PROBLEMAS Y CUESTIONES DE GEOMETRÍA
Para el 2º Curso del Bachillerato

Juan Rosado Sánchez

Junio 2004

.

Indice

1. Vectores:

1. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

   a) $\vec{u}(1,2,1), \vec{v}(-1,0,3), \vec{w}(1,2,-1)$

   b) $\vec{a}(1,2,3), \vec{b}(1,4,11), \vec{c}(1,1,-1), \vec{d}(0,1,4)$

   c) $\vec{u}(1,1,0), \vec{v}(1,0,1), \vec{w}(5,2,3)$

2. Determina k para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

   a) $\vec{u}(k,-3,2), \vec{v}(2,3,k), \vec{w}(4,6,-4)$

   b) $\vec{u}(3,2,5), \vec{v}(2,4,7), \vec{w}(1,-1,k)$

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?

$$A = \{(1,2,1),(1,0,1),(2,2,2)\}$$

$$B = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$$

$$C = \{(-3,2,1),(1,2,-1),(1,0,1)\}$$

4. ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = (1,1,1),(a,1,1),(1,a,0)$ es una base?

5. En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1,2,2)$ y $\vec{b}(-4,5,-3)$. Calcula:
   a) $\vec{a}\vec{b}$ b)$|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ c)$ang(\vec{a},\vec{b})$
   d) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

6. ¿Son $\vec{a}(1,2,3)$ y $\vec{b}(2,-2,1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

7. Calcula m para que el vector $\vec{a}(1,3,m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1,-2,3)$.

8. Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7,-1,2)$ y $\vec{b}(1,4,-2)$.

9. Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1,-1,0)$ y $\vec{v}(2,0,1)$ y cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

10. Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(-2,1,0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

11. Calcula el valor de m para que $\vec{u}(2,-3,1)$, $\vec{v}(1,m,3)$ y $\vec{w}(-4,5,-1)$ sean coplanarios.

12. Dados los vectores $\vec{u_1}(2,0,0)$, $\vec{u_2}(0,1,-3)$, $\vec{u_3} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que u_3 sea ortogonal al vector $\vec{v}(1,1,1)$?

13. Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1,2,3)$ y $\vec{w}(1,-1,1)$ y tal que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 19$.

14. Dados los vectores $\vec{u}(1,-1,2)$ y $\vec{v}(3,1,-1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

15. Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1,-2,3)$ y tal que forme con $\vec{w}(-2,4,-1)$ un paralelogramo de área 25 u^2.

16. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}|=4$ y $|\vec{b}|=2$, con $ang(\vec{a},\vec{b})=60^o$. Calcula $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.

17. Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ y $|\vec{a}+\vec{b}|$=7.

2. Rectas y planos en el espacio:

18. Ecuaciones paramétricas y continuas de las siguientes rectas:

    a) pasa por el punto (-6,2,1) y tiene la dirección de $\vec{u}(2,-3,1)$.

    b) pasa por el origen y tiene la dirección del eje X.

    c) pasa por el punto (8,4,3) y es paralela a la recta del apartado a).

    d) pasa por los puntos (3,3,-2) y (1,7,2).

19. Encontrar un sistema de ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

    a)
    $$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 2 \\ x+z & = & 0 \end{array}\right.$$

    b)
    $$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2-5y & = & 4 \\ 2x-9y+3z & = & -5 \end{array}\right.$$

    c)
    $$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ x+2y-3 & = & 2 \end{array}\right.$$

20. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

    a) $r: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{4} \qquad s: \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

    b) $r: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1} \qquad s: \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{2}$

    c) $r: \dfrac{x}{2}=y-1=\dfrac{z+1}{3} \qquad s: \left\{\begin{array}{rcl} x-2y-1 & = & 0 \\ 3y-z+1 & = & 0 \end{array}\right.$

    d) $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} \qquad s: \left\{\begin{array}{l} x=3+4t \\ y=3+6t \\ z=4+8t \end{array}\right.$

    e) $r: \left\{\begin{array}{l} x=3+2t \\ y=-t \\ z=2t \end{array}\right. \qquad s: \left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=2-t \end{array}\right.$

    f) $r: \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3 & = & 0 \\ x-y+2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad s: \left\{\begin{array}{l} x=-1+3t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{array}\right.$

21. Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan, y hallar el punto de corte:

    $$r: x=y=z-a \qquad s: \frac{2x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{0}$$

22. Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{array} \right. \qquad s : \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

23. Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación general de los siguientes planos:

    a) Pasa por el punto $A(-2, 8, 0)$ y tiene por vectores directores $\vec{u}(0, 5, -1)$ y $\vec{v}(7, 2, 2)$.

    b) Pasa por los puntos (8,2,-1), (3,4,2) y (1,0,1).

    c) Pasa por el punto $P(2, -3, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n}(5, -3, -4)$.

    d) Perpendicular a la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1,0,1).

