

Identidades y ecuaciones

Actividad

1. Aquí tienes algunas expresiones con letras, números y signos de operaciones. ¿Qué diferencias observas entre ellas?

(a) $2x - 1 + \frac{3x+2}{2} + \frac{3}{5}x$

(b) $2(x + 3) - 1 = 2x + 5$

(c) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$

(d) $2(x + 5) = x - 1$

(e) $2x^2 - 3 = 5$

Habrás visto que en la primera de ellas no aparece el signo igual. Es una **expresión algebraica sencilla**. En todas las demás hay dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual. A la expresión que hay a la izquierda se le llama **primer miembro** y a la que hay a la derecha, **segundo miembro**. Cada sumando es un **término**, la letra **x** se llama **indeterminada** y los números que la acompañan, **coeficientes**.

En las expresiones b) y c) sustituye la letra **x** por 2. ¿Qué ocurre?

Repite el proceso para $x = -2$, $x = -11$ y $x = \frac{1}{2}$.

Haz lo mismo en las expresiones d) y e).

¿Encuentras alguna diferencia?

Dos expresiones algebraicas relacionadas por el signo igual, tales que al sustituir la indeterminada por cualquier valor numérico resulta una igualdad verdadera, se llama **IDENTIDAD**. Si esto es cierto tan solo para algunos valores de la indeterminada, se llama **ECUACIÓN** y a estos valores se les llama **SOLUCIONES** de la ecuación.

Actividad

De las siguientes expresiones indica las que son identidades y las que son ecuaciones y escribe tu otras:

(a) $2(x - 1) + 3x(x + 1) = 3x^2 + 5(x - 2) + 8$

(b) $(x - 3)2 + 6(x + 1) = -2x + 7$

(c) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

(d) $x(2x - 2) = 3(x + 1)$

Identidades notables

Hay algunas identidades que te interesa manejar con soltura por su interés en la resolución de ecuaciones y su aplicación, por ejemplo, en el cálculo mental. Debido a esta importancia se las conoce como identidades notables. Ya eran conocidas por los babilonios (2000 a. de C.) aunque con otras notaciones y están demostradas geoméricamente en los libros de Euclides en el siglo tercero antes de Jesucristo.

Cuadrado de una suma

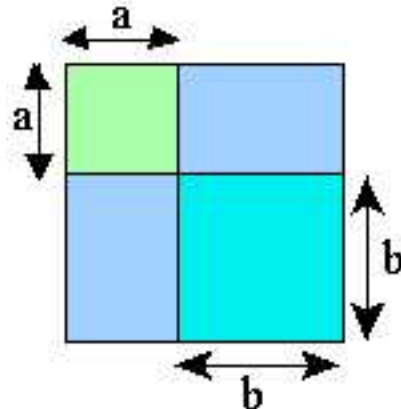
Desarrollando

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ab + bb$; Luego:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Observa que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ es otra forma de **factorizar** que debes recordar.

Geoméricamente



Expresa de dos formas distintas el área del cuadrado grande.

Cualesquiera que sean los números a y b se verifica $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

No olvides que si inviertes los miembros de esta identidad, estás factorizando.

Actividades

1. Desarrolla, aplicando el resultado anterior:

- (a) $(2x + 3)^2$
 (b) $(6p + 3q)^2$
 (c) $(a + \frac{2}{3})^2$

2. Factoriza:

- (a) $x^2 + 6x + 9$
 (b) $4p^2 + 1 + 4p$
 (c) $2a^2 + 8a + 8$

Cálculo mental

Observa que si necesitas calcular rápidamente 512 y no dispones de calculadora, puedes aplicar el resultado anterior mentalmente de una manera sencilla:

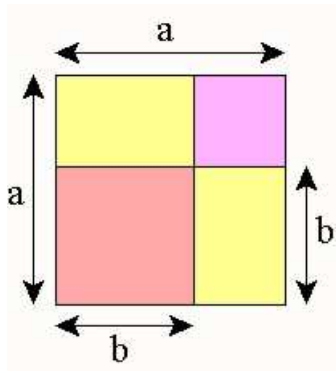
$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2.500 + 100 + 1 = 2.601$$

Calcula mentalmente 1032; 922; 812.

Cuadrado de una diferencia

Al igual que antes, desarrolla $(a - b)^2$. ¿Qué obtienes?

Geoméricamente



Expresa de dos formas distintas el área del cuadrado grande.

Cualesquiera que sean a y b se verifica $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Observa que si inviertes los miembros de esta identidad estás convirtiendo una suma de términos en un producto de factores, es decir, ¡estás factorizando!

Actividades

1. Desarrolla, aplicando el resultado anterior:

- (a) $(x-3)^2$
 (b) $(2p-3q)^2$
 (c) $(a - \frac{2}{3})^2$

2. Factoriza:

- (a) $x^2 - 6x + 9$
 (b) $9p^2 + 4 - 12p$
 (c) $8a^2 - 8a + 2$

Cálculo mental

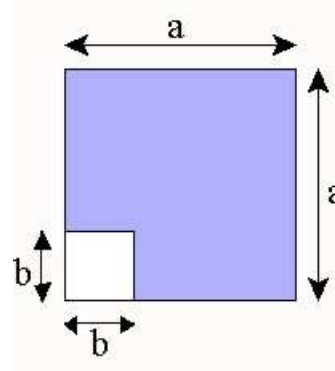
Aplica el resultado anterior para calcular de una manera rápida y sin calculadora:

$$98^2; 49^2; 999^2$$

Suma por diferencia

Desarrolla el producto $(a + b) \cdot (a - b)$. ¿Qué obtienes?

Geoméricamente



Expresa el área de la figura coloreada de dos formas distintas en función de a y b.

Cualesquiera que sean los números a y b se verifica $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Observa que invirtiendo los miembros de la identidad tienes otra forma de factorizar que usarás con frecuencia.

Actividades

1. Desarrolla, aplicando el resultado anterior:

- (a) $(2x + 1)(2x - 1)$
 (b) $(3p - 2q)(3p + 2q)$
 (c) $(2a + \frac{1}{3})(2a - \frac{1}{3})$

2. Factoriza:

- (a) $x^2 - 16$
 (b) $4p^2 - 9q^2$
 (c) $18a^2 - \frac{1}{2}$

Cálculo mental

Aplica el resultado anterior para calcular de una manera rápida y sin calculadora el valor de:
 $55^2 - 54^2$; $32^2 - 30^2$; $28^2 - 25^2$.

Actividades

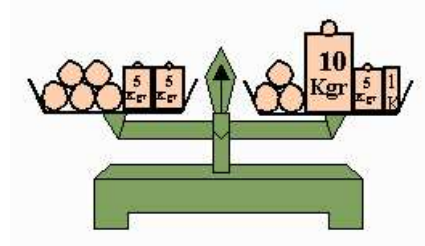
- Un cambio sospechoso. Un labriego tiene un terreno de forma cuadrada. El Ayuntamiento le comunica que debido al trazado de una nueva carretera, le quita 5 metros de uno de sus lados y a cambio le añade 5 metros en su lado contiguo. ¿Es justo el cambio?
- Calcula el valor de $544357869940^2 - 544357869939 \cdot 544357869941$
- ¿Podrías escribir el número 9 como la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos? ¿Y 33? Demuestra que, en general, todo número entero impar se puede expresar como la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos.

Ecuaciones

Cuando intentamos resolver un problema, al traducir el enunciado al lenguaje algebraico obtenemos ecuaciones cuyas letras son las incógnitas (una o más). Al proceso que seguimos para hallar el valor o valores buscados se le llama resolver la ecuación. Son muchos los procedimientos que se han utilizado a lo largo de la historia para resolver una ecuación por simple que ésta haya sido. Aquí verás algunos de ellos. Para comenzar, vamos a trabajar con

ecuaciones de primer grado con una incógnita, que son aquellas que se reducen a la forma $ax + b = c$, siendo a, b y c números cualesquiera y x la incógnita.

