervalos en que dividimos $[a, b]$. Por tanto, introducimos la expresión **=(B3-B2)/50**. Este valor de h será el incremento que habrá que añadir a cada valor de x_i para obtener el siguiente. Los 50 valores de x se introducen desde A6 hasta A56. El primer valor coincide con la x inicial, a ; por eso introducimos en la celda A6 la expresión **=B2**. Cada uno de los siguientes valores será igual al anterior (celda inmediatamente superior) más el incremento que figura en B4. Para ello bastaría introducir **=A6+B4** en la celda A7 y rellenar hacia abajo hasta A56. Pero al hacerlo obtendríamos **=A7+B5**, **=A8+B6**, **=A9+B7**... Para evitar que cambie la referencia a B4 (incremento) utilizamos el signo **\$**. Por tanto, introducimos **=A6+B\$4** en la celda A7, seleccionamos desde A7 hasta A56 y pulsamos **Editar-Rellenar-Abajo** para rellenar hacia abajo. Comprueba que el último valor coincide con la x final, b .

Cambia los valores de a y b en las celdas B2 y B3 y comprueba como cambian los valores de la columna A.

Para la función $f(x) = x^2 + 3$ habría que introducir en la celda B6 la expresión **=A6^2+3** y “rellenar hacia abajo” hasta B56. Pero como estamos acostumbrados a utilizar x (piensa en la incomodidad para otras funciones de expresión más compleja), vamos a asignarle el “nombre” x a la celda A6. Para ello, sitúa el cursor en la celda A6 y elige la opción **Insertar-Nombre-Definir** en el menú de la barra de herramientas. Te aparecerá una ventana.

Escribe x en la primera línea y aparecerá **=\$A6** en la última línea denominada **Asignado a**:



Tras aceptar ya podemos introducir en B6 la expresión $=x^2+3$ (o también $x*x+3$) y “rellenar hacia abajo” hasta B56. No olvides incluir el signo $*$. Recuerda que OpenOffice Calc no puede interpretar $5x$ como $5*x$.

Para crear un gráfico con la representación de la función y poder apreciar, entre otras cosas, las zonas de “área positiva y negativa” sigue los siguientes pasos:

- II. Selecciona las celdas comprendidas entre A6 y B56.
- III. Elige la opción **Insertar-Diagrama** en el menú de la barra de herramientas.
- IV. Marca la opción **XY(Dispersión)** y pulsa el último botón **Crear**. Puedes marcar la opción de puntos unidos por líneas suavizadas sin marcadores para mejorar el aspecto.

En la columnas C hallaremos el valor de la función $f(x)$ en el extremo derecho xd de cada intervalo que coincidirá con el extremo izquierdo del intervalo siguiente: $f(x_{di})=f(x_{ii+1})$. Por tanto, bastará introducir en la celda C6 la expresión $=B7$ y “rellenar hacia abajo” hasta C55. No debes incluir C56, porque para el último valor $f(x) = f(b)$ “no hay siguiente”.

En la columna D hallaremos la altura media de los rectángulos “a la izquierda” y “a la derecha”, con los que obtendremos el área de los trapecios. Para ello introducimos en la celda D6 la expresión $=(B6+C6)/2$ y “rellenamos hacia abajo” hasta D55.

En las columnas E, F y G obtenemos las áreas de los rectángulos “a la izquierda”, “a la derecha” y de los trapecios correspondientes a cada intervalo de la partición. Lo hacemos multiplicando por h (que figura en B4) los valores correspondientes de las columnas B, C y D.

En conclusión, introduce en la fila 6 lo siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G
1	INTEGRAL DEFINIDA						
2	a						
3	b						
4	h						
5	x	f(xi)	f(xd)	$(f(xi)+f(xd))/2$	$h*f(xi)$	$h*f(xd)$	$h*f(xm)$
6			=B7	$=(B6+C6)/2$	$=B6*B\$4$	$=C6*B\$4$	$=D6*B\$4$
7							

A continuación, selecciona desde B6 hasta G55 y “rellena hacia abajo” pulsando **Editar-Rellenar-Abajo**. Observa que la referencia a h se hace con **B\$4** para que no se “actualice” al rellenar hacia abajo. Pero también debes rellenar la celda B56 (cópiala de B55 o rellena la columna B por separado).

