

UNIDAD DIDÁCTICA
DE
INECUACIONES

PRÁCTICA FINAL CURSO THALES-CICA
GUADALINEX 2004

M^a Carmen Torres Alonso

JUSTIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

Esta Unidad Didáctica está pensada para tercero de E.S.O. y se desarrolla dentro del bloque de Álgebra. El tema de inecuaciones está ubicado justo detrás de los temas que tratan ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de ecuaciones.

Veamos su justificación respecto de los siguientes tres puntos de vista:

A) DESDE LA ESTRUCTURA INTERNA.

- Ayuda a entender la definición de límite y continuidad de funciones.
- Ayuda a entender la definición de intervalo (que va profundamente ligado al concepto de inecuación puesto que en la puesta en práctica de la unidad enseñaremos a los alumnos a expresar las soluciones de las inecuaciones mediante intervalos así como su representación en la recta numérica). Ayuda igualmente a entender la definición de semiplano y la representación de funciones lineales (una vez entendidas las inecuaciones de primer grado con dos incógnitas), la definición de círculo (una vez entendidas las inecuaciones de segundo grado). Así como el concepto de interior y exterior de figuras geométricas.
- Ayuda a entender el concepto de aproximación.
- Representación de funciones: asíntotas, crecimiento y decrecimiento (viendo el signo de la primera derivada), concavidad y convexidad (viendo el signo de la segunda derivada)...

B) JUSTIFICACIÓN SOCIAL.

- Comprensión de frases tan habituales en los medios de comunicación como: "El precio del petróleo subirá un 10%...", "La economía creció entre un 1% y un 1'5% hasta marzo...", etc.
- Comprensión de procesos mentales tan comunes en el alumno como es por ejemplo ver el número de artículos de cierto precio que puedo comprar con cierta cantidad de dinero para poder llevarlo a la práctica a mayor escala (mayor número de artículos, artículos de distintos tipos, grandes cantidades de dinero...)

C) JUSTIFICACIÓN POR SU VALOR FORMATIVO.

- Familiarización con representaciones gráficas como son los intervalos y representación de rectas en el plano. Y por tanto desarrollo de habilidades de dibujo.
- Consolida ideas previas acertadas y rechaza las erróneas.
- Relaciona la resolución de inecuaciones con la de las ecuaciones consolidando así sus conocimientos y aprovechando estos, recalcando por supuesto las diferencias.
- Fomento del trabajo en grupo.

OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LA UNIDAD.

Al hacer esta Unidad Didáctica se ha pensado en un Centro urbano, con alumnado de extracción sociocultural media-baja, con padres preocupados por la educación de sus hijos, con bibliografía en casa, lugar donde estudiar, etc.

Objetivos de la Unidad Didáctica.

Esta Unidad pretende que los alumnos sean capaces de conocer y utilizar los siguientes conceptos, estrategias y destrezas:

1. Conocer los símbolos $<$, $>$, $=$, \neq .
2. Conocer las desigualdades entre números enteros, racionales, decimales y entre estos a su vez.
3. Conocer las propiedades de las desigualdades entre números.
4. Conocer el concepto de intervalo y saber cuál es su representación en la recta real.
5. Conocer las inecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de inecuaciones.
6. Estrategia de traspasar las propiedades conocidas en las desigualdades entre números a las inecuaciones.
7. Estrategia de recordar las propiedades ya conocidas para resolver ecuaciones, ver las diferencias con inecuaciones, y aprovechar así los conocimientos anteriores.
8. Resolver inecuaciones de primer grado, sistemas de inecuaciones de primer grado, inecuaciones de segundo grado e inecuaciones con dos incógnitas; así como expresar sus soluciones mediante intervalos y mediante su representación gráfica en la recta real en el caso de las inecuaciones con una incógnita, y mediante representación de rectas en el plano e identificación de semiplanos en el caso de las inecuaciones con dos incógnitas.
9. Resolver problemas de inecuaciones, esto es, identificar y describir en lenguaje algebraico las inecuaciones.
10. Reconocer las inecuaciones en situaciones de la vida cotidiana y valorar su utilidad.
11. Proceder con sistema y perseverancia ante un problema.
12. Cuidar la comunicación de los resultados de un problema, realizando con pulcritud las tablas, dibujos, representaciones gráficas, etc.
13. Confiar en la propia capacidad para detectar y resolver problemas de inecuaciones en cualquier ámbito.

Contenidos de la Unidad Didáctica.

Están involucrados de manera especial los bloques 1 (Números y Operaciones: significados, estrategias y simbolización), 3 (Representación y organización en el espacio) y 4 (Interpretación, representación y tratamiento de

la Información) y también, aunque en menor grado, el 2 (Medida, estimación y cálculo de magnitudes). Por tanto la Unidad Didáctica integra un buen número de Bloques de contenido del área.

De los Bloques arriba indicados se han tenido en cuenta no sólo contenidos de tipo conceptual y procedimental, que son los que se contemplan tradicionalmente en clase de Matemáticas, sino también los relativos a la adquisición de actitudes y valores. A continuación se relacionan los contenidos más específicos que se abordan en la Unidad Didáctica:

Hechos y conceptos.

1. Significado y uso de los símbolos de desigualdad ($<$, $>$, $=$ y \neq).
2. Significado y uso de las todas las operaciones posibles en las desigualdades con los diferentes tipos de números.
3. Margen de error en la aproximación de cantidades.
4. Conjuntos dados por inecuaciones, esto es, los intervalos. Así como su representación gráfica.
5. Inecuaciones de primer grado con una variable.
6. Sistemas de inecuaciones de primer grado con una variable.
7. Inecuaciones de segundo grado.
8. Representación gráfica de una recta en el plano.
9. Inecuaciones de primer grado con dos variables.

Procedimientos.

1. Interpretación y representación gráfica de los intervalos en la recta real.
2. Reconocimiento de las propiedades de una desigualdad entre números (operaciones y cambios en el signo de la desigualdad).
3. Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
4. Representación de las soluciones de una inecuación, mediante intervalos y mediante la representación gráfica de estos en la recta real.
5. Interpretación y reconocimiento de las inecuaciones, descripción en lenguaje algebraico; así como su resolución.
6. Interpretación y reconocimiento de sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita, así como su resolución y representación gráfica de las soluciones.
7. Interpretación y reconocimiento de inecuaciones de segundo grado con una incógnita, así como su resolución y representación gráfica de las soluciones.
8. Interpretación y reconocimiento de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, así como su resolución y representación gráfica en el plano.

Actitudes, valores y normas.

1. Valoración de la utilidad de las inecuaciones en la vida cotidiana.
2. Análisis cuidadoso y cauto de las situaciones numéricas antes de tomar decisiones.
3. Realización ordenada y sistemática de las problemas.
4. Utilización de un lenguaje preciso para expresar los conocimientos matemáticos.
5. Valoración del trabajo cooperativo en equipo.

6. Valoración del saber hacer las cosas para afrontar sin miedo las tareas a realizar.

IDEAS PREVIAS. CONTENIDOS PREVIOS.

La observación de hechos cotidianos como es la compra de ciertos artículos teniendo una cantidad de dinero predeterminada, ha permitido a los alumnos familiarizarse con las inecuaciones, aunque hasta este punto de su formación académica no sepan reconocerlas como tales. Se trata ahora por tanto, de que el alumno sea capaz de expresar estos hechos en lenguaje algebraico y resolverlo mediante el manejo de operaciones y propiedades que hasta ahora ha hecho en casos fáciles mentalmente.