Balanzas



Esta balanza está en equilibrio.

Las bolas pesan todas igual.

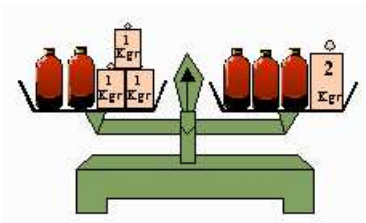
Ten en cuenta que las operaciones que hagas con la balanza deben mantenerla en equilibrio.

¿Cuánto pesará cada bola?

Dibuja en diversas balanzas los pasos que das.

¿Podrías escribir con símbolos todo lo que has hecho?

Actividad



Esta balanza está en equilibrio. ¿Cuánto pesa una botella?

Diagramas

Actividad

Calcula un número tal que si a su doble le sumamos 5 obtenemos el 325.

La ecuación correspondiente será: $2a + 5 = 325$.

Un diagrama de esta ecuación sería:



Si "deshacemos" el diagrama, es decir, si aplicamos al número 325 las operaciones inversas a las realizadas con "a" en sentido contrario:



Es decir, $a = 160$.

Actividad

Resuelve por el método anterior la ecuación $\frac{3x+6}{3} = 17$

Por ensayos sucesivos

Queremos resolver la ecuación $5x - 3 = 9$. Llamamos y a la expresión $5x - 3$. Expresamos en una tabla los valores que va tomando y para los distintos valores de x :

x	0	1	2	3	4	5
y	-3	2	7	12	17	22

El valor de x que buscamos es aquél para el cual y vale 9. Este valor estará comprendido entre 2 y 3 ¿Por qué?

Este "encuadramiento" que hemos hecho de la solución de la ecuación se escribe: $2 < x < 3$.

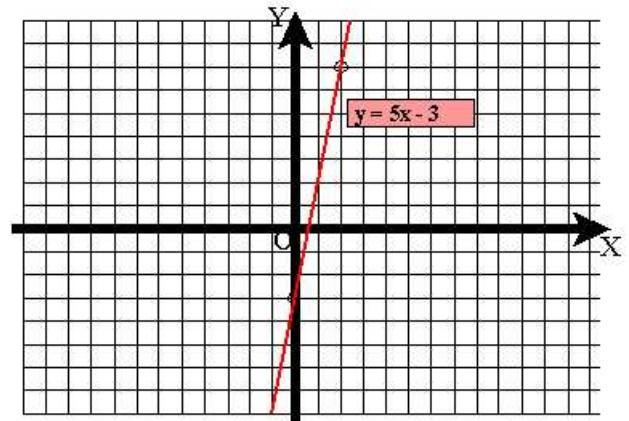
Para hacer un "encuadramiento" mejor de la solución, podemos usar el siguiente método:

Calculamos el valor de $5x - 3$ para $x = 2.5$. Si el resultado es mayor que 9, probamos con un valor comprendido entre 2 y 2.5, y si es menor que 9, probamos con uno comprendido entre 2.5 y 3. En nuestro caso $5 \cdot 2.5 - 3 = 9.5$, que es mayor que 9, lo que quiere decir que $2 < x < 2.5$. Si probamos con 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 veremos que $x = 2.4$ es la solución buscada.

Si ninguno de estos valores hubiese sido el correcto, habríamos repetido el proceso anterior el número de veces necesario para obtener el "encuadramiento" deseado de la solución.

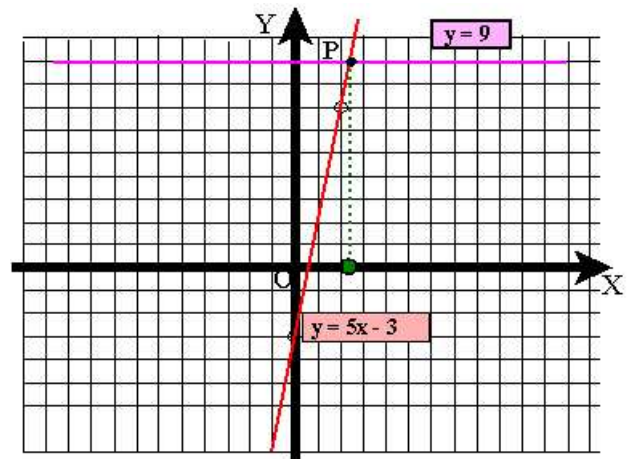
Gráficamente

Si representamos en unos ejes coordenados cartesianos, los puntos de coordenadas (x,y) de la tabla anterior, obtenemos la recta de la figura.



La solución de la ecuación $5x - 3 = 9$ será aquel punto de la recta $y = 5x - 3$ cuya ordenada sea 9 (es decir, $y = 9$).

Para calcular este punto gráficamente:



Traza por la división 9 del eje OY una recta paralela al eje OX. Esta recta corta a la recta $y = 5x - 3$ en el punto P. Traza ahora una recta paralela al eje OY que pase por el punto P. El valor buscado de x será la intersección de esta recta con el eje OX.

¿Por qué?

Actividad

Halla gráficamente y por ensayos sucesivos la solución de la ecuación $4x + 1 = 16$.

Con el álgebra

Observa las ecuaciones siguientes: $2x + 11 = 17$; $2x - 6 = 0$; $x - 3 = 0$ Todas ellas tienen como única solución $x = 3$. A las ecuaciones que tienen las mismas soluciones se las llama **equivalentes**.

El álgebra nos enseña como método para resolver ecuaciones de este tipo el ir transformando la ecuación dada en otras equivalentes hasta llegar a una cuya solución sea evidente. Las transformaciones que puedes realizar para ello se basan en dos reglas sencillas que tú mismo puedes deducir.

La ecuación $x + 4 = 9$ tiene por única solución $x = 5$.

- Si a los dos miembros de la ecuación les sumamos 7, la ecuación que se obtiene ¿tiene la misma solución?
- ¿Y si le sumamos -16?
- ¿Y si le sumamos $2x + 4$?
- ¿Qué operación te interesaría realizar para obtener una ecuación equivalente a la dada cuya solución sea evidente?
- ¿Qué operaciones con la balanza te recuerdan estos procesos?

Si a los dos miembros de una ecuación se le suma o resta un mismo número o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.

La ecuación $4x - 3 = 17$ tiene como única solución $x = 5$.

- Si los dos miembros de la ecuación los multiplicamos por 3, la ecuación resultante ¿tiene la misma solución?
- ¿Y si los dividimos por 5?

- ¿Y si los multiplicamos o dividimos por $x + 1$ (siempre que x sea distinto de -1 ya que no podemos dividir por cero!). Compruébalo en cada ecuación que vayas obteniendo.
- ¿Qué operaciones realizarías en la ecuación dada para obtener otra equivalente cuya solución sea inmediata?

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número expresión algebraica distinta de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

- ¿Qué reglas prácticas deducirías de los dos principios de equivalencia anteriores?

Actividad

Indica cuál de los siguientes pasos es incorrecto y di por qué:

1. $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$
2. $a \cdot (a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$
3. $a = a + a$
4. $a = 2a$
5. $1 = 2$

Actividades resueltas

1. Vamos a resolver la ecuación $2x - 2(x - 2) + 3(x - 1) = 4(2x - 2)$

$$2x - 2x + 4 + 3x - 3 = 8x - 8$$

$$3x + 1 = 8x - 8$$

$$3x + 1 + (-1) = 8x - 8 + (-1)$$

$$3x + (-8x) = 8x - 9 + (-8x)$$

$$-5x = -9$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-9}{-5}$$

$$x = \frac{9}{5}$$

Indica lo que hemos hecho en cada paso.