Para obtener los resultados finales basta sumar los valores de las diferentes columnas. Para ello introduce en D2 la expresión $=SUMA(E6:E55)$, en D3 la expresión $=SUMA(F6:F55)$ y en D4 la expresión $=SUMA(G6:G55)$.

Práctica

- I. Aproxima la integral definida de $f(x) = 3x$ en los intervalos $[0, 4]$ y $[1, 4]$, y compruébalo hallando manualmente las áreas del triángulo y del trapecio correspondiente. Halla también la integral definida en $[-2, 4]$ y posteriormente en $[-2, 0]$ y en $[0, 4]$. Relaciona los tres últimos resultados.
- II. Aproxima las siguientes integrales definidas:
 $\int_0^3 (x^2 - 9) dx$ $\int_{-3}^0 (x^2 - 9) dx$ $\int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx$ Interpreta.
 Debes introducir **=x^2-9** en B6.
- III. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ Debe ser la cuarta parte del área de un círculo de radio 3. Debes introducir **=RAIZ(9-x^2)** en B6.
- IV. $\int_0^3 4\sqrt{1-x^2/9} dx$ Se trata de la cuarta parte del área de una elipse de semiejes 3 y 4. Debes introducir **=4*RAIZ(1-x^2/9)** en B6.
- V. $\int_0^\pi \sin x dx$ Debes introducir **=SENO(x)** en B6, **0** en B2 y **=PI()** en B3.
- VI. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ $\int_{-2}^2 e^x dx$ $\int_1^2 x^x dx$ $\int_1^4 \ln x dx$ Debes introducir en B6 las expresiones **=1/(1+x^2)**, **=EXP(x)**, **=x^x**, **=LN(x)**, respectivamente.
- VII. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ $\int_{-1}^3 \frac{1}{x} dx$ $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ Observa que se trata de una función no continua. ¿Es utilizable la hoja en estos casos? Piensa que ocurre si alguno de los puntos intermedios utilizados en la hoja corresponde a $x = 0$. Aunque no sea así, ¿pueden aceptarse los valores obtenidos?
- VIII. Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 7$ y $g(x) = 5x - 3$. Puedes introducir **=(x^2-7)-(5*x-3)** en B6 y considerar el intervalo $[1, 4]$. Observa que ambas funciones coinciden para $x = 1$ y $x = 4$. Interpreta el signo del resultado.
- IX. Halla el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. Considera el intervalo $[0, 1]$.
- X. Propón otras funciones, halla los puntos de intersección de sus gráficas y obtén el área limitada por ellas. Puedes elegir de antemano los “puntos de corte” y añadir a cada función el término independiente que convenga. No elijas funciones discontinuas.
- XI. Halla el área encerrada por la gráfica de la curva $f(x) = x(x+3)(x-1)(x-2)$ y el eje OX. Descompón el recinto en tres partes para x en $[-3, 0]$, en $[0, 1]$ y en $[1, 2]$, halla la integral en cada una de ellas y suma los resultados en valor absoluto.

Repite la práctica con otras funciones.

AMPLIACIÓN

Puedes mejorar el aspecto de la hoja poniendo colores de fondo para distinguir mejor las diferentes columnas y la zona de datos iniciales y resultados, centrando el contenido de algunas celdas, coloreando las celdas que contienen títulos o etiquetas, etc.

SESIÓN 3

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1.- $\int_a^a f(x) dx = 0$ cualquiera que sea f .

2.- Si $f(x) > 0$ y continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx > 0$,
y si $f(x) < 0$ en todo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx < 0$.

3.- Si $a < b < c$ y f es continua en $[a, c]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

4.- $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f+g)(x) dx$

5.- $c \int_a^b f(x) dx = \int_a^b c \cdot f(x) dx$ cualquiera que sea el número c .

6.- Si para cada $x \in [a, b]$ es $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

7.- Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe un número $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Esta propiedad se llama **teorema del valor medio del cálculo integral**.