Esta Unidad pretende que el alumno sea capaz de dominar las desigualdades entre números, así como sus propiedades, para después servirse de estos conocimientos y traspasarlos a las desigualdades con incógnitas, esto es, las inecuaciones. Por tanto en la prueba inicial para el sondeo de ideas previas deberán aparecer preguntas en las que el alumno deba distinguir el orden entre dos números (enteros, racionales, decimales...) viendo así en que tipo de números aparecen problemas así como el entendimiento que el alumno tiene de los símbolos $>$ y $<$ (pregunta 1). También podemos conseguir nuestros propósitos con preguntas en las que los alumnos deban ordenar un conjunto de números de mayor a menor o viceversa (pregunta 2).

Antes de tratar este tema de inecuaciones los alumnos han trabajado polinomios, ecuaciones de primer y segundo grado, así como sistemas de ecuaciones de primer grado. Los alumnos tienen estos conocimientos adquiridos y además muy recientes, con lo cual al tratar las inecuaciones estos se van a afianzar; además nos vamos a servir de ellos para la resolución de inecuaciones haciendo mucho incapié por supuesto en las diferencias. Habrá pues que hacer en la prueba inicial para el sondeo de ideas previas una pregunta en la que haya que realizar operaciones con polinomios para ver donde se presentan dificultades (signos, paréntesis, exponentes...). (Pregunta 3a.)

La resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita está intrínsecamente unida al conocimiento de los intervalos y su representación en la recta real, pues esta es la manera de indicar sus soluciones. Habrá por tanto en la prueba inicial una pregunta acerca de la representación de intervalos en la recta real para detectar conceptos previos erróneos (pregunta 5). Igualmente se puede poner una pregunta en la que los alumnos tengan que representar un conjunto de números en la recta real, con lo cual tendremos conocimiento de posibles fallos en la representación de números en la recta real, así como ordenación de estos (de menor a mayor) (pregunta 4).

Para representar las soluciones de las inecuaciones de segundo grado con una incógnita es muy importante saber la regla de multiplicación de los signos, por ello podemos preguntarla en esta prueba inicial para detectar posibles errores. (Pregunta 3b.)

Podemos también en esta prueba inicial insertar preguntas en las que el alumno deba acudir a su conocimiento, a través de las ecuaciones, del lenguaje algebraico; y que le haga caer en la cuenta de la existencia de infinitos números en la recta real. (preguntas 6 y 7.)

La propiedad más a tener en cuenta en las inecuaciones es la de que al multiplicar ésta por un número negativo el símbolo de desigualdad cambia. Podemos hacerles caer en la cuenta de este hecho pidiendo en una pregunta que lo hagan con números y los representen en la recta; con lo cual a su vez sondeamos su conocimiento del orden entre números y la representación en la recta. (Pregunta 8.)

En la prueba inicial podemos tratar también de entresacar la idea intuitiva que los alumnos tienen de las inecuaciones planteándole un problema cotidiano. Este se lo podemos plantear primero en términos de ecuaciones para que vean la diferencia y sean conscientes de la existencia y utilidad de las inecuaciones. (Pregunta 9.) También podemos plantear un problema de propiedades conocidas de las figuras geométricas para conseguir el mismo objetivo. (Pregunta 10.)

En las siguientes dos páginas propongo una prueba inicial para inecuaciones teniendo en cuenta todos los puntos a los que antes he hecho referencia.

En conclusión de todo lo expuesto los **posibles errores a detectar** serían:

1. Relación de orden de los números enteros, racionales, decimales...
2. Intervalos.
3. Representación gráfica en la recta real.
4. Regla de multiplicación de signos.
5. Operaciones con polinomios.

INECUACIONES. PRUEBA INICIAL

1. Comparar los siguientes pares de números poniendo en el recuadro el símbolo (<, > ó =) que convenga:

$2 \square 5$

$3 \square -5$

$\frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$

$-2 \square -5$

$2^2 \square 4$

$(-1)^3 \square -1$

$-3^2 \square -9$

$0.25 \square 0.22$

2. Ordena de mayor a menor:

-3, 20, 15, 1/2, 0, -3/5, 5, -4.

3. a) Multiplica:

$(-5) \cdot 3 =$

$3 \cdot 2 =$

$(-8) \cdot (-4) =$

$(-5)(3x^2 - 4x + 1) =$

$(-x)(2x - 1) + 3(-8 + x^3) =$

$8(x^2 - 1) - 5(x + 3) - x^3(3 + 2x) =$

b) Completa el cuadro siguiente:

x	+	-
+		
-		

4. Situa en la recta real los siguientes números:

-1/2, 11, 0, 3/5, -3/2, 2/7, -3.

5. Sabiendo que (a,b] se representa en la recta numérica como:

Representa:

(a,b) _____

[a,b) _____

[a,+∞) _____

(-∞,b) _____

6. ¿Cuántos números hay mayores que 5? ¿Cómo expresarías cualquier número mayor que 5? ¿Cómo indicarías en la recta numérica los números mayores que 5?

7. ¿Cuántos números hay cuya mitad es menor que 4? ¿Cómo expresarías cualquier número cuya mitad es menor que 4? Representalos todos en la recta numérica.

8. Representa en la recta -2 y 3. ¿Cuál es mayor? ¿Qué ocurre cuando cambiamos ambos números de signo? Representalos.

9. Tengo 75 ptas. y quiero comprar cuadernos a 15 ptas., ¿cuántos puedo comprar? ¿Y si tuviera 100 ptas.?

10. Si sabemos que el lado de un cuadrado es mayor o igual que ocho, ¿qué podemos decir de su perímetro?

DESARROLLO DE LA UNIDAD. METODOLOGÍA.

EXPOSICIÓN: ELABORACIÓN DE MAPA DE CONCEPTOS.

Con la prueba inicial se habrán podido detectar conceptos erróneos y en función de los resultados se habrá de hacer más incapié en unas actividades u otras. El desarrollo de la Unidad podrá por tanto seguir distintas vías en un principio dependiendo de estos resultados.

En cualquier caso el guión a seguir en la exposición del tema, el mapa de conceptos, sería:

1. Desigualdades.
2. Propiedades de las desigualdades.
3. Conjuntos dados por inecuaciones: intervalos, representación gráfica.
4. Inecuaciones de primer grado con una incógnita.
5. Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
6. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.
7. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

PROBLEMAS A PROPONER EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

En la resolución de problemas se propondrá:

1. Comparación y ordenación de números enteros, racionales, decimales...
2. Análisis y comprobación de las propiedades de las desigualdades (suma de números positivos y negativos en ambos miembros de la desigualdad, multiplicación por números positivos y negativos).
3. Expresión de los intervalos mediante lenguaje algebraico y representación de estos en la recta real, así como el proceso contrario.
4. Aplicar la estrategia de traspasar las propiedades conocidas en las desigualdades entre números a las inecuaciones, con lo cual los alumnos estarán aprendiendo a resolver una inecuación. Y aplicar lo anteriormente aprendido de intervalos para expresar la solución de una inecuación.
5. Comparar las propiedades (operaciones posibles y repercusión de estas en la desigualdad) de las inecuaciones con las de las ecuaciones. Esto es, hacer a los alumnos caer en la cuenta de que las inecuaciones se resuelven de igual modo que las ecuaciones salvo al multiplicar por un número negativo, en cuyo caso cambia el sentido de la desigualdad; con esto los alumnos pueden aprovechar sus conocimientos previos.
6. Resolución de inecuaciones de segundo grado con una incógnita, y de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Reconocimiento del número de soluciones posibles (infinitas, una ó ninguna).
7. Resolución de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Representación gráfica en el plano (semiplanos).

8. Expresión en lenguaje algebraico de inecuaciones.

INVESTIGACIONES A PROPONER A LOS ALUMNOS.