2. Resolvamos ahora la ecuación $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x}{5}$. Multiplicando por el m.c.m. de los denominadores:
$$10x + 15(x - 1) + 5 = 6x$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$10x + 15x - 15 + 5 = 6x$$

$$25x - 10 = 6x$$

$$25x - 6x = 10 \text{ (¿Qué hemos aplicado aquí?)}$$

$$19x = 10$$

Dividiendo por el coeficiente de la x , obtenemos $x = \frac{10}{19}$.

Como habrás observado:

Primero debemos efectuar las operaciones que se indiquen en los dos miembros (potencias, productos, cocientes, sumas, restas, supresión de denominadores, etc) respetando siempre las reglas de prioridad entre ellas. Después ponemos en un miembro todos los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro el término independiente. Por último, se dividen los dos miembros por el coeficiente de la incógnita.

Actividades

1. Un número a verifica $2(a + 5) - 3 = 7$. Encuéntralo.
2. ¿Qué número m será el que verifique $4(m - 2) = 6m + 7$?
3. Halla el valor de x solución de la ecuación: $\frac{x}{3} - \frac{x+2}{2} - \frac{3}{2} = \frac{4x}{6} + 3$
4. Enrique ha cometido algunos errores haciendo sus ejercicios. Corrígelos:
 - (a) $3x + 1 = 1$; $3x = 0$; $x = -3$.
 - (b) $8 + 2x = 3x$; $8 = x$; $x = -8$.
 - (c) $(x - 4) + 2x = 0$; $3x = 4$; $x = 4/3$.
 - (d) $2x + 3 = 5x + 3$; $0 = 3x$; $x = 1/3$.
 - (e) $3x + 2 = 7$; $3x = 5$; $x = 5 - 3$; $x = 2$.
 - (f) $x/5 = 0$; $x = -5$.
 - (g) $x - \frac{x+1}{2} = 1$; $\frac{2x-x+1}{2} = 1$; $x + 1 = 2$; $x = 1$
 - (h) $\frac{1}{3} \frac{x+1}{2} = \frac{x}{6} - 1$; $\frac{2}{6} \frac{3x+3}{6} = \frac{x}{6} - \frac{6}{6}$; $6x + 6 = x - 6$; $x = \frac{-12}{5}$

Por métodos iterativos

Este método se usaba desde hace mucho tiempo a pesar de que era un proceso lento y tedioso que necesitaba mucho cálculo. Tu puedes practicarlo hoy de una forma más rápida gracias a las calculadoras. Vamos a ver cómo resolvían la ecuación $2x - \frac{1}{3}x = 15$.

Para empezar, despejaban una x en el primer miembro: $x = \frac{15 + \frac{1}{3}x}{2}$.

A continuación, le daban un valor cualquiera a x (generalmente usaban un valor que creyeran próximo a la solución) y calculaban el valor que salía para x al sustituirlo en el segundo miembro. Este proceso se repetía para cada valor de x que iban obteniendo. Por ejemplo, si damos a x el valor 3, obtenemos: $x = \frac{15 + \frac{1}{3}3}{2} = 8$

Repetiendo el proceso, los valores para x que vamos obteniendo serán (compruébalo con tu calculadora):
3, 8, 8'8333333, 8'9722222, 8'9953703, 8'9992283, ...

Como verás, estos valores se van aproximando cada vez más a 9, que es la solución buscada.

Comprueba este proceso comenzando por cualquier otro valor. Curioso! ¿verdad?

¿Por qué esto funciona siempre?

Actividad

Resuelve por el método iterativo (con calculadora) la ecuación del Papiro de Rhind.

Producto nulo

Una de las aplicaciones esenciales de la factorización es que nos permite resolver ecuaciones de una manera rápida y eficaz.

Si efectuamos el producto de un número cualquiera por cero, el resultado es siempre cero. Recíprocamente, la única manera de obtener un producto nulo es que alguno de los factores sea cero.

Actividad resuelta

Tenemos la expresión $A = (x + 2)^2 - (3 - x)(x + 2)$ y queremos resolver la ecuación $A = 0$.

Si desarrollamos esta expresión obtenemos $A = 2x^2 + 3x - 2$ que, por ahora, no nos permite resolver la ecuación $A = 0$.

Si factorizamos, obtenemos que $A = (x + 2)(2x - 1)$.

La ecuación $(x + 2)(2x - 1) = 0$ es ahora fácil de resolver, ya que, según hemos dicho antes, se ha de verificar que $x + 2 = 0$ ó $2x - 1 = 0$. Las soluciones de estas dos ecuaciones ($x = -2$ y $x = 1/2$) son las

soluciones de la ecuación $A = 0$. Compruébalo!

Esta propiedad sólo es cierta para un producto nulo, ya que si un producto de dos números es otro número cualquiera, entonces estos dos números pueden ser cualesquiera (Si $a \cdot b = 3$ entonces a y b pueden ser cualquier número).

Las soluciones de la ecuación $(ax + b) \cdot (cx + d) = 0$ son las de las ecuaciones $ax + b = 0$ y $cx + d = 0$.

Actividades

1. Resuelve, por el método anterior, las ecuaciones:

- $3x - 8x^2 = 0$.
- $(x + 1)(x - 1)x = 0$.
- $x^2 + 6x + 9 = 0$.
- $x^2 - 16 = 0$.
- $(2x + 1)(x - 5) + (3x + 2)(x - 5) = 0$.

2. Escribe una ecuación cuyas soluciones sean:

- 2 y $1/2$
- 0 y -3
- 1, 5 y $3/4$

Ecuaciones y problemas

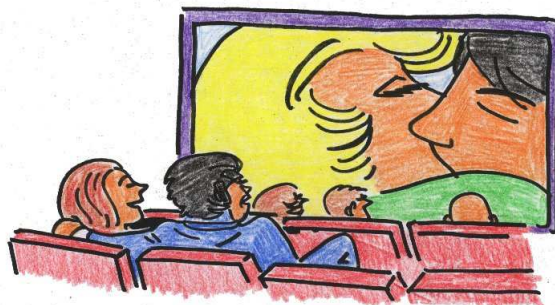
Con frecuencia nos resulta más complicado traducir los datos de un problema en una ecuación que el encontrar la solución de ésta. Es fundamental tener una metodología y un orden a la hora de dar cada uno de los pasos necesarios para llegar a escribir la ecuación cuya solución nos permite resolver el problema planteado.

El primer paso es escoger la incógnita (la pregunta que nos plantea el problema nos guiará para elegirla). Después, cada información que nos dé el enunciado se irá traduciendo al lenguaje algebraico. Por último, se escribe la ecuación, se resuelve y se comprueba si la(s) solución(es) cumple(n) con todas las condiciones del enunciado del problema.

Actividades resueltas

Ignacio venía muy contento porque era el primer

día que iba con su novia al cine. "No he podido invitarla, pero he pagado 1 euro más que ella". En total les ha costado 7 euros. ¿Cuánto pagó cada



uno?

Llamamos x a la cantidad que había pagado su novia.

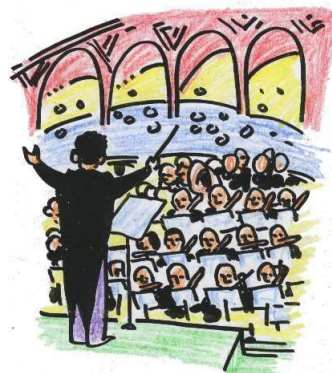
Entonces, Ignacio habrá pagado $x + 1$ euro. La ecuación que nos permite calcular lo que ha pagado cada uno será:

$$x + (x + 1) = 7$$

Si la resolvemos: $x = 3$ euros es lo que pagó la novia y lo que pagó Ignacio será 4 euros. Compruébalo.

Actividad

A un concierto de música asisten 3.000 personas. Las localidades de asiento cuestan 15 euros y las demás 6 euros. La recaudación fue de 28350 euros.



- Llama x al número de localidades de asiento. ¿Cómo escribirías el número restante de localidades?