Ejercicios

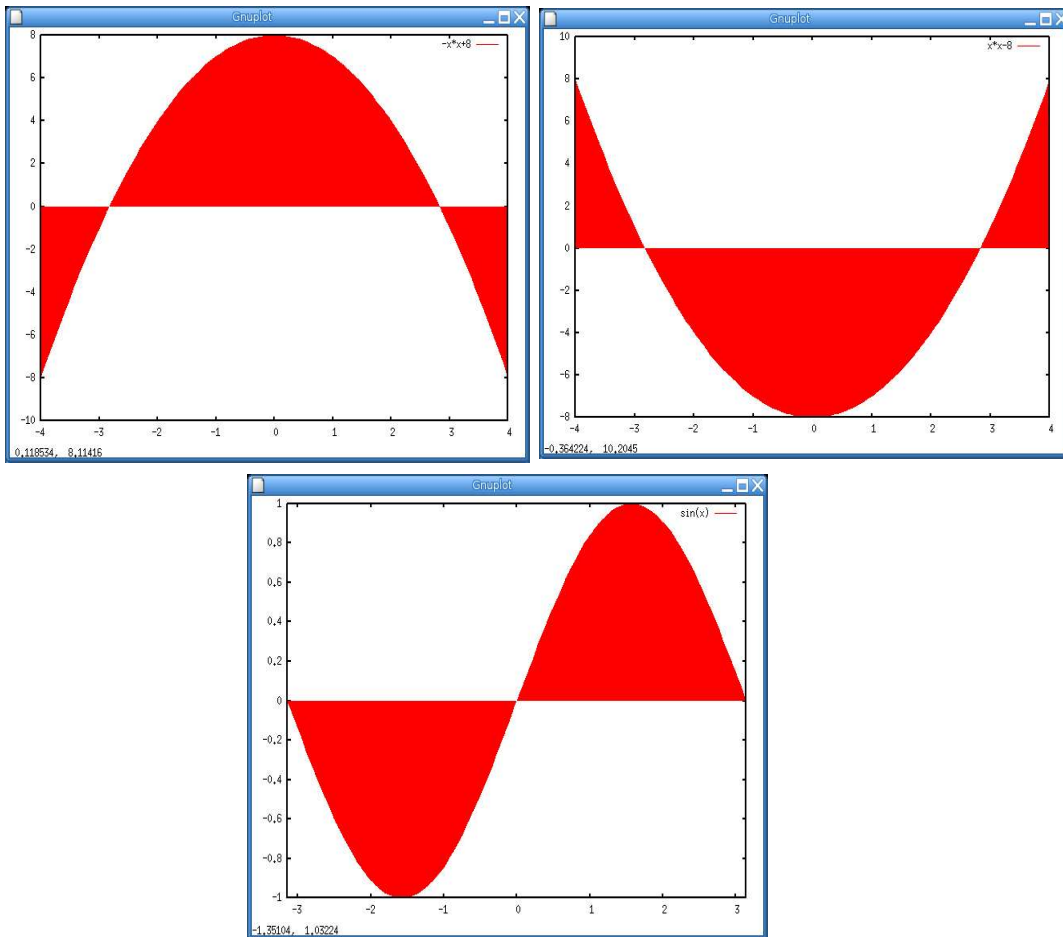
1.- Repasa los ejercicios de la sesión anterior para ilustrar con ejemplos las propiedades que se relacionan arriba.

2.- Observa y contesta:

Observa que si f cambia de signo en $[a, b]$, la $\int_a^b f$ nos da la suma algebraica de las áreas que están por encima y por debajo del eje X , cada una con su signo. Si quisiéramos calcular el área en términos absolutos, tendríamos que calcular la integral de cada recinto y, antes de sumar, cambiar de signo las negativas ¿no? ¿Qué propiedad estamos utilizando?

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES

Si para calcular el área comprendida entre una curva $y=f(x)$, el eje OX y las dos abscisas, $x=a$ y $x=b$, nos limitamos a calcular $\int_a^b f(x)$, nos podemos encontrar en alguno de estos casos:



Aquí, el resultado de la integral no representa el área buscada. Ello es debido a las compensaciones que se producen de las partes positivas con las negativas.

La forma correcta de proceder será calcular, por separado, las integrales de los diversos sectores y, posteriormente, sumar sus valores absolutos.

Para calcular el área comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje OX y las abscisas $x=a$ y $x=b$, conviene dar los siguientes pasos:

- I. Resolver la ecuación $f(x)=0$ para averiguar los puntos de corte de la curva con el eje X.
- II. Seleccionar, de entre las raíces de la ecuación anterior, aquellas que estén comprendidas entre a y b . Imaginemos que estas raíces, ordenadas de menor a mayor, sean x_1, x_2 y x_3 . Es decir, se cumple: $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$
- III. Calcular $\int_a^{x_1} f$, $\int_{x_1}^{x_2} f$, $\int_{x_2}^{x_3} f$ y $\int_{x_3}^b f$

Sus áreas son los valores absolutos de estas cantidades y el área buscada es la suma de ellas.