24. Calcula m y n para que los planos $\alpha : mx + y - 3z - 1 = 0$ y $\beta : 2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

25. Comprueba que las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = y = z - 2 \qquad s : \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2z & = & 5 \\ x - 2y & = & 11 \end{array} \right.$$

son paralelas, y halla la ecuación del plano que la contiene.

26. Determina el valor de a para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{array} \right.$$

Halla el plano que las contiene.

27. ¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s?

$$r : \frac{x-1}{2} = y = z + 1 \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{array} \right.$$

28. Estudia la posición relativa de la recta $r : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ y el plano $\pi : x - y + z - 3 = 0$.

29. Dada la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + ay + z & = & 1 \\ 2x + 6y - 2z & = & 6 \end{array} \right.$$

a) Halla para cada valor de a, las ecuaciones paramétricas de r_a.

b) Discute la existencia de valores de a para que la recta r_a esté incluida en el plano $x+y+z=1$.

30. Hallar la ecuación general de un plano π sabiendo que contiene a la recta r y que pasa por el punto $P(-2,5,1)$

$$r : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$$

31. Hallar las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P(-2,4,3)$ y es paralelo a las rectas r_1 y r_2

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

32. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,3,2)$ y $B(-2,5,0)$ y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

33. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad s : \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

34. Calcula el valor de m para que los puntos $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?

35. Obtener el valor de a para que los puntos siguientes estén sobre una misma recta. Obtener también las ecuaciones paramétricas de dicha recta: $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(1,6,a)$

36. ¿Son coplanarias las rectas r y s siguientes?:

$$r : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

37. ¿Para qué valores del parámetro m los tres planos siguientes se cortan en un único punto? ¿Para qué valores se cortan en una línea recta? ¿Para qué valores los tres planos no se cortan?

$$\pi_1 : x - 3y + 5z = 3$$

$$\pi_2 : 2x - y + 2z = 1$$

$$\pi_3 : 5x - 5y + 9z = m$$

38. Determina, según los valores de m y n, la posición relativa de los planos $x+3y-2z=7$, $x+2y-mz=5$ y $mx+z=n$. Cuando se cortan en una recta, ¿cuál de ellas es la que pasa por el punto (-1,4,2)?

39. Dado el plano $\pi : 2x-3y+z=0$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

40. Estudia la posición de los siguientes planos:

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z-3 &=& 0\\ 3y+2z-1 &=& 0\\ x+y+z-2 &=& 0\end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z-3 &=& 0\\ x-y+z-2 &=& 0\\ 3x-y+z-4 &=& 0\end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z-1 &=& 0\\ 3x+y-2z &=& 0\\ 2x+2y-3z+4 &=& 0\end{array}\right.$$

41. Considera las rectas:

$$r_1 : \left\{\begin{array}{rcl} 4x+5y+7z &=& 7\\ 3x+2y+4z &=& 3\end{array}\right. \qquad r_2 : x=y-1=-z$$

   a) Comprueba que están en el mismo plano π y halla la ecuación de dicho plano.
   b) Determina razonadamente la proyección ortogonal de la recta s sobre el plano π, siendo $s : \left\{\begin{array}{l} x=1+t\\ y=2+t\\ z=-1+t\end{array}\right.$.

42. Sean la recta $r : \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z &=& 0\\ 2x-z+3 &=& 0\end{array}\right.$ y el plano $ax-y+4z-2=0$.

   a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.
   b) ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

43. Dados la recta $r : \left\{\begin{array}{rcl} x-2z+3 &=& 0\\ y-z-4 &=& 0\end{array}\right.$ y el plano $\pi : x+2y+3z-1=0$, halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a r.

44. Estudia las posiciones relativas del plano $\pi : x+ay-z=10$ y de la recta $r : \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-az &=& 2\\ x-y-z &=& a-1\end{array}\right.$ según los valores de a.

45. Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2,0,-1)$ corta a las rectas:

$$s_1 : \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1} \qquad s_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+4 &=& 0\\ y-3z+3 &=& 0\end{array}\right.$$

46. Considera estas rectas:

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 4x + 5y + 7 & = & 0 \\ 3y - 4z + 7 - m & = & 0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de m para que estén en un mismo plano.

b) Escribe la ecuación de dicho plano.

3. Problemas métricos:

47. Halla el ángulo que forma la recta r que pasa por los puntos $P(0,0,0)$ y $Q(1,1,1)$ con la recta $s : \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$

48. Dados el punto $P(3,-1,7)$, las dos rectas y los dos planos siguientes:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + z = 4 \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : 3x + 4y - z + 2 = 0 \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t + s \\ y = -3 + 2t - s \\ z = t + s \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Ángulo que forma la recta r_1 con el plano π_2.

b) Ángulo que forman los dos planos.

c) Intersección de la recta r_1 con el plano π_2.

d) Distancia del punto P al plano π_1.

e) Punto simétrico de P con respecto a la recta r_2.

f) Ecuación general de un plano que contiene a r_1 y es perpendicular a π_2.

g) Ecuación general de unplano que contiene a P y a r_2.

h) Ecuación general de un plano perpendicular a r_1 y que contiene a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

49. Encontrar la ecuación de un plano que pasando por $A(0,2,0)$ y por $B(0,0,2)$ corte al eje OX en un punto C, tal que el área de triángulo ABC valga 4.