- Escribe, en función de x , la parte de recaudación

que corresponde a las localidades de asiento y la parte correspondiente a las demás.

- Con los datos anteriores, escribe una ecuación que nos manifieste que la recaudación es de 28350 euros.
- Resuelve esta ecuación y escribe claramente cuántas personas asistieron al concierto sentadas y cuántas de pie.

Llegar tarde puede costar caro



Un pasajero que debía tomar el autobús de Málaga a Granada, lo ha perdido por 6 minutos de retraso. Decide entonces tomar un taxi para darle alcance. Sabiendo que el autobús lleva una velocidad media de 80 km/hora y el taxi de 100 km/hora, ¿cuánto tiempo tardará el taxi en alcanzar al autobús? ¿Cuánto dinero pagará al taxista si éste cobra a razón de 70 cts por kilómetro? (No olvidar que $Velocidad = \frac{espacio}{tiempo}$).

Llamamos x al tiempo transcurrido desde que sale el autobús hasta que el taxi lo coge. El espacio recorrido por el autobús será $80x$.

Como el taxi sale 6 minutos ($\frac{1}{10}$ de hora) más tarde, el espacio recorrido por éste será $100(x - \frac{1}{10})$. La ecuación que nos permite resolver el problema será: $100(x - \frac{1}{10}) = 80x$ ya que el espacio recorrido por ambos en el momento del encuentro es el mismo.

Resolviendo la ecuación obtenemos $x = \frac{1}{2}$ hora. El espacio recorrido por ambos es $80 \Delta \frac{1}{2} = 40km$. El precio del recorrido será:

$$40km \times 0,70 \text{ euros/km} = 28 \text{ euros.}$$

Actividad

1. Alejandro, Alberto y Sandra deciden verse un sábado en una ciudad que dista de la suya 90 km. Alejandro, parte a la 10 de la mañana en bicicleta a una velocidad media de 24 km/hora. Alberto, decide ir en su moto a una velocidad media de 45 km/hora. Sandra parte a las 10h y

20 minutos en el coche de su padre a una velocidad media de 90 km/hora.

- (a) ¿Se cruzarán Alberto y Sandra?
- (b) ¿A qué hora y a qué distancia de su ciudad aproximadamente se juntarán Alejandro y Alberto?
- (c) ¿A qué hora y a qué distancia de su ciudad cogerá Sandra a Alejandro?

2. Pájaros

Sobre dos ramas de un árbol hay situados unos pájaros: 84 en la superior y 48 en la inferior. Poco después, sobre la rama alta había un número de pájaros quintuplo que en la otra. ¿Cuántos pájaros habían volado de la rama baja a la alta?

Llamamos x al número de pájaros que habían volado de la rama baja a la alta. En la rama baja habrá ahora $48 - x$ pájaros. En la rama alta habrá ahora $84 + x$ pájaros. La ecuación será $84 + x = 5(48 - x)$. Resolviendo esta ecuación, $x = 26$ pájaros.

Actividades

1. En dos vasijas hay igual cantidad de agua. Sacando 34 litros de una y 80 litros de la otra quedan en la primera triple número de litros que en la segunda. ¿Cuántos litros había en cada vasija?
2. **Un árbol mágico**
Según una antigua leyenda, había en un bosque un árbol muy corpulento con una gran oquedad en su tronco. Este tenía la virtud de duplicar el dinero que se metiera en él, pero sólo un hechicero sabía dónde se hallaba el tronco, y cobraba 24 monedas por cada vez que se hiciera uso del mismo. Un individuo quiso comprobar el hecho y acudió al hechicero, al que entregó una cierta cantidad de monedas; éste le devolvió el dinero doblado y le cobró las 24 monedas. El individuo, emocionado, repitió la operación dos veces más; pero, al pagar las últimas 24 monedas al hechicero, se quedó sin ninguna moneda. ¿Cuántas monedas entregó al principio

al hechicero?



Relojes

Un reloj de agujas marca las tres en punto. A qué hora se superpondrán las agujas por primera vez?

Llamamos x al número de monedas que entregó al principio al hechicero. En la tabla siguiente se reflejan las distintas situaciones tras cada introducción del dinero en la oquedad del tronco mágico.

Monedas que entrega	Monedas que le devuelve el hechicero
x	$2x - 24$
$2x - 24$	$2(2x - 24) - 24 = 4x - 72$
$4x - 72$	$2(4x - 72) - 24 = 8x - 168$

La ecuación será: $8x - 168 = 0$ cuya solución es $x = 21$ monedas. Comprueba que el resultado es correcto verificando cada paso para este número de monedas.

Actividad

El padre de Rafael tiene un gran barco. Juntos salieron a hacer un viaje sin comprobar el fuel-oil que tenía en su depósito. El primer día se gastó la tercera parte; el segundo día, la tercera parte de lo que le quedaba más 200 litros; el tercer día, la tercera parte del resto y 300 litros más. Llegados a puerto, comprobaron que al depósito aún le quedaban 300 litros en su depósito. ¿Con qué cantidad de fuel-oil se hicieron a la mar?

Llamamos x a lo que recorre la aguja horaria hasta superponerse con el minuterero. Por tanto, el minuterero tendrá que recorrer $15 + x$. El minuterero recorre 60 minutos cuando la aguja horaria recorre 5 minutos, es decir, el minuterero anda 12 veces más que la aguja horaria. La ecuación a plantear será $12x = 15 + x$, cuya solución es $x = 1'3636...$ que, aproximadamente es 1 minuto y 18 segundos. Por tanto, se superpondrán a las 3h 15m + 1m y 18s, es decir, a las 3h 16m y 18 s.

Actividad

Un reloj marca las 6 horas en punto. ¿Cuándo se volverán a superponer las dos agujas?

Trabajos

Un albañil y su ayudante tardan 4 horas en poner el suelo de un cuarto de baño. El albañil, más experto en este tipo de trabajos, afirma que él sólo haría el trabajo en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo haría su ayudante?



Si juntos tardan 4 horas en hacer el trabajo, en una hora harán $\frac{1}{4}$ de ese trabajo. El albañil en una hora habrá hecho $\frac{1}{6}$ del trabajo. Si llamamos x al tiempo, en horas, que tardaría el ayudante en hacer el trabajo, **en una hora habrá hecho $\frac{1}{x}$ del trabajo**. La ecuación a resolver será: $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$. Multiplicando los dos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores ($12x$): $2x + 12 = 3x$ De donde $x=12$ horas.

Actividad

Tres obreros hacen un trabajo en 4 días. Sabiendo que el primero haría ese trabajo en 9 días y el segundo en 12 días, ¿cuánto tiempo tardaría en hacerlo el tercero?

Una ecuación muy especial

Desde muy antiguo los matemáticos han estado interesados en encontrar tres números enteros a , b , c que fueran soluciones de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ (geométricamente el problema consiste en encontrar tres números que fuesen las medidas de los tres lados de un triángulo rectángulo). **Pitágoras**, filósofo griego del siglo VI a. de C. y natural de la isla de Samos, tuvo que emigrar a Crotona (sur de Italia) donde fundó una academia o comunidad filosófica, política y religiosa en la que se trataron innumer-

ables problemas matemáticos (sobre todo numéricos). Todos los descubrimientos de esta academia se le atribuyen a él, aunque fueran sus discípulos los autores de ellos. A la terna de números (a,b,c) que verifiquen esta ecuación se le llama **terna pitagórica**. Por ejemplo, 3, 4 y 5 es una terna pitagórica. Naturalmente, cualquier múltiplo de una de estas ternas también es pitagórica. Así, 15, 20 y 25, resultado de multiplicar los números anteriores por 5, también es una terna pitagórica, ya que $15^2 + 20^2 = 25^2$. A las ternas tales que no hay ningún factor común a los tres números se les llama **ternas primitivas**. Se ha demostrado que todas estas ternas son de la forma:

$$\begin{cases} a = 2mn \\ b = m^2 - n^2 \\ c = m^2 + n^2 \end{cases} \text{ donde } m \text{ y } n \text{ son números primos}$$

entre sí y además uno de ellos es par y el otro es impar. Por ejemplo, si $m = 3$ y $n = 2$, entonces $a = 12$, $b = 5$ y $c = 13$, que es una terna pitagórica primitiva. Encuentra otras soluciones de esta ecuación.