Observemos que, con estos pasos, no es necesario dibujar la curva.

ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

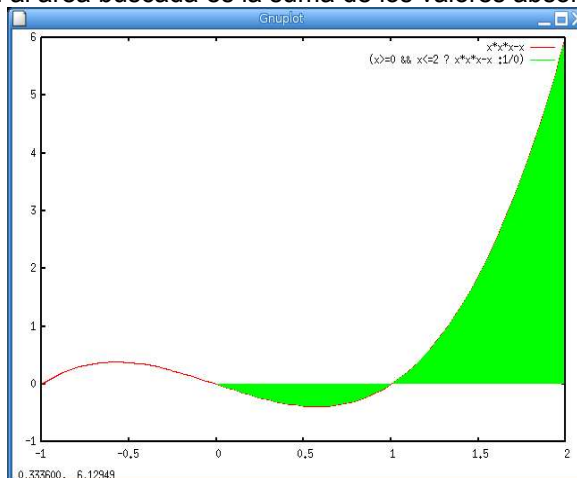
El área comprendida entre dos curvas, f y g , es igual al área comprendida entre la función diferencia, $f-g$, y el eje OX.

Ejercicios resueltos

1.- **Hallar el área comprendida entre la curva $y=x^3-x$, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.**

Como ya sabemos, probablemente la integral $\int_0^2 (x^3-x) dx$ no nos dará la solución correcta. Debemos proceder así:

- I. Hallamos las soluciones de la ecuación $x^3-x=0$. Son $-1, 0, 1$.
- II. Ordenamos los extremos del intervalo y las raíces que haya entre ellos: $0, 1, 2$.
- III. Calculamos una aproximación al valor de las integrales con nuestra hoja de cálculo:
 $\int_0^1 x^3-x = -0.25$ y $\int_1^2 x^3-x = 2.25$ aproximadamente
- IV. Una aproximación al área buscada es la suma de los valores absolutos de estas aproximaciones



Área aproximada= $0.25+2.25= 2.50$ unidades cuadradas

2.- Hallar el área comprendida entre las curvas de las funciones

$$y = x^4 - x + 1$$

$$y = x^4 - x^3 + 1$$

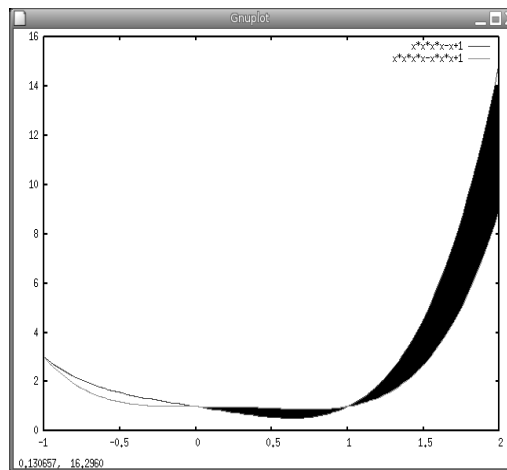
y las rectas $x=0$, $x=2$

Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 - x + 1) - (x^4 - x^3 + 1) = x^3 - x$$

Ahora se calcula una aproximación al área comprendida entre esta función, el eje X y las rectas $x=0$, $x=2$ lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el área buscada es $2.5u^2$



Ejercicios propuestos

1.- Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

2.- Halla el área comprendida entre las funciones $y = x^4 + x^3$ e $y = x^4 + x^2 + 6x$

SESIÓN 4

LA INTEGRAL Y SU RELACIÓN CON LA DERIVADA

Existe una estrecha relación entre la integración (cálculo del área bajo la curva) y la derivación. Vamos a recorrer, con cierto rigor, el camino que nos lleva a establecer esa relación.

LA FUNCIÓN ÁREA

Dada una función f , continua en $[a, b]$, podemos calcular $\int_a^c f$ para todo número $c \in [a, b]$.

Consideremos la nueva función $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$, que es el área bajo f entre a y un punto variable x .

Cuanto mayor sea la ordenada de f , más rápidamente crece el área bajo ella, F , y por tanto

mayor es F' .