Aparte de las investigaciones como las que para el alumno va a suponer el ir paso a paso descubriendo las propiedades de las inecuaciones (enlazando estas con las de las desigualdades y las ecuaciones) (Actividades 6, 7 y 8.); o las que va a ir realizando en cada actividad con el intercambio de ideas con sus compañeros y la guía del profesor; se pueden proponer otras actividades de investigación, como por ejemplo:

1. Búsqueda en la prensa o cualquier otro medio de comunicación de inecuaciones.
2. Recordar hechos de la vida cotidiana que se le hayan presentado y que ahora puede reconocer como inecuaciones.
3. Hallar el porqué del cambio del signo de la desigualdad al multiplicar por un número negativo. (Podiendo para ello usar bibliografía.)

Para esta última propuesta de investigación se pueden dar algunas pistas si ello fuera necesario. Una posible respuesta sería:

“Consideremos cualquier inecuación del tipo $p < s$, donde p es el primer miembro de la inecuación y s el segundo.

Sumando $-s$: $p - s < 0$

Por tanto $p - s$ es negativo.

Sea un número positivo cualquiera n . El producto de positivo por negativo es negativo, luego:

$$n(p-s) < 0; np - ns < 0; np < ns.$$

Luego si n es positivo, al multiplicar, el signo de la desigualdad no cambia:

$$\text{Si } p < s \text{ y } n \text{ positivo, entonces } np < ns.$$

Sea ahora n un número negativo cualquiera. El producto de negativo por negativo es positivo, luego:

$$n(p-s) > 0; np - ns > 0; np > ns.$$

Por tanto si n es negativo, al multiplicar, el signo de la desigualdad cambia:

$$\text{Si } p < s \text{ y } n \text{ negativo, entonces } np > ns.”$$

Esta demostración se puede encontrar en algunos libros de texto de 1º de B.U.P., por tanto si en la biblioteca del centro se dispone de este tipo de bibliografía los alumnos podrán llevar a cabo su investigación, y a su vez encontrarán abundante bibliografía sobre inecuaciones.

SELECCIÓN DE ACTIVIDADES A REALIZAR (DE COMPRENSIÓN, MEMORIA, OPINIÓN Y RUTINA.)

Bloque 1: Desigualdades. Propiedades de las desigualdades.

Estas actividades tratan de que los alumnos afiancen sus conocimientos de desigualdades entre números. En ellas han de ordenar y comparar números. También con ellas explorarán las propiedades de las desigualdades. Las actividades son de comprensión y memoria.

Las actividades se llevarán a cabo con la clase organizada en grupos de cuatro alumnos, pues interesa especialmente provocar la discusión y la divergencia de opiniones para sacar a la luz los conocimientos de los alumnos sobre el tema. El profesor sólo debe intervenir, se es necesario, para propiciar que en los grupos se dé un efectivo contraste de opiniones con la participación de todos sus componentes.

Las actividades son las siguientes:

1. Coloca en orden creciente los números dados:

a) -2, $10/3$, -5, 0, $-9/2$, $16/5$, $36/10$.

b) 10^{-2} , $4/5$, -3, $4/25$, $4/100$, -100.

c) $22/5$, -0.23, -10^3 , 10^{-5} , $-51/11$.

d) -0.169, 0.043, $-4815/10^5$, -2.612, -2.619.

2. **Comparando.**

a) Pon en el recuadro el símbolo (>, <, ó =) que convenga:

$3 \square 6$

$2 \square -7$

$1/4 \square 1/5$

$-1 \square -4$

$(-2)^3 \square -8$

$(-3)^2 \square -9$

$-0.5 \square -0.9$

$0.11 \square 0.15$

b) Súmale 2 a cada miembro de cada desigualdad en todos los ejemplos. ¿Cambia el sentido de la desigualdad? ¿Y si le sumases otra cantidad? Prueba con cantidades positivas y negativas.

c) Multiplica las desigualdades anteriores por 3. ¿Cambian las desigualdades? ¿Y si las multiplicas por otro número positivo?

d) Multiplica las desigualdades anteriores por -1. ¿Qué ocurre con ellas? ¿Y si las multiplicas por -2?, ¿y por -1/2?

e) ¿Ves alguna diferencia entre las igualdades y las desigualdades?

f) ¿Qué crees que ocurre cuando se multiplica una desigualdad por un número negativo?

Bloque 2: Conjuntos dados por inecuaciones: intervalos, representación gráfica.

Las actividades de este bloque pretenden que los alumnos aprendan el concepto de intervalo, su expresión algebraica (inecuaciones del tipo $x < 2$), así como su representación en la recta real. Además van a permitir al alumno manejar y representar las inecuaciones más simples. También van a dar al alumno el concepto de inecuaciones equivalentes y viendo mediante comprobaciones numéricas que tienen las mismas soluciones empezarán a intuir como se realiza la resolución de inecuaciones. Las actividades son de comprensión y memoria.

El profesor debe hacer especial incapié en aclarar el significado de los símbolos $=$ y \neq . Igual que en el bloque anterior se propone que las actividades se realicen en grupo.

La primera actividad recomendada en este bloque es la de “*El Análisis*” pues al ser un hecho cotidiano, real, los niños se van a sentir más motivados y puede ser una forma divertida de descubrir y comprender los intervalos, así como valorar su utilidad.

Las actividades son las siguientes:

3. EL ANÁLISIS. (Al final de las actividades de este bloque.)

4. Representa en la recta real:

a) $[1,3)$ _____

b) $(-\infty, 2)$ _____

c) $[-1, +\infty)$ _____

d) Indica cuales serían en la recta los números que verifican:

$$\begin{array}{ccc} x < 3 & x \geq -1 & x < -2 \\ -7 < x < -4 & 3 < x = 6 & -1 = x < 3 \end{array}$$

_____	_____
_____	_____
_____	_____

5. Los mayores.

a) ¿Cuántos números hay mayores que 5? ¿Cómo expresarías cualquier número mayor que 5? ¿Cómo indicarías en la recta numérica los números mayores que 5?

b) ¿Cuántos números hay cuyo doble es mayor que 10? ¿Cómo expresarías cualquier número cuyo doble es mayor que 10? Representalos todos en la recta numérica.

c) ¿Cuáles son los números que al sumarles 3 dan como resultado un número mayor que 8? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números? Representalos todos en la recta numérica.

d) ¿Cuáles son los números que al restarles 3 dan como resultado un número mayor que 2? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números? Representalos todos en la recta numérica.

6. Los menores.

a) ¿Cuántos números hay menores que 8? ¿Cómo expresarías cualquier número menor que 8? ¿Cómo indicarías en la recta numérica los números menores que 8?

b) ¿Cuántos números hay cuyo doble es menor que 16? ¿Cómo expresarías cualquier número cuyo doble es menor que 16? Representalos todos en la recta numérica.

c) ¿Cuáles son los números que al sumarles 5 dan como resultado un número menor que 13? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números? Representalos todos en la recta numérica.

d) ¿Cuáles son los números que al restarles 5 dan como resultado un número menor que 3? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números? Representalos todos en la recta numérica.

e) ¿Cuántos números hay cuya mitad es menor que 4? ¿Cómo expresarías cualquier número cuya mitad es menor que 4? Representalos todos en la recta numérica.

Bloque 3: Inecuaciones de primer grado con una incógnita.

En estas actividades los alumnos van a descubrir paso a paso como se resuelven las inecuaciones afianzando a su vez los conocimientos adquiridos en las actividades del bloque anterior.

Las actividades de la 10 a la 19 son problemas en los cuales los alumnos deberán expresar las inecuaciones en lenguaje algebraico. En ellas los alumnos reconocerán problemas de la vida cotidiana, así como apariciones de inecuaciones en la prensa. Los alumnos recordarán también propiedades de los triángulos; y de otras figuras geométricas (perímetro de figuras regulares...). Igualmente se propone que las actividades sean realizadas en grupo.