Generalización

El matemático **Pierre de Fermat** (1601 - 1665) estudió distintas prolongaciones de este problema. La más famosa por su resistencia a lo largo de la historia a ser demostrada a pesar del gran número de matemáticos que se han dedicado a ello, es la siguiente: Fermat demostró que los únicos números enteros positivos tales que $a^3 + b^3 = c^3$ son $(a = b = c = 0)$ ó $(a = 0, b = 1, c = 1)$. En general, Fermat enunció que, si n es un número entero positivo mayor que 2, la ecuación $a^n + b^n = c^n$ no puede tener otras soluciones enteras y positivas distintas a las anteriores. Fermat, que casi nunca publicaba sus descubrimientos e incluso olvidaba anotar las demostraciones de sus resultados, afirmaba haber demostrado este último, pero lo cierto es que a lo largo de los tiempos no se ha podido demostrar.

Actividades finales

1. Distínguelas!

De las siguientes igualdades indica cuáles son identidades y cuáles ecuaciones.

(a) $(1 - x) \cdot (1 + x) = x^2 - 1$

- (b) $(x + 3)(x - 1) + 2(x + 3)(x + 2) = 3(x + 3)(x + 1)$
 (c) $(x - 1)^2(x - 3) + 4(x - 1) = (x - 1)(x - 2)^2$
 (d) $(x + \frac{3}{2})^2 = 3x + x^2 + \frac{9}{4}$

2. Identidades notables

Desarrolla las siguientes expresiones:

- (a) $A = (2x - 3)^2$
 (b) $B = (4x + \frac{3}{2})^2$
 (c) $C = (0'3 + 2x) \cdot (0'3 - 2x)$
 (d) $(3x - \frac{2}{x})^2$

3. Completa:

- (a) $(\dots + 2)^2 = 9x^2 + \dots + \dots$
 (b) $\dots - 12x + 9 = (\dots - 3)^2$
 (c) $x^2 - \dots = (\dots + 6) \cdot (\dots - \dots)$
 (d) $(\dots + \dots) = \frac{4}{25} + \dots + \frac{x^2}{4}$
 (e) $169 - 2x^2 = (\dots + \dots) \cdot (\dots - \dots)$
 (f) $(2x - \dots)^2 = \dots - 24x + \dots$

4. Factoriza:

- (a) $A = x^2 - 8x + 16$
 (b) $B = 25 + 9x^2 + 30x$
 (c) $C = 16 - 25x^2$
 (d) $D = 16 - 16x + 4x^2$
 (e) $E = 2 - x^2$
 (f) $F = 1 + x^2 + 2x$
 (g) $G = -4x^2 + 3$
 (h) $H = (3x + 1)^2 - (4 - 2x)^2$
 (i) $I = (x + 1)^2(x - 3) + (2x + 3)(x + 1)$
 (j) $J = (x - 2)^2 - 36x^2$
 (k) $K = 9(x + 1)^2 - 4(1 - x)^2$

5. Cálculo mental

Efectúa los cálculos indicados mentalmente:

- (a) 61^2 ; 59^2 ; 101×99 .

- (b) ¿Cuánto me costarán 9'5 metros de cobre a 10'5 euros el metro? ¿Y 51 metros de tubería a 49 euros el metro?

6. Comprueba que son ciertas las igualdades $4^2 + 4 = 5^2 - 5$ y $7^2 + 7 = 8^2 - 8$ ¿Qué resultado general deducirías? Demuéstralo.
 7. Expresa 5 como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos. ¿Es posible hacer esto con 6? En general, demuestra que todo número natural impar se puede poner como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos.

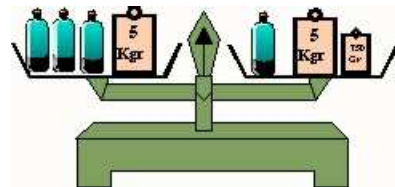
8. Ecuaciones con...

Balanzas

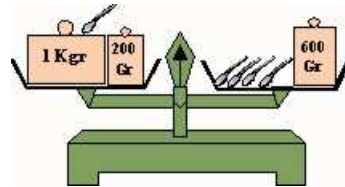
Las balanzas siguientes están en equilibrio. Averigua en cada caso el peso de los objetos que aparecen en ellas.



(a)

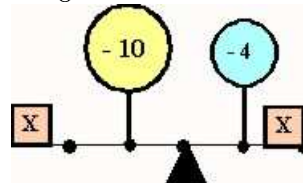


(b)



(c)

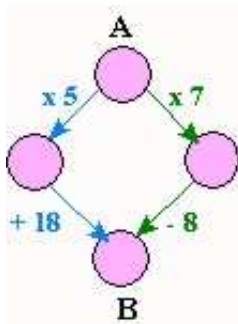
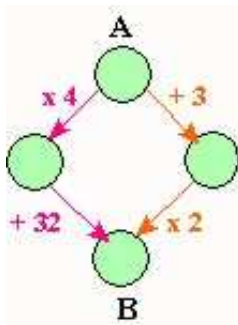
- (d) Escribe y resuelve la ecuación que plantea la siguiente balanza:



9. Diagramas

En cada uno de los casos siguientes, debes escribir el diagrama correspondiente al problema planteado y resolver la ecuación mediante el diagrama inverso:

- Encuentra un número natural tal que si triplicamos su siguiente y después hallamos su mitad, obtenemos el número 24.
- Soy un número tal que si divides por 7 el resultado de restarle 3 a mi doble, se obtiene 12. ¿Quién soy?
- Resuelve $\frac{3x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{5}$.
- En los siguientes diagramas averigua el número que has de situar en la casilla A para que el número obtenido por ambos caminos en la casilla B sea el mismo:



10. Por ensayos sucesivos y gráficas

Resuelve por estos métodos las ecuaciones:

- $2x - 3 = 5$.
- $25x - 2 = 31$.
- $2x + 18 = 3(17 - x)$.

11. Con el álgebra

Resuelve, aplicando los principios de equivalencia antes estudiados, las siguientes ecuaciones:

- $3x + \frac{x+1}{3} = \frac{7x}{2} - 5$
- $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} = 1$
- $\frac{3}{2} \left(x + \frac{5}{3}\right) = 2 - 3x$
- $\frac{2}{3} \left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$
- $(x-2)(x+2) - 3(x-1)^2 = 2(x-x^2) + 5$
- $\frac{x-3}{2x-5} - \frac{3x+1}{6x+1} = 0$

12. Métodos iterativos

Resuelve por este método, ayudándote con la calculadora, las ecuaciones:

- $\frac{x}{5} + 2x = 22$
- $5x - \frac{x+1}{3} + 33 = 0$

13. Producto nulo

Resuelve las ecuaciones siguientes por el método del producto nulo, factorizando previamente cuando sea necesario:

- $\left(2 + \frac{5x}{2}\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 0$
- $(2x + 5) \cdot (x - 1) - x \cdot (x - 1) = 0$
- $\frac{16}{9} - (2x + 3)^2 = 0$
- $49x^2 + \frac{28}{3}x + \frac{4}{9} = 0$
- $\frac{1}{9}x^2 + \frac{9}{25} = \frac{2}{5}x$
- $(2x - 5)^2 = 4$

14. Desarrolla primero y factoriza después para obtener una ecuación del tipo producto nulo:

- $x^2 + 8(1 - x)^2 = 2(x - 2)^2$
- $(x - 2)^2 = (3x - 2) \cdot (3x + 2) + 8$
- $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = \frac{5}{4}$

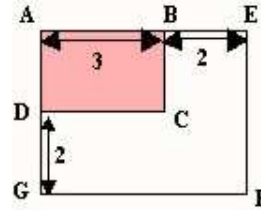
Cálculo y geometría

15. Demostrar que cualquier número natural a (no nulo) verifica que el triángulo cuyas medidas de sus lados sean los números $2a+1$, $2a(a+1)$ y $2a(a+1)+1$ es rectángulo.