Cuando f es negativa, lo es el área. Por tanto, F decrece y su derivada es negativa. Vamos a precisar esta relación entre f y F' que aquí hemos visto intuitivamente.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$, es derivable, y se verifica que $F'(x) = f(x)$.

Demostración

Para hallar $F'(x)$, hemos de calcular: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

El numerador es: $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f$

Por la propiedad 7. anterior (teorema del valor medio del cálculo integral), al ser f continua en $[x, x+h]$ existe $c \in [x, x+h]$ tal que:

$$\int_x^{x+h} f = f(c) \cdot (x+h-x) = f(c) \cdot h$$

Por tanto:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} f(c) \cdot h \right] = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

Como $c \in [x, x+h]$, el límite $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$, pues f es continua.

Por tanto, $F'(x) = f(x)$ que es lo que queríamos demostrar.

La relación anterior, que liga el cálculo de áreas (integrales) con la derivación, abre una gran cantidad de posibilidades teóricas y prácticas.

La función *área bajo la gráfica de f* , $F(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de $f(x)$, según acabamos de ver.

Por eso, al cálculo de primitivas se le llama **integración** o cálculo de integrales, y se utiliza la expresión $\int f(x) dx$ para designar una primitiva de la función $f(x)$.

Ejercicios resueltos

1. Calcular la derivada de la función $\int_5^x \sqrt{e^t+1} dt$.

$$F(x) = \int_5^x \sqrt{e^t+1} dt = \int_5^x f(t) dt, \text{ siendo } f(t) = \sqrt{e^t+1} \text{ continua.}$$

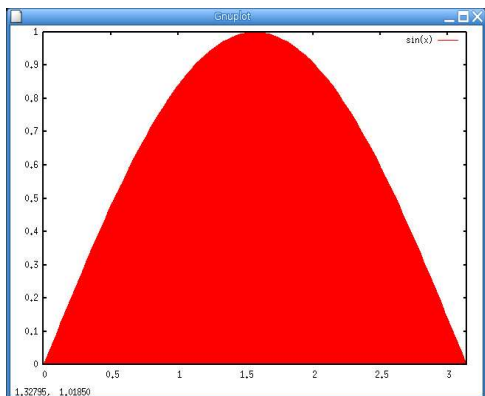
Por el teorema fundamental del cálculo.

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{e^x+1}$$

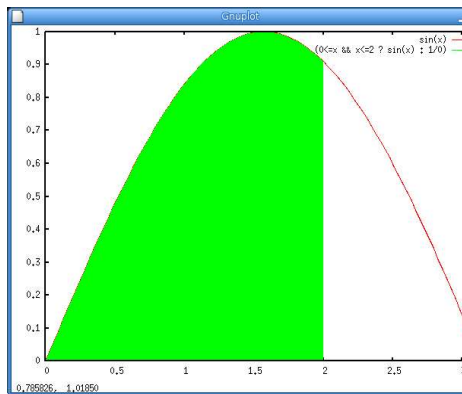
2. Calcular el área comprendida entre una de las ondulaciones de la función seno y el eje X.

Es decir, $\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx$.

Llamamos $F(x) = \int_0^x \text{sen } t$



$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx$$



$$F(x) = \int_0^x \text{sen } t$$

Por el teorema fundamental, $F'(x) = \text{sen } x$. Por tanto:

$$F(x) = \int \text{sen } x = -\cos x + k \quad (F \text{ es una primitiva de la función sen})$$

Como $F(0) = \int_0^0 \text{sen } t = 0$, entonces $-\cos 0 + k = 0 \rightarrow k = \cos 0 = 1$

La función $F(x)$ es, por tanto, $F(x) = -\cos x + 1$

El área que queremos calcular es:

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x = F(\pi) = -\cos \pi + 1 = -(-1) + 1 = 2$$

Hemos obtenido que el área buscada es $2u^2$.

En la página siguiente veremos un método para hallar esto mismo de forma más rápida y eficaz.

Mientras tanto practiquemos lo aprendido

Ejercicios propuestos

1.- Sea la función: $F(x) = \int_0^x \log(t^2 + 4) \, dt$

Calcula $F'(x)$

2.- Calcula la siguiente integral $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$

REGLA DE BARROW

Los pasos que hemos dado en el ejemplo de la página anterior se utilizan en el siguiente teorema:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Demostración

$F(x) = \int_a^x f$ es la función *área bajo la curva*.