Entre las actividades se pueden incluir notas escritas para afianzar conceptos importantes como por ejemplo:

PARA NO OLVIDAR

Una desigualdad es una relación entre números donde aparecen los signos $>$, $<$, $=$, \neq .

Cuando en la desigualdad aparecen incógnitas (x,y,...) decimos que es una inecuación.

En este bloque las actividades son de comprensión, memoria y además de tipo algorítmico (pues los alumnos van a reconocer y asimilar las operaciones necesarias para la resolución de inecuaciones) y de tipo opinión por ejemplo en la actividad de las inecuaciones en la prensa, en la cual pueden surgir distintas opiniones acerca de cuál es la incógnita; el profesor actuará como moderador. Las actividades son las siguientes:

7. Comprueba.

a) Comprueba que cualquier número mayor que 3 es solución de las siguientes inecuaciones:

$$3x-4 > 2x-1; \quad 3x > 2x+3; \quad x > 3.$$

¿Son equivalentes estas ecuaciones, esto es, tienen las mismas soluciones?

b) ¿Cuál será la solución de las siguientes inecuaciones?:

$$3x-4 = 2x-1; \quad 3x = 2x+3; \quad x = 3.$$

Representa la solución en la recta numérica.

c) Busca valores que sean solución y otros que no lo sean de las inecuaciones:

$$1) (4x-3)/2 < 5$$

$$2) (2x+4)/6 > 8$$

8. Paso a paso.

En cada apartado te presentamos una serie de inecuaciones equivalentes. Explica lo que hay que hacer para pasar de una a la siguiente empezando por la primera de la serie y de arriba a abajo.

a) $2x-1 < 2+x$

$$x-1 < 2$$

$$x < 3$$

b) $5+3x = 5x-3$

$$5 = 2x-3$$

$$8 = 2x$$

$$4 = x$$

c) $-3x+2 > 2x+7$

$$-5x+2 > 7$$

$$-5x > 5$$

$$x < -1$$

Representa las soluciones en la recta real.

9. Escribe equivalentes.

Escribe dos o más inecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes de manera que la última nos dé directamente la solución de la inecuación y representálas en la recta real:

a) $2x-3 < x+1$

d) $3(x+1) > -2(2x-3)$

b) $3x-4 = 0$

e) $1/2(x-1) = 3-2(x+1)$

c) $3x/2-1 = 2+x/4$

10. Juan nos dice: "El doble de mi edad más dos años es mayor que mi edad más 14 años". ¿Qué edad puede tener Juan?

11. Salgo de casa con 500 ptas. Gasto 50 ptas. en el autobús y debo guardar otras 50 para la vuelta. Veo en una papelería cuadernos de 125 ptas. ¿Cuántos puedo comprar?

12. Triángulos e inecuaciones.

Expresa con una inecuación las siguientes propiedades que se cumplen en los triángulos:

a) La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del otro lado.

b) La longitud de un lado es siempre mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.

13. Si el lado de un cuadrado es mayor que 5, ¿qué puedes decir de su perímetro?

14. La paga de tres hermanos está relacionada con la edad. Si el mayor recibe 1000 ptas. y el menor 200, ¿sabes algo de la paga del mediano?

15. El lado de un pentágono es menor que 2. ¿Qué pasará con su perímetro?

16. Si tienes 1000 pesetas y el cine te cuesta 500 pesetas, ¿cuánto te puedes gastar además si tienes que volver a casa por lo menos con 200 pesetas?

Bloque 4: Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

En estas actividades el alumno aprenderá a resolver sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Deberá de nuevo expresar las inecuaciones en lenguaje algebraico. Reconocerá problemas cotidianos. Ahora las soluciones serán intersección de intervalos; al alumno debe quedarle muy claro que a los números que verifican dos inecuaciones a la vez se les ha de imponer pertenecer a los dos intervalos a la vez. Aprenderán la estrategia de desglosar inecuaciones en las que aparecen dos signos de desigualdad en un sistema de dos inecuaciones. Las actividades son pues de comprensión, memorísticas y de tipo algorítmico.

Las actividades son las siguientes:

20. a) ¿Existen números que verifiquen que $x=3$ y $x<7$?
¿Y en el caso de que $x=-2$ y $x>5$?
¿Y en el caso $x=2$ y $x=2$?
- b) Pon un ejemplo de una inecuación tal que:
b1) Tenga por solución $x>1/4$.
b2) Tenga por solución $x=1/3$.
21. Desde mi mesa hasta la estantería, doy 5 palmos y aún me falta algo para llegar. Si desde el suelo subo 9 palmos sobrepaso la estantería. La mesa tiene 70 cm. de alta; la estantería 180 cm. ¿Qué puedo decir de la longitud de mi palmo?
22. Ramón y Nuria han medido la pizarra a palmos. Ramón ha contado entre 16 y 17 palmos. Nuria cuenta más de 17 pero no llega a 18. Si el palmo de Ramón mide 19'5 y el de Nuria 18 cm. ¿Cuánto mide la pizarra?
23. Le pregunté a mi padre: ¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?
-No sé, nunca me he fijado.
-Pero hombre... lo acabamos de tomar mamá, la abuela, mis dos hermanos, tú y yo. ¿Cuánto has pagado?
-Algo más de 700 ptas.
-El domingo pasado además de nosotros seis invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste?
-Era poco menos de 1000, pues puse un billete y dejé la vuelta.
¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?
24. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones, representando sobre un recta el conjunto de números que son soluciones:
- | | |
|--------------------|------------------|
| a) $x+5 > 4x-4$ | b) $2x+4 > 4x-1$ |
| $2x-7 < 3x-3$ | $x+4 = 3x-4$ |
| c) $7x-15 = 4x+13$ | d) $3x-7 < x+1$ |
| $20-5x = 12+3x$ | $2x-2 > x+8$ |

e) $-5 < 2x-1 < 9$;
 $< 2/5$

f) $-3 < 8x+5 < 4$

g) $-4 < 8-3x$

25. Para comprar un regalo, Emilia ha ido reuniendo monedas de 100 ptas. y de 200 ptas., juntando en total 20 monedas. Si el precio del regalo es mayor que 3200ptas. y menor que 3600 ptas., ¿qué número de monedas podía tener de 200 ptas.?

26. En un rectángulo, la altura mide 12 cm y la base es desconocida. Si se sabe que su área está comprendida entre 400 y 600 cm², pudiendo ser incluso alguno de estos dos valores, ¿qué puede decirse de la medida de la base?

Bloque 5: Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

En las actividades de este bloque el alumno tratará las inecuaciones de segundo grado con una incógnita. Atacará su resolución usando sus conocimientos de multiplicación de polinomios y de la regla de multiplicación de signos; así como lo ya aprendido de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Las actividades son de comprensión, memoria y tipo algorítmico. Las actividades propuestas son las siguientes:

27. Comprueba las siguientes desigualdades:

- a) $x^2+14x < (x+7)^2$
- b) $x^2+6x+2 < (x+3)^2$
- c) $x^2-x < (x-1/2)^2$

28. a) Di tres números que verifiquen la inecuación $x^2+2x+5 = 0$.
b) Descompón en factores la ecuación $x^2+2x+5=0$.
c) Resuelve las siguientes inecuaciones:

- c1) $x^2+2x+5 < 0$,
- c2) $x^2+2x+5 = 0$,
- c3) $x^2+2x+5 > 0$,
- c4) $x^2+2x+5 = 0$.

Representa las soluciones en la recta real.

29. Resuelve las inecuaciones y representa en la recta real.

- a) $x^2-1>0$
- b) $(x+2)^2>0$
- c) $x^2+2x+1<0$
- d) $-1-x^2<0$
- e) $x^2+1>0$
- f) $(x+2)^2<0$

30. Halla la condición que tienen que verificar los coeficientes de la ecuación $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ para que tenga raíces reales.