16. ¿Cuál es el radio de una circunferencia tal que la medida de su área es la misma que la de su perímetro?
17. ABC es un triángulo rectángulo en A y de catetos $AB = 5$ cm y $AC = 9$ cm. ¿Es posible encontrar un punto P sobre el lado AC tal que el área del rectángulo de base AP y altura AB sea igual a los dos tercios del área del triángulo ABC?
18. Un hombre de negocios tiene un solar de forma cuadrada que se ve afectado por el trazado de una futura calle. El Ayuntamiento le comunica que le quitará 3 metros del lado que linda con ésta. Tras hacer sus cálculos responde que, para no perder nada, le tienen que prolongar el lado contiguo de su solar en 5 metros. ¿Cuál es la longitud del lado del solar?
19. Tenemos dos circunferencias concéntricas de radios a y b ($a > b$). ¿Cómo habremos de tomar a y b para que el área de la corona circular que forman sea igual que el área de la circunferencia menor?
20. El número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se le llama **número de oro**.
- Comparar $\Phi - 1$ y $\frac{1}{\Phi}$.
 - Demostrar que Φ es una solución de la ecuación $x^2 = x + 1$ y calcular Φ^2 .
 - Demostrar que, para todo número natural n el número áureo es una solución de la ecuación $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$.
 - Calcular después el valor de Φ^3 y Φ^4 .
21. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 12cm y la hipotenusa 8 cm más grande que el otro cateto. ¿Cuál es su área?
22. En un cuadrado, aumenta su longitud en 2 cm y la anchura en 3 cm. Obtenemos así un rectángulo cuya área excede en 41 cm^2 al área del cuadrado inicial. ¿Cuál era el lado del cuadrado?
23. Los radios de dos circunferencias concéntricas se diferencian en 4 cm. y uno de ellos es $\frac{3}{4}$ del

otro. Calcula el área de la corona circular limitada por las dos circunferencias.

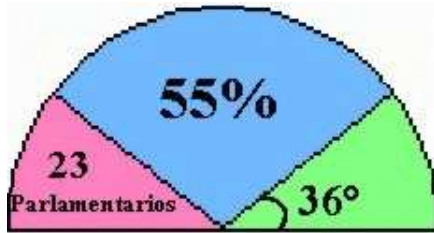
24. El lado AB de un rectángulo ABCD mide 3 cm. Ampliamos los lados AB y AD en 2 cm. y trazamos el rectángulo AEBF de la figura adjunta, de área 20 cm^2 .



- Expresa el área de la figura coloreada en función del lado AD.
 - ¿Cuánto medirá el lado AD?
25. Un trapecio ABCD ($AB \parallel CD$) rectángulo en A, tiene por dimensiones $AB = 5$, $CD = 3$, $AD = 4$. Sea M un punto de AD. Llamamos x a la distancia AM y a , b , c y d a las áreas de ABM, CDM, BCM y BCDM, respectivamente.
- Expresar a , b , c y d en función de x .
 - Determinar x para que:
 - $a = b$
 - $c = a + b$
 - $a = d$
 - $BM = 6$.
26. En un terreno de forma cuadrada queremos plantar árboles que estén alineados y equidistantes entre sí. Hacemos una primera distribución y nos sobran 11 árboles. Decidimos entonces poner un árbol más por lado y resulta que nos faltan dos. ¿Cuántos árboles teníamos?
27. El tablero de la mesa de comedor de mi casa es circular de diámetro d . Hoy comemos más personas en casa y, al abrir la mesa, observo que la parte de ésta que se amplía es un cuadrado. Si el perímetro de la mesa ahora es de $591,1$ cm, ¿cuál es la superficie de la mesa antes y después de abrirla?

Ecuaciones y problemas

28. El precio de una almohadilla eléctrica subió en Enero un 4% y en Febrero volvió a subir un 5%, adquiriendo una valor de 32 euros. ¿Cuál era su precio antes de las dos subidas?
29. Una determinada cantidad de dinero al 4% de interés produce los mismos intereses que 560 euros al 6%. ¿Qué cantidad es esta?
30. En el verano pasado, la tercera parte de los veraneantes que vinieron a mi pueblo eran franceses, la quinta parte alemanes, la séptima parte holandeses y el resto eran 204 ingleses. ¿Cuántos veraneantes hubo?
31. El parlamento de cierta autonomía está formado por representantes de tres formaciones políticas A, B y C. Un esquema de la actual representación viene dado por el dibujo de la figura adjunta.



¿Cuántos parlamentarios hay en esta cámara?

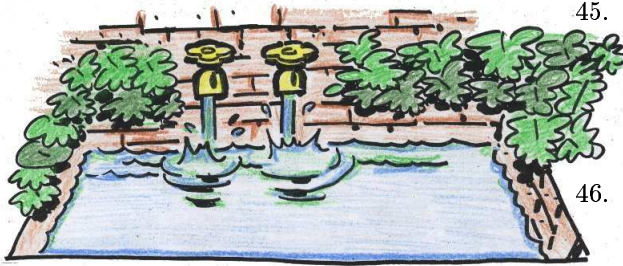
32. La media de cinco notas de un alumno es 6. Si añadimos una sexta nota, la media aumenta a 6'5. ¿Cuál será esta última nota?
33. Un empresario invirtió durante un año una cantidad de dinero en bolsa. En el primer semestre perdió 9000 euros, pero en el segundo ganó un cuarto de lo que le quedaba, consiguiendo quedarse al final de año sin pérdidas ni beneficios. ¿Cuánto dinero invirtió?
34. En una gasolinera se han vendido de Lunes a Domingo, ambos incluidos, 5.900 litros de gasolina. Si cada día se han vendido 50 litros más que el día anterior, ¿cuánta gasolina se vendió el Jueves?

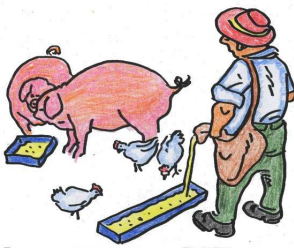

35. Un equipo de rugby compra 30 camisetas y 7 balones por un total de 486 euros. El precio de una camiseta es las dos terceras partes del precio de un balón. ¿Cuál es el precio de cada camiseta y de cada balón?
36. En una fiesta organizada para conseguir ayuda para el viaje de estudios, la cuarta parte tenían más de 18 años, 125 tenían entre 16 y 18 años y la tercera parte tenían menos de 16 años. Hallar el número de personas que asistieron a la fiesta.
37. Un grupo de niños va a una tienda de deportes para comprar un balón de fútbol. El dependiente les dice que para llevarse el que les ha gustado han de poner cada uno 6 euros. Al saber el precio, dos de ellos deciden no participar. El dependiente les dice que entonces cada uno ha de poner 4 euros más. ¿Cuál era el precio del balón?

38. Una ardilla se come el primer mes de invierno las $\frac{3}{8}$ partes de las nueces que tenía almacenadas; el segundo mes se come la mitad de lo que le quedaba y el tercer mes las $\frac{4}{5}$ partes del resto, quedándole aún 10 nueces. ¿Cuántas nueces tenía almacenadas?



39. Un estanque de 30 hectolitros(hl) tiene un escape y se necesitan 40 horas para llenarlo con dos grifos que tienen un caudal de 1'25 hl/h. ¿Cuál es el caudal del escape?