$F'(x) = f(x)$, por el teorema fundamental del cálculo.

$G'(x) = f(x)$, por hipótesis, ya que $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Las funciones que tienen la misma derivada difieren, a lo sumo, en una constante. Por tanto, $F(x) = G(x) + k$

En la igualdad anterior hacemos $x = a$. Como $F(a) = \int_a^a f = 0$, queda: $G(a) + k = 0$, es decir,

$$k = -G(a).$$

Por tanto, queda, finalmente, $F(x) = G(x) - G(a)$

Y si ahora, en esta última igualdad, damos a x el valor b , obtenemos: $\int_a^b f = G(b) - G(a)$

Regla práctica (regla de Barrow)

Para calcular la integral: $\int_a^b f$

1º Buscamos una primitiva, $G(x)$, de f : $G(x) = \int f(x)$

2º Calculamos $G(b)$ y $G(a)$

3º Hacemos

$$\int_a^b f = [G(x)]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a)$$

Ejercicios resueltos

1.- Calcular:

a) $I = \int_2^5 (3x^2 - 2x + 3) dx$

$$\mathbf{b)} I = \int_0^6 (6 + 2t - 0.5t^2) dt$$

$$\mathbf{c)} I = \int_0^\pi \text{sen } x dx$$

$$\mathbf{a)} I = [x^3 - x^2 + 3x]_2^5 = (5^3 - 5^2 + 3 \cdot 5) - (2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2) = 115 - 10 = 105$$

$$\mathbf{b)} I = \left[6t + t^2 - \frac{0.5t^3}{3} \right]_0^6 = (36 + 36 - 36) - (0) = 36$$

$$\mathbf{c)} I = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

Ejercicios propuestos

$$\mathbf{1.- Calcula:} \int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3) dx$$

$$\mathbf{2.- Calcula:} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

SESIÓN 5

RESUMIENDO:

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES

Si para calcular el área comprendida entre una curva $y=f(x)$, el eje OX y las dos abscisas, $x=a$ y $x=b$, nos limitamos a calcular $\int_a^b f(x)$, nos podemos encontrar en diversas situaciones. (Véase página 2)

Aquí, el resultado de la integral no representa el área buscada. Ello es debido a las compensaciones que se producen de las partes positivas con las negativas. La forma correcta de proceder será calcular, por separado, las integrales de los diversos sectores y, posteriormente, sumar sus valores absolutos.

Para calcular el área comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje OX y las abscisas $x=a$ y $x=b$, conviene dar los siguientes pasos:

- XII. Resolver la ecuación $f(x)=0$ para averiguar los puntos de corte de la curva con el eje X .
- XIII. Seleccionar, de entre las raíces de la ecuación anterior, aquellas que estén comprendidas entre a y b . Imaginemos que estas raíces, ordenadas de menor a mayor, sean x_1, x_2 y x_3 . Es decir, se cumple: $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$
- XIV. Buscar una primitiva de $f(x)$. Llamémosla $G(x)$
- IV. Calcular $G(a)$, $G(x_1)$, $G(x_2)$, $G(x_3)$ y $G(b)$.
- V. $G(x_1)-G(a)$, $G(x_2)-G(x_1)$, $G(x_3)-G(x_2)$ y $G(b)-G(x_3)$ son las integrales de los cuatro recintos en los que queda dividida el área buscada.

Sus áreas son los valores absolutos de estas cantidades y el área buscada es la suma de ellas.

Observemos que, con estos pasos, no es necesario dibujar la curva.

PARA FINALIZAR

Esta última sesión va a ser practica.

Recuerda que, entre otras cosas, en esta unidad has aprendido a calcular integrales definidas ¿cómo?

1.- De manera aproximada, utilizando la hoja de cálculo.

2.- De manera exacta utilizando tus conocimientos sobre cálculo de primitivas y la regla de Barrow.

Vamos a añadir un tercer procedimiento:

3.- Utilizando el programa de cálculo MAXIMA. En este programa, que ya hemos utilizado otras veces, la orden para calcular una integral definida es *integrate (función, x, a, b)*; donde a y b son los límites de integración.

Practica tus conocimientos con los ejercicios propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad de los últimos años. Estos ejercicios los puedes encontrar, por ejemplo, en el siguiente enlace: <http://www.selectividad.profes.net/>

Comprueba los resultados utilizando más de un procedimiento.