Bloque 6: Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

El entendimiento y comprensión de las inecuaciones de primer grado con dos incógnitas está intrínsecamente unido a la representación gráfica de rectas en el plano y al concepto de semiplano. Por ello en un primer momento habrá que plantear a los alumnos actividades en las que tomen manejo de estos conceptos y procedimientos.

En este punto del desarrollo de la unidad el profesor tiene dos opciones: o bien introduce a los alumnos en la representación gráfica de rectas mediante el procedimiento de encontrar pares de puntos que verifiquen la ecuación de la recta, empezando así a introducir en los alumnos en el camino de las funciones; o bien cuando el profesor desarrolle la unidad didáctica de funciones aprovecha los conocimientos recién aprendidos de los alumnos y retoma el tema de inecuaciones con dos incógnitas, haciendo así que los alumnos recuerden y afiancen los conocimientos adquiridos acerca de inecuaciones.

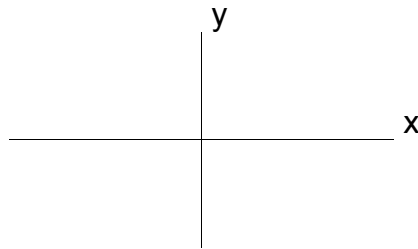
En cualquier caso los alumnos deberán asimilar el hecho de que la recta divide al plano en dos regiones, a las cuales llamaremos semiplanos, y que algebraicamente vienen dados por inecuaciones con dos incógnitas. Los alumnos se pueden acercar a este concepto dando valores a las incógnitas y viendo en que parte del plano se sitúan (si en la recta, a un lado de la recta o a otro), viendo así que se encuentra ante tres posibles emplazamientos los cuales relacionará con distintas expresiones algebraicas. También es muy importante aclarar especialmente las situaciones que se presentan cuando en las inecuaciones aparecen los símbolos $=$ y \neq (significado, representación gráfica...).

Es muy importante que los alumnos realicen estas actividades en grupo, para así fomentar la cooperación entre ellos. Después se puede establecer un debate en clase en el que cada grupo exponga sus conclusiones, en el que el profesor actuará como moderador y guiará aclarando las ideas si ello fuera necesario.

Las actividades propuestas, que son de comprensión, memoria y de tipo algorítmico, son las siguientes:

31. Gráficamente, la ecuación $2x+y=6$ representa una recta, la cual podemos hallar encontrando valores de la x y de la y que verifiquen la ecuación, representarlos en el plano y unirlos formando así la recta.

Pero, ¿qué representa $2x+y < 6$?



Vayamos paso a paso.

- Representa la recta.

- Elijamos varios puntos del plano:

(1,1), (4,-2), (1,7), (5,-1), (2,-5), (-1,3), (-1,8), (-1,10), (4,3), (2,2), (-2,-3).

- Clasifícalos según cumplan $2x+y=6$, $2x+y < 6$ ó $2x+y > 6$ y dibújalos con distintos símbolos según pertenezcan a uno u otro grupo, por ejemplo: *, •, †.

Expón tus conclusiones.

32. Representar gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $2x+3y = 6$

b) $2x+3y > 6$

c) $2x+3y = 6$

d) $2x+3y < 6$

e) $x > 3y$

f) $x = 3y-5$

g) $4x-y = 2$

h) $4x-y < 0$

33. Una persona paga cuatro cervezas y dos cafés, y sólo recuerda que el importe total era como máximo 500 ptas. ¿Qué podemos decir acerca del precio de una cerveza y de un café?

34. Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Sabido esto, escribe relaciones que deben verificar los lados a y b de un triángulo sabiendo que el tercer lado mide 10 cm. Encuentra algunos valores posibles de a y b que verifiquen las dos condiciones.

35. Sea **x** el número de días de un mes de un cierto año e **y** el número de días de un mes (el mismo o distinto) de otro año. Escribe dos condiciones que deba cumplir la suma **x+y**.

36. Se le dice a una persona que piense un número menor que 10, pero que no nos diga cuál es. Le llamaremos **x**. A otra persona se le dice que piense otro número menor que 5. Le llamaremos **y**. ¿Podemos decir algo de la suma

de estos dos números? ¿Y de la diferencia? En caso afirmativo, escribe la inecuación correspondiente.

37. La primera persona piensa ahora un número menor que 25 y la segunda, un número mayor que 10, ¿Podemos decir algo de $x+y$? ¿Y de $x-y$? En caso afirmativo, escríbelo.

SELECCIÓN DE RECURSOS A UTILIZAR.

La utilización de recursos didácticos como el vídeo, el ordenador, la calculadora gráfica... aunque no son estrictamente necesarios para las actividades anteriormente propuestas sí que pueden facilitar el aprendizaje al dar un giro en el planteamiento de la clase y motivar así a los alumnos. Estos se pueden sentir muy ilusionados ante estas nuevas perspectivas en la clase de matemáticas, y además al ser métodos visuales los conceptos les pueden quedar quizás fijados más fácilmente.

En el caso de actividades en las que puedan surgir opiniones o en las que pidamos a los alumnos que expongan los resultados a los que ha llegado el grupo ante el resto de la clase, podríamos hacer que esto se realizará mediante transparencias fabricadas por los propios alumnos. Esto les puede motivar enormemente.

Por ello, para llevar a cabo las actividades propuestas anteriormente, serían recomendables los siguientes recursos didácticos:

- aparato reproductor de video, fácilmente transportable,
- fondo videográfico en el que figuren las cintas que se sugieren en algunas actividades,
- fotocopiadora de calidad, con un sistema ágil y rápido de utilización,
- calculadoras normales en número suficiente para que trabajen con ellas todos los alumnos de un aula (esto se facilitaría si dichas calculadoras son propias de los alumnos),
- calculadora gráfica u ordenador,
- figuras geométricas en pasta o cartón, como cuadrados, pentágonos, triángulos...,
- papeles cuadriculados y reglas,
- retroproyector, así como papeles y rotuladores de transparencias,
- biblioteca adecuada para uso del alumnado.

Veamos a continuación cómo y en que actividades podemos usar los recursos antes descritos.

A) En las actividades de investigación propuestas a los alumnos sería conveniente como ya se indicó en su momento abundante **bibliografía** a su disposición.

B) La **fotocopiadora** se utilizará para fotocopiar las actividades para entregárselas a los alumnos y que de este modo vayan formando su carpeta de trabajo.

C) En las actividades en las que el alumno ha de comprobar valores numéricos verificando inecuaciones de primer grado con una incógnita, cuando empieza a familiarizarse con estas, el alumno puede realizar esto con la **calculadora**. Igualmente se puede hacer cuando trabaja intervalos, su expresión algebraica... (Esto se trata en las actividades 4, 5, 6 y 7.) Igualmente la puede usar para realizar cualquier cálculo propuesto en las actividades.

D) En las actividades 12, 13, 15 y 34 se hace mención de **figuras geométricas** como son los triángulos, cuadrados y pentágonos, y se pide expresar en términos de inecuaciones propiedades conocidas de estos. Si las figuras se encuentran a mano los alumnos pueden visualizar estas propiedades (aumento del perímetro al aumentar el lado, la suma de dos lados de un triángulo menor que el otro lado...)

También se podría disponer de una cinta de **video** en la cual se visualizara como el perímetro de polígonos regulares (cuadrados, pentágonos,...) va aumentando al aumentar el lado. Esto se conseguiría con secuencias de polígonos (con su centro en el mismo punto de la pantalla) que se van agrandando con el transcurso del tiempo, o achicando. Esta secuencia se podría crear por ordenador. Además con este video se podrían hacer a los alumnos otras cuestiones que no aparecen en las actividades, como :

¿Qué ocurre con el área?