40. ¿Qué número hay que sumarle al numerador y denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ para obtener la fracción $\frac{5}{14}$?
41. Tres veleros hacen un crucero por el Mar Mediterráneo. El primero tarda 4 día menos que el segundo, y el tercero tarda las dos terceras partes que el segundo y 6 día más que la mitad del tiempo empleado por el primero. ¿Cuánto tardó cada velero?
42. Un granjero compró pienso para sus animales. El primer día les dio por la mañana la cuarta parte de la cantidad comprada y por la tarde 50 kg más; el segundo día, por la mañana, les dio las $\frac{2}{5}$ partes de lo que le quedaba y por la tarde 50 kg más; el tercer día, por la mañana, les dio la mitad de lo que le quedaba y por la tarde 50 kg. Esa noche observó que sólo le quedaban 9 kg. ¿Qué cantidad de pienso compró?
- 
43. Encontrar dos enteros consecutivos tales que su suma sea igual a la quinta parte del menor aumentada en las $\frac{23}{13}$ del mismo.
44. Dos números son uno el doble del otro. Si le restamos 6 a cada uno de ellos, el mayor es el triple del menor. ¿Cuáles son estos números?
45. Las ruedas delanteras de un coche tienen 0'40 m de radio y las posteriores 0'63 m. En cierto recorrido las de menor radio dan 414 vueltas más que las de radio mayor. ¿Cuál es la longitud de dicho recorrido?
46. Hallar un número de dos cifras cuya suma es 9 y tal que su doble supere en 18 al número obtenido invirtiendo el orden de sus cifras.
47. Ángel tiene 6 años y su padre 30. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será doble que la del hijo?
48. Juan dispone de tres horas y cuarto para dar un paseo. Al salir de su casa se sube a un carro que se mueve con una velocidad media de 8 km/h. ¿A qué distancia de su casa debe bajarse del carro para iniciar andando la vuelta si sabe que a pie recorre 5 km en una hora?
- 
49. Dos ciudades A y B distan 90 km. A las 10h David sale en bicicleta de A hacia B a una velocidad media de 24 km/h. Antonio efectuará el mismo trayecto, pero él saldrá en moto a la 11h 30m a la velocidad media de 45 km/h. Laura, saldrá desde B hacia A a las 10h 20m, en coche, a la velocidad media de 90 km/h.
- Representa gráficamente esta situación.
 - ¿Se cruzarán Antonio y Laura?
 - ¿A qué hora y a qué distancia se juntan Antonio y David?
 - ¿A qué hora y a qué distancia de A se cruzará Laura con David?
50. Un grupo de amigos consume lo mismo en un bar. Si cada uno pone 5 euros, faltan 3 euros y si ponen 6 euros, sobran 4 euros. ¿Cuántos amigos estaban?

51. Un depósito tiene tres tubos de abastecimiento: El primero lo llena en 6 horas; el segundo en 10 horas y los tres juntos en 3 horas. ¿En cuánto tiempo lo llenará el tercer tubo?
52. Dos ciudades A y B distan entre sí 80 km. Un ciclista parte de A hacia B llevando una velocidad media de 10 km/h en los primeros x kilómetros, que son de cuesta, y una velocidad media de 60 km/h en el tramo restante, que es un descenso. Si en el recorrido de B hacia A tarda 1h y 40 m menos que en el de A hacia B, calcular el valor de x .
53. Un ciclista sube un puerto a una velocidad media de 15 km/h. Cuando llega a la cima baja por el mismo sitio con una velocidad media de 45 km/h. Si la diferencia de tiempo empleada entre subir y bajar es de 32 minutos, ¿cuál es la longitud de la subida?
54. Un tren parte de una ciudad A hacia otra B, situada a 200 km, con una velocidad media de 80 km/h. Al mismo tiempo sale de B en sentido contrario un moscardón que vuela a una velocidad constante de 92 km/h. Cuando el moscardón se encuentra con el tren vuelve hacia B. Una vez en B, vuelve hacia el tren y así sucesivamente hasta que el tren llega a B. Calcula la distancia recorrida por el moscardón.



55. Dos cajas de cerillas discutían: "Si tu me das dos cerillas, tendremos el mismo número, pero si yo te doy dos, tu tendrás el doble que yo. ¿Cuántas cerillas tiene cada una?"
56. Un niño de 6 años soñaba con hacer grandes viajes en un barco. Su padre, de 42 años, le dijo: "Cuando mi edad sea diez veces la tuya, te compraré un yate para que veas cumplidos tus deseos". ¿Cuánto tendrá que esperar el niño?
57. Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40 pasos de altura, distan entre sí 50 pasos; entre las dos se encuentra una fuente hacia el centro de la cual dos pájaros descienden desde las cimas de las torres a la misma velocidad, llegando al mismo tiempo. ¿Cuáles son las distancias horizontales del centro de la fuente a las dos torres? (*Problema publicado por Leonardo de Pisa y Fibonacci en 1.202*).
58. Un joven le decía a su padre: "Si vendes las botellas de vino que tienes a 1,5 euros cada una, faltarían 72 euros para comprarme la bicicleta que me gusta; pero si las vendes a 1,8 euros sobrarían 18 euros. ¿Cuál era el precio de la bicicleta y cuántas botellas de vino tenía el padre?"
59. Dos patinadoras, Sandra y Cecilia, están distantes 1 kilómetro sobre un lago helado. Cada una de ellas patina en dirección a la otra en línea recta. Gracias a un viento a favor, Sandra recorre la distancia dos veces y media más rápido que Cecilia y gana con seis minutos de adelanto. ¿Qué tiempo ha empleado cada patinadora en hacer el kilómetro? (*Los rompecabezas de Sam Lloyd de Martin Gardner*).



60. A las 7 horas sale un avión de Málaga con destino a París, a 600 km/h; media hora más tarde sale otro con el mismo destino a 800 km/h. ¿A qué distancia de Málaga lo encontrará y a qué hora?
61. ¿A qué hora posterior a las 6 de la tarde formarán las agujas del reloj un ángulo de 90° ?

Para entretenerse

Letras y números

1. Aquí tienes un **crucigrama numérico**. Los trazos más gruesos separan los números y en

cada casilla puede escribirse sólo una cifra. Se sabe que $a = 2$, $b = 3$, y $c = 5$. Utiliza las definiciones para completar este crucigrama numérico.

	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

DEFINICIONES

Horizontales

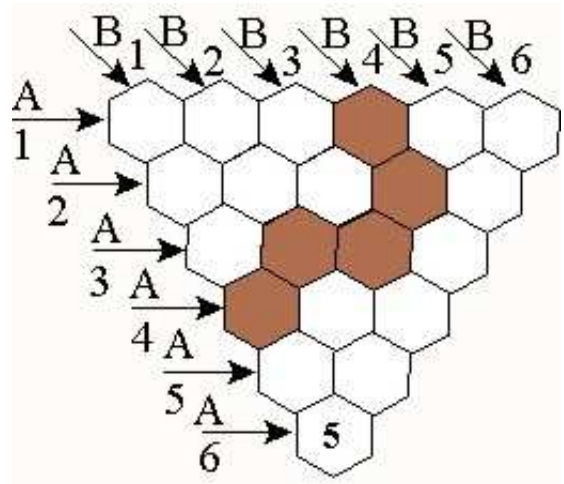
- A: bd ; a^5 ; $g - d$
- B: $13g$; $(ab)^2$
- C: $f - a^2$; $48b^2$; $d^2 - b^2c$
- D: d^2 ; acf
- E: $2(f - e)$; e^2 ; a^3d

Verticales

- 1: $\frac{g+b^2}{2c}$; ab^2 ; abe
- 2: f^2 ; ef
- 3: bg ; b ; ad
- 4: $a^4 + d$; $(b+f)^2$
- 5: $d^2 - b$; ce ; $f - ab$