50. Dados los puntos $A(0,1,1)$, $B(-3,5,4)$, $C(6,5,-3)$ y $D(9,2,0)$. Determina:

a) Ecuación general del plano ABC.

b) Valor de m para que $E(m,0,2)$ pertenezca al plano ABC.

c) Volumen del tetraedro $ABCD$.

d) Área del triángulo ABC.

e) Ecuación general del plano que contiene a la recta CD y es perpendicular al plano ABC.

f) Ángulo que forman los planos ABC y DBC.

51. ¿Cuál es la recta simétrica de la recta $r : x = 1 - 3t, y = -5 + 2t, z = 1 + t$ con respecto al plano $2x - y - z - 1 = 0$?

52. Encontrar los puntos situados a distancia 5 del origen y pertenecientes a la recta que pasa por (1,6,5) y (6,5,6).

53. Hallar, en cada caso, el ángulo que forma la recta y el plano:

    a)
    $$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2} \qquad \pi : x - 2y - z + 1 = 0$$

    b)
    $$r : x = t, y = 1 + 2t, z = -2 \qquad \pi : 2x - y + z = 0$$

    c)
    $$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \qquad \pi : x + z = 17$$

54. Calcula la distancia del punto dado a la recta en los siguientes casos:

    a)
    $$P(0,7,0) \qquad r : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 5 + t \\ z = -10 + 3t \end{cases}$$

    b)
    $$P(1,0,0) \qquad r : x - 1 = \frac{y+1}{2} = z$$

    c)
    $$A(1,2,3) \qquad r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

55. Calcula la distancia entre las rectas, estudiando antes su posición relativa:

    a)
    $$r : \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

    b)
    $$r : \begin{cases} x = -4 - 2\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 5 - 3\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 5 - 5\mu \end{cases}$$

    c)
    $$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

56. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto (-1,1,0), y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.

57. Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,2)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x+2y-3z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} 3x-y+3z=0 \\ x+4y-2=0 \end{array} \right.$$

58. Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y-z+1=0 \\ x+2y+z=0 \end{array} \right.$ y es ortogonal al plano $\sigma : 2x-y+3z+1=0$. Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

59. Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares, calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene:

$$r_1 : \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

60. Dados la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi : x+2y+3z-1=0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano π, que pase por el punto $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a r.

61. Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x+y-3z=6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje OY.

62. Halla el punto P de la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha : x+y+z=-3 \qquad \beta : \left\{ \begin{array}{l} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{array} \right.$$

63. Sea r la recta de intersección de los planos $ax+9y-3z=8$ y $x+ay-z=0$. Determina el valor de a para que:

    a) Los dos planos sean paralelos.

    b) Los dos planos sean perpendiculares.

    c) La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea $\sqrt{2}$.

64. Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1,3,2).

65. Sean los puntos $P(3,1,5)$ y $Q(-1,7,3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C.

    a) Escribe la ecuación de π.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen).

66. Calcula el volumen de un cubo que tiene aristas sobre cada una de las rectas r y s.

$$r: \frac{x}{13} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-6}{14} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

67. Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

68. Los puntos $P(0,1,0)$ y $Q(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero S pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

69. Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1,1,-1)$ y tiene uno de sus lados en la recta $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{0}$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

70. Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m+1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.

4. Lugares Geométricos:

71. Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

    a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$
    b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$
    c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$
    d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$
    e) $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

72. Los puntos $A(1,2)$ y $B(3,6)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia C. Halla su ecuación.

73. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $P(-3,2)$? Represéntalo gráficamente y halla su ecuación.

74. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2,1)$ y que pasa por $P(0,-4)$.

75. Estudia la posición de la recta $x + y = 0$ con relación a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

76. ¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?

77. Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa.

    a) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \qquad x^2 + y^2 = 4$
    b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$

78. Halla la longitud de la cuerda común a las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4 = 0$

79. Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r : 2x - y + 3 = 0$ ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?

80. Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

    a) Centro (3,5) y es tangente a la recta $4x + 3y - 2 = 0$
    b) Pasa por $A(0,1)$ y $B(-1,0)$ y su radio es $\sqrt{5}$
    c) Pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(4,0)$ y $B(0,3)$
    d) Tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos (-1,4) y (3,6)

81. *a*) Determina la ecuación que define el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos $P(2,0)$ y $Q(0,1)$.

    b) Una circunferencia de longitud 3π, que contiene al origen de coordenadas, está centrada en uno de los puntos del lugar definido en a). Halla su centro.