¿Qué ocurre si sólo agrandamos un lado?

¿Qué ocurre si los polígonos no son regulares?

Los alumnos deberían explicar en el cuaderno de trabajo todas sus conclusiones, así como el proceso aparecido en el vídeo.

E) En las actividades del Bloque 5, las cuáles tratan inecuaciones de segundo grado con una incógnita, podríamos empezar con un **video** el cuál se desarrollaría de la siguiente manera:

“Para desarrollar este vídeo los alumnos deberían empezar comprendiendo los siguientes razonamientos:

La resolución de la ecuación de segundo grado $x^2=16$ lo que nos lleva es a encontrar el lado del cuadrado cuya área es 16, esto es, la solución positiva de esta ecuación, que es 4, no es otra cosa sino el lado del cuadrado de área 16.

En el caso de la ecuación $x^2+x-30=0$, que es $x(x+1)=30$, la solución positiva de esta ecuación, 5, nos da uno de los lados del rectángulo de área 30, y el otro sería $5+1=6$; por tanto la resolución de la ecuación $x(x+1)=30$ nos lleva a hallar el valor de la incógnita x para hallar los lados (x y $x+1$) de un rectángulo de área 30. Esto en el vídeo se podría visualizar de la siguiente forma: fijando dos ejes perpendiculares (x,y) del plano; fijando una unidad en uno de los ejes, por ejemplo el y ; partiendo de 0 unidades en el eje x y una unidad en el eje y solo tenemos un segmento; si vamos aumentando en cada eje los valores de estas unidades de partida en cada eje (0 en x y 1 en y)

añadiendo en cada eje la misma cantidad y formando el rectángulo llegaremos a conseguir el rectángulo de área 30 al añadir 5 unidades. Esto en el video aparecerá de forma progresiva a lo largo del tiempo.

La siguiente parte del video consistiría en aclarar a los alumnos el sentido geométrico de las inecuaciones de segundo grado con una incógnita. Esto sería de la siguiente forma. Tomemos por ejemplo la inecuación $x^2+4x+4>0$, esto es, $(x+2)^2>0$. Para resolverla debemos hallar los valores de la x para los cuales el cuadrado de lado $x+2$ tiene área positiva. Para ello tendríamos de nuevo los ejes y en cada uno de ellos marcadas dos unidades con las cuales se puede dibujar un cuadrado de partida; ahora añadiendo progresivamente en el tiempo cantidades positivas en los dos ejes vamos creando cuadrados mayores.

Demos ahora un salto en la lógica distribución de los ejes (positivo-negativo): si vamos disminuyendo las unidades llegará un momento en que nos quedemos en el punto $(0,0)$, esto no es un cuadrado (intuición del valor positivo del área); si seguimos por el cuarto cuadrante de los ejes seguiremos teniendo cuadrados (área positiva) por tanto esos valores también nos valen.

Conclusión: nos quedamos sin cuadrado cuando las unidades de partida en los ejes (2 en el x y 2 en el y) disminuyen en 2, y en el resto de los casos seguimos teniendo cuadrados; por tanto el único valor no posible de la x es -2 y serán válidos los casos en que x sea mayor que -2 y menor que -2.

Ahora aparecería en el video el mismo proceso pero con una inecuación del tipo $(x+2)(x+5)>0$."

Ahora en clase podríamos plantear a los alumnos otras cuestiones acerca del video y de las inecuaciones de segundo grado, como por ejemplo:

¿Qué pasaría con una inecuación del tipo $(x-2)(x-5)>0$, cuál sería el primer cuadrado?

¿Qué pasaría con una inecuación del tipo $(x+2)(x+5)<0$?

En el caso de la primera pregunta el primer rectángulo estaría situado en el cuarto cuadrante. Los alumnos deben darse cuenta de ello y analizar la situación. Y así mismo llegar a la conclusión de que el procedimiento es el mismo: los rectángulos irán apareciendo igual que en los otros casos al viajar sobre los ejes.

La segunda pregunta se presta a ser una **actividad de investigación** por parte del alumno. Cabrían distintas posibilidades en su resolución con lo cuál se podría aprovechar también la exposición por un portavoz de cada grupo de sus conclusiones. Esto se podría realizar con **transparencias**.

F) En las actividades del Bloque 6, las cuáles tratan de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se puede utilizar el **ordenador** y la **calculadora gráfica**, para que los alumnos entiendan con más claridad el

concepto de semiplano, como parte del plano en que queda éste dividido al trazar una recta, y como conjunto de pares de puntos que verifican una inecuación. Para ello se pueden usar los programas **Cabri** y **GC** en el ordenador, y/o la calculadora gráfica. También es muy importante que para realizar todas estas actividades los alumnos dispongan de **papel cuadriculado y regla**, para poder representar las rectas en el plano, e indicar las soluciones de las inecuaciones.

EL CLIMA DE LA CLASE.

ORGANIZACIÓN ESPACIAL.

Puesto que las actividades conviene realizarlas en grupo, las mesas del aula se deben poder desplazar para distribuir a los alumnos en grupos de 4. Además si vamos a disponer de los recursos didácticos recomendados estos estarán en el aula, es decir, el aula dispondrá de una instalación eléctrica cómoda y segura, pantalla para el vídeo, retroproyector, pantalla para el retroproyector, calculadora gráfica...

La organización de la clase en grupos, y el trabajo cooperativo dentro de ellos, favorece el aprendizaje de los alumnos. El grupo, si funciona bien, hace posible que muchos de sus integrantes sean capaces de resolver con los otros aquello que solos, quizá, no son capaces de hacer. Es sabido que las discrepancias moderadas entre puntos de vista propician conflictos cognitivos que desencadenan reajustes en los conocimientos del alumno y favorecen la realización de aprendizajes significativos. De esta forma cada uno recorre su propio camino apoyado en el grupo.

El trabajo en equipo también favorece el desarrollo de aspectos más generales, como la capacidad de llevar a cabo un contraste efectivo y respetuoso de ideas, saber ponerse en el punto de vista del otro o cambiar el propio. Sin duda, estas capacidades se desarrollan mejor si se crean situaciones adecuadas para ello.

LA AUTORIDAD DEL PROFESOR: AUTONOMÍA-DIRECCIÓN.

A lo largo del desarrollo de la Unidad el alumno ha de adquirir conciencia de donde está, tener una percepción lo más rica posible de lo que se quiere lograr y del grado de autonomía con el que se desenvuelve en el trabajo. Para ello el profesor facilitará, a lo largo de los distintos bloques de actividades, una labor de recapitulación y reorientación de la tarea.

Al comienzo de la Unidad, después de la prueba inicial, conviene hacer una presentación panorámica del desarrollo de la misma, poniendo de relieve las líneas de trabajo que se van a recorrer. En este momento y en otros que se consideren oportunos, se comunicará a los alumnos:

- Ideas, conceptos y técnicas relevantes que aparecen en la Unidad Didáctica.
- Objetivos de alcance más general que se quieren lograr.
- Materiales que se van a utilizar (escritos, audiovisuales, etc.): qué propósito tienen y cómo se usan.

- Organización de la clase: sentido del trabajo en grupo e individual (elaboración del propio cuaderno de trabajo).
- Secuencia de trabajo y pautas generales para llevarlo a cabo.
- Sentido de la evaluación y cómo va a desarrollarse.

Las explicaciones, sugerencias y pautas de trabajo del profesor, han de estar adaptadas a las necesidades del alumnado, necesidades que estarán en función de lo que sabe y de cómo lo sabe, de lo cuál el profesor tiene conocimiento gracias a la prueba inicial. El clima y modo de organizar la tarea en la clase ha de permitir el intercambio de opiniones y la comunicación entre compañeros y con el profesor, lo cuál facilitará y mejorará el aprendizaje de los alumnos y el profesor.