2. Crucigramas numéricos hexagonales

Se trata de un crucigrama numérico donde las definiciones son expresiones algebraicas. Tienes que determinar los números representados por las letras y rellenar los hexágonos de la figura, teniendo en cuenta que: Hay que poner una cifra por hexágono. Cada letra representa un número natural distinto de cero y menor que 20. Letras diferentes representan números diferentes.



a	b	c	d	e	f	g	h	j	x	y

A

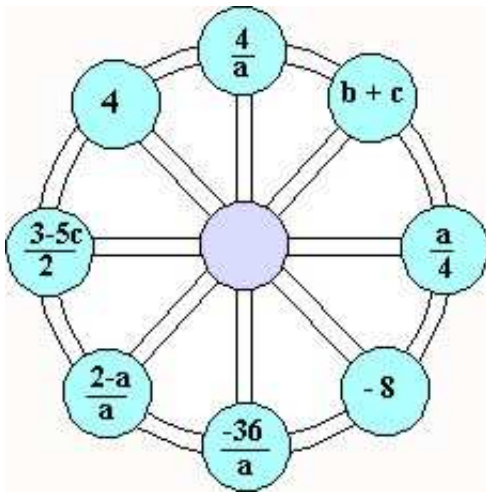
- 1: $f^2 + e$; ab^2
- 2: $d^2 + 3b^2 + 2$; $bf - cb$
- 3: $d-2b$; $f - j$
- 4: $2(x + 4)^2 + 8$
- 5: $c(d - e)^2$
- 6: $d - b$

B

- 1: $11(h - b)$; $11b$
- 2: $e^2 + 4e$; $d^2 - 4y$
- 3: $6d + e$; $d^0 - 1$
- 4: $\frac{j+2}{2}$
- 5: $7d + b$
- 6: $\frac{1}{2}(g + 1)$

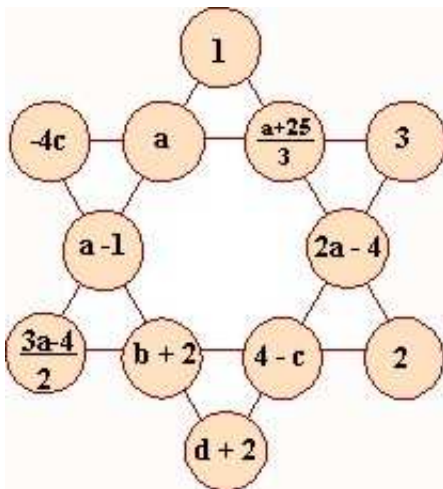
3. La rueda algebraica

Determina el valor de **a**, **b** y **c** de forma que al sustituirlos en la rueda la suma de los números de cada diámetro sea siempre la misma. Compruébalo escribiendo la rueda numérica correspondiente.



4. La estrella de ecuaciones

Calcula el valor de **a**, **b**, **c** y **d** para los cuales los números de cada línea suman siempre lo mismo (**número mágico**). Compruébalo escribiendo la estrella numérica resultante y observa que sumando los seis vértices también obtienes el número mágico. Trata de inventar otra estrella mágica.



5. El dibujo oculto

Tienes que descubrir un dibujo. Para ello, has de unir con tu regla el punto de salida (15), que es la solución de la primera ecuación, con el punto (14), que es la solución de la segunda ecuación.

Después unes el punto (14) con el número que es solución de la tercera ecuación, y así sucesivamente hasta acabar.

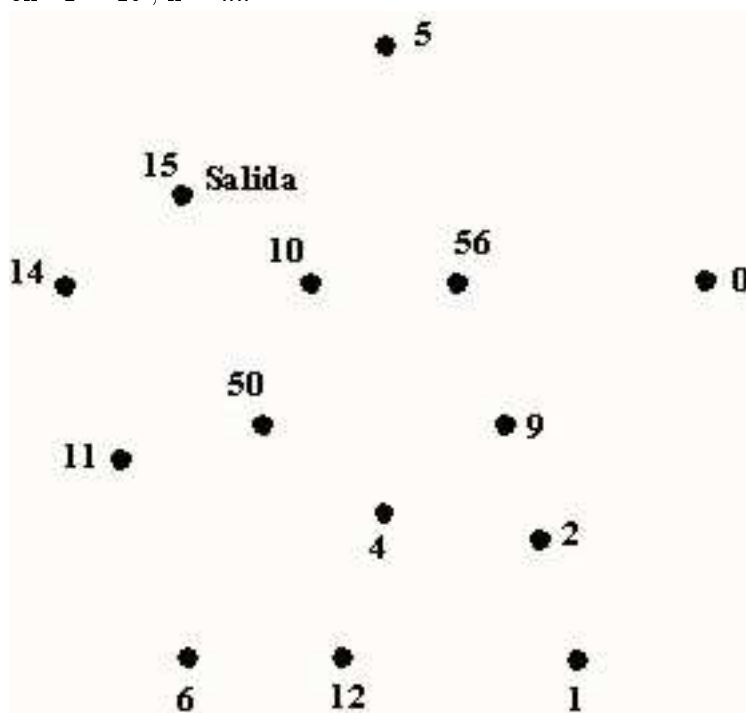
Para el mensaje situado debajo del dibujo, debes poner ordenadamente en cada casilla la letra del abecedario que se corresponde con cada una de las soluciones de las ecuaciones planteadas para ello.

Las ecuaciones son:

- $45 : n = 3 ; n = \dots$
- $2n = 28 ; n = \dots$
- $n + 8 = 18 ; n = \dots$
- $n - 49 = 7 ; n = \dots$
- $1'5 : 0'03 = n ; n = \dots$
- $12 : (n + 3) = 1 ; n = \dots$
- $0 \cdot 58 = n \cdot 5 ; n = \dots$
- $25 : n = 5 ; n = \dots$
- $n : 2 - 4 = n : 4 + 10 ; n = \dots$
- $1'2n = 12 ; n = \dots$
- $2n + 1 = 19 ; n = \dots$
- $\frac{n-3}{3} - 1 = \frac{-2}{3} ; n = \dots$
- $3n + 5 = 23 ; n = \dots$
- $n + 12 = 17 ; n = \dots$
- $\frac{n}{3} + 1 = \frac{n-3}{2} ; n = \dots$
- $20 - n = 6 ; n = \dots$
- $22 - n = 11 ; n = \dots$
- $48 - 2n = 36 ; n = \dots$
- $108 : n = 12 ; n = \dots$
- $4n - 12 = 8 ; n = \dots$
- $n^2 - 2n = -1 ; n = \dots$
- $\frac{n-2}{2} + \frac{n-4}{5} = n - 6 ; n = \dots$
- $2(n + 3) - 4 = n + 3 ; n = \dots$
- $0'08 = n/25 ; n = \dots$
- $200 - 2n = 88 ; n = \dots$
- $n + 2 = 12 ; n = \dots$
- $50 - n = 46 ; n = \dots$

- $n : 2 + 2 = 30 ; n = \dots$
- $42n = 0 : 4 ; n = \dots$
- $45n = 45 ; n = \dots$
- $\frac{6}{n} + 1 = \frac{3}{2} ; n = \dots$
- $3n - 2 = 16 ; n = \dots$

AUTORES:
ANTONIO MOLINA CHAVES y JOSÉ
MANUEL BARRAGÁN BORDALÁ



Para el mensaje:

1	2	3	4	5

- 1: $\frac{x}{2} + 1 = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$
 2: $\frac{x+3}{2} + \frac{x}{7} = x - 9$
 3: $(x + 1) \cdot (x - 2) + 3x = x \cdot (x + 3) - 3$
 4: $\frac{5}{x} + 1 = \frac{6}{5}$
 5: $\frac{x-3}{5} + \frac{1}{3} - 1 = 2 + \frac{x-17}{3}$