La propuesta de actividades hecha en esta Unidad Didáctica trata de favorecer el aprendizaje significativo. Se pretende que las actividades hayan sido ricas en cuanto a contenidos tratados, y que promuevan la indagación y la reflexión de los alumnos.

Es muy importante tener en cuenta que la mayoría de las actividades tienen como propósito enfrentar a los alumnos con algún aspecto concreto de sus propios conocimientos, e informar al profesor de su situación real y de la del grupo. En función de estas observaciones, el profesor deberá tomar decisiones sobre el desarrollo del resto de la actividad: si conviene poner alguna tarea previa más sencilla; si puede enunciarse de modo más abierto, o, por el contrario, es necesario pautarla y subdividirla en tareas más sencillas; si, simplemente, puede eliminarse para todos o para algunos que no la dominan, etc.

Al finalizar algunas actividades, es necesario hacer una puesta en común de todo el grupo, que no debe convertirse en una simple corrección en la pizarra. Es uno de los momentos donde el papel del profesor es decisivo para recapitular y clarificar lo aprendido y valorar los avances. En este sentido debe reconducir las intervenciones del alumnado y articular las suyas propias. Todos los alumnos tendrán recogido el trabajo en su cuaderno de clase, con independencia de que se haya realizado en equipo o individualmente, en el que se destacarán los resúmenes, esquemas, etc. construidos durante esta puesta en común.

• **EVALUACIÓN.**

La evaluación ha de tener dos dimensiones:

- evaluación del aprendizaje de los alumnos,
- evaluación del funcionamiento de la Unidad Didáctica.

Esta evaluación o valoración se lleva a cabo a lo largo de todo el proceso de aprendizaje, aunque se distingue a veces, por su distinto objetivo, entre evaluación inicial, evaluación formativa del proceso y evaluación sumativa.

EVALUACIÓN DEL ALUMNO.

Evaluación inicial.

Tiene como finalidad el diagnóstico de tipos y grados de conocimiento sobre cuestiones consideradas fundamentales para empezar la Unidad, y que han de ampliarse y profundizarse.

En este sentido, y a lo largo de la prueba inicial para el sondeo de ideas previas y posibles errores conceptuales, el profesor ha de observar:

- la habilidad en la ordenación de números enteros, racionales, decimales...,
- la habilidad de representar números en la recta real,
- reconocimiento de los intervalos,
- conocimiento de la regla de multiplicación de signos,
- la habilidad para operar con polinomios,
- las estrategias utilizadas para resolver problemas en los que aparecen encubiertas las inecuaciones,
- las actitudes frente a la resolución de problemas.

Una cuestión especialmente importante es conocer las estrategias de cálculo de los alumnos en casos sencillos.

Evaluación formativa o del proceso de aprendizaje.

A lo largo del proceso de aprendizaje se ha de evaluar una diversidad de aspectos que enunciados genéricamente serían:

- hábitos de trabajo y actitud positiva hacia las matemáticas,
- estrategias matemáticas que se ponen en juego (que en nuestro caso serían: la estrategia de traspasar las propiedades de las desigualdades a las inecuaciones, así como enlazar con la resolución de ecuaciones; la resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones; representación de intervalos y semiplanos...),
- construcción de conceptos y estructuras conceptuales (las actividades se prestan a ello pues permiten que los alumnos vayan construyendo y asimilando los conceptos.),
- avances, dificultades y errores que se dan en el proceso de aprendizaje.

La evaluación formativa cumple una función fundamental que es la de adecuar el tipo de ayuda del profesor a las necesidades de cada alumno. Para ello es necesario ir recogiendo diariamente en un **diario** o **cuaderno** de clase la información relativa a las cuestiones señaladas, y a todas aquellas otras situaciones no previstas que se dan en el aula, y que sean especialmente relevantes para mejorar la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El **cuaderno del alumno** es otra fuente importante de información para el profesor. No obstante que daría incompleta esta tarea si no está prevista una **entrevista** con cada alumno (informal y breve si se quiere) de la que se puede derivar una ayuda realmente ajustada a las necesidades de cada uno.

GUIÓN PARA LA ENTREVISTA.

La entrevista debe ser relajada, de manera que se establezca una relación de confianza entre alumno y profesor. También se podría optar por entrevistar a varios alumnos a la vez. La entrevista pretende que el profesor tenga conciencia de la actitud del alumno ante los conocimientos que esta adquiriendo, si se están logrando los objetivos... Por ello algunas preguntas que se podrían ir insertando en la charla pueden ser:

- *¿Recordabas lo que es un intervalo? ¿Te ha resultado difícil?*
- *¿Has encontrado ayuda en tus compañeros?*
- *¿Qué tipo de actividades te han gustado más?*
- *¿Has reconocido las inecuaciones en hechos de la vida cotidiana?*
- *¿Has tenido tiempo suficiente para realizar las actividades?*
- *¿Te han sido útiles los videos, y la calculadora gráfica?*
- *¿Te ha extrañado el hecho de que las inecuaciones puedan tener infinitas soluciones? ¿Y que puedan no tener solución?*
- *¿Qué parte del tema te ha gustado más?*
- *¿Cuál has comprendido mejor?*
- ...

Así podemos ver la utilidad de nuestros procedimientos, el aprovechamiento de los recursos, la integración del chico en el grupo y en el aula...

La evaluación sumativa

Se realizará el final del desarrollo de la Unidad Didáctica y debe mostrar el grado de consecución, por parte de cada alumno, de los objetivos propuestos. Requiere una toma de información amplia y por ello se sugiere utilizar, además de las actividades que se propondrán para conformar un posible examen, el siguiente guión de observación de los alumnos:

GUIÓN PARA LA OBSERVACIÓN.

El guión que se propone es el siguiente:

- 1. Atiende y muestra interés por el trabajo en clase.*
- 2. No se perciben bloqueos por excesiva motivación, ansiedad o sentido del fracaso o del ridículo.*
- 3. Tiene ilusión por aprender y se divierte con la tarea.*
- 4. Contrasta sus opiniones con las de los demás.*
- 5. Lleva el trabajo al día.*
- 6. Le gusta tener las cosas ordenadas y limpias.*
- 7. Valora el trabajo bien hecho.*
- 8. Trabaja autónomamente: formula, desarrolla y comprueba sus propias ideas.*
- 9. Sabe trabajar en equipo.*
- 10. Valora la utilidad de lo aprendido.*
- 11. Es capaz de representar un intervalo algebraica y gráficamente.*
- 12. Es capaz de resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita y expresar su solución gráficamente mediante un intervalo.*
- 13. Identifica y expresa algebraicamente las inecuaciones.*
- 14. Resuelve sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.*
- 15. Puede resolver inecuaciones de segundo grado con una incógnita y expresar su solución gráficamente en la recta real.*
- 16. Es capaz de representar una recta en el plano dando valores y distingue las distintas regiones en que el plano queda dividido y es capaz de expresar las condiciones que verifican sus puntos mediante inecuaciones y ecuaciones.*
- 17. Aplica los conocimientos que va adquiriendo al realizar las actividades en el orden propuesto para resolver las del bloque siguiente.*

Autoevaluación del alumno.

La autoevaluación del alumno, tanto de su tarea individual como dentro de un grupo de trabajo, es también un elemento de información fundamental para el profesor.

Los alumnos habrán de llevar a cabo un proceso de autoevaluación periódica. El hecho de que reflexionen acerca de lo que han aprendido, de sus hábitos de trabajo, es importante y positivo no sólo para ellos sino como fuente de información para el profesor. La autoevaluación consistirá en un pequeño informe en torno a las siguientes cuestiones:

- *Sobre el cuaderno de clase: conserva ordenadamente todos los materiales; corrige, revisa y completa las tareas: cuida la presentación de lo que hace (gráficos, letra legible...)*
- *Opinión sobre el trabajo realizado durante este periodo: si ha aprendido o no, si la materia le ha gustado, si le ha parecido útil, si el método seguido le parece bueno.*
- *Grado de consecución de los objetivos previstos (adecuado, escaso, muy bueno...) analizando los motivos (ha trabajado poco, le ha parecido muy difícil...).*
- *Está o no de acuerdo con la valoración que el profesor hace de su trabajo al final de la Unidad Didáctica, y por qué.*

Evaluación del trabajo en equipo.

Cada grupo de trabajo elaborará un pequeño informe, para lo que puede servir la reflexión en torno a las siguientes cuestiones:

- *Participación de los distintos miembros del grupo, con las aportaciones de cada uno. Si no las ha habido, analizar por qué.*
- *Organización de la tarea: si ha sido cooperativa, si se han tomado en consideración las ideas de los otros, si se ha hecho el esfuerzo de seguir los razonamientos de los compañeros.*
- *Si se tiene la sensación de pérdida de tiempo, o, por el contrario, se ve que con los otros se aprende más y mejor.*
- *En qué medida se ha mejorado la capacidad de cada uno de los participantes para abordar tareas similares en solitario.*

EVALUACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

A partir de las anotaciones recogidas en el diario de clase, el profesor elaborará un informe sencillo sobre el desarrollo en el aula de la Unidad Didáctica, que formará parte de la Unidad, ya que constituye una fuente imprescindible para mejorar el diseño en años sucesivos. Puntos de reflexión para elaborar dicho informe pueden ser los siguientes:

Aspectos relativos al diseño de la Unidad Didáctica.

Se valorará si el diseño ha contribuido a desarrollar una práctica rica y si la Unidad ha sido suficiente para dar respuesta a las demandas del aula. En concreto se reflexionará sobre:

- recursos (materiales, organización, fuentes de información...),
- propuesta de actividades de enseñanza y aprendizaje (interés promovido, si han desencadenado un proceso de indagación, nivel de apertura o concreción de las actividades...),
- grado de dificultad de las tareas y si su secuencia es adecuada,
- observaciones y reflexiones sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos,
- estructura de la Unidad Didáctica: ¿se han puesto de relieve las líneas de avance?, ¿ha facilitado el aprendizaje?

Interacción profesor-alumno.

En cuanto a este aspecto se debe reflexionar respecto a:

- Las situaciones nuevas que se han dado en el aula, ¿han servido para mejorar y enriquecer el aprendizaje de las incuaciones? Se anotarán las peculiaridades observadas respecto a la utilización de estrategias de cálculo, dificultades en el reconocimiento y utilización de conceptos (como intervalo, recta, semiplano, figuras geométricas...)
- ¿El diseño se ha adaptado a las diferencias individuales?
- ¿Los alumnos han podido ir percibiendo el sentido de la tarea? ¿Se les ha ayudado en la labor de autoevaluación?
- ¿Se ha facilitado un clima de contraste de opiniones abierto a todos, garantizando la participación de todos?
- ¿La organización en grupos ha resultado positiva?

PROPUESTA DE EXÁMEN.

El examen se llevará a cabo si el resto de medios propuestos para la evaluación de los alumnos no es suficiente. Posibles preguntas podrían ser:

A) *Se pueden plantear preguntas en las que el alumno deba resolver inecuaciones y expresar su solución gráficamente sin que estas estén encubiertas en un problema y el alumno deba expresarlas correctamente en lenguaje algebraico. Serían por ejemplo:*

- *Resuelve y representa gráficamente:*

a) $2x+5 < x-8$

b) $4x+1 > 2-3x$

c) $x+6 = 5x-4$

$5x-2 = 8x$

d) $x-3 = 5x+6 < -8$

e) $x^2 + 8x < (x+4)^2$

f) $x^2 + 3x - 10 = 0$

g) $5x+3y > 0$

h) $x = 2y-9$

B) *Se pueden plantear problemas en los que el alumno deba expresar en lenguaje algebraico las inecuaciones y después resolverlas:*

- *Si el triple de la edad de Roberto menos cinco años es menor que su edad más trece años, ¿qué se puede decir de la edad de Roberto?*
- *Si tuviera el triple de lo que tengo en un bolsillo, me faltaría menos de 250 ptas. para tener 2000 ptas., pero si tuviera el cuádruple no llegaría a las 2400 ptas. ¿Qué podemos decir de la cantidad que tengo?*
- *Halla la condición que tienen que verificar los coeficientes de la siguiente ecuación $(a^2+b^2)x^2-2acx-b^2+c^2=0$ para que tenga las raíces reales.*
- *Sara compró en la tienda cuatro kilos de naranjas y dos de tomates, y solo recuerda que el importe total era menor de 500 ptas. ¿Qué podemos decir acerca del precio de un kilo de naranjas y de un kilo de tomates?*

SECUENCIA, UBICACIÓN Y TEMPORALIZACIÓN DE METODOLOGÍA-ACTIVIDAD, USO DE RECURSOS, EVALUACIÓN.

En cuanto a la **secuencia** de desarrollo de la Unidad, el orden a seguir es en el que han sido descritas en el apartado correspondiente. Se han distinguido además distintos bloques de actividades, antes de los cuales el profesor dará a los alumnos nociones de los conceptos a tratar y líneas de trabajo a seguir; y al final de cada bloque, el profesor hará una recapitulación de conceptos y procedimientos facilitando así que los alumnos pongan en práctica la estrategia de usar lo aprendido en el bloque anterior, ya que la estructura del tema y la forma en que se ha distribuido se presta a ello.

El tema de inecuaciones está **ubicado** detrás de polinomios, ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones de primer grado y ecuaciones de segundo grado con una incógnita; y situado justo antes del bloque de geometría.

El **uso de los recursos** esta previsto en las actividades correspondientes que se han señalado en el apartado de “Selección de recursos a utilizar”.

En cuanto a la **temporalización**, la Unidad esta prevista para ser desarrollada en siete clases:

1. En una primera hora de clase los alumnos realizarán la prueba inicial para detectar errores conceptuales y sondeo de ideas previas.
2. En la segunda clase los alumnos realizarán las actividades del bloque 1 en la primera media hora y en la segunda media hora empezarán a entender los intervalos con la actividad 3 (“El Análisis”).
3. En la tercera clase los alumnos tratarán el resto de actividades del bloque 2 pudiendo no realizarse la última, quedando como tarea para casa. Y comenzarán con las actividades del bloque 3.
4. La cuarta clase se dedicará a terminar el bloque 3 de actividades, pudiendo no realizarse todas, y tratar las actividades del bloque 4.
5. En la quinta clase se realizarán las actividades de bloque 5, comenzando con el video propuesto.
6. En la sexta clase se tratarán las actividades del bloque 6, con la utilización del ordenador o calculadora gráfica para la mejor comprensión de la inecuaciones con dos incógnitas.
7. Se podría dedicar una séptima clase a tratar las actividades que se propusieron de investigación (con utilización de transparencias); y a resolver dudas y cuestiones que planteen los propios alumnos.

En cuanto a la **evaluación**, la guía a seguir es la que se ha expresado en el apartado correspondiente. Con puesta en práctica de observación en el aula según el guión sugerido, entrevista a los alumnos, autoevaluación de los alumnos, seguimiento por parte del profesor de los cuadernos de trabajo de los

alumnos, realización de un examen si ello fuera necesario, y por último evaluación de la Unidad por parte del profesor según guión propuesto, así como de la relación profesor-alumno, y la elaboración de un diario de clase.

TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN EL AULA.

La estructura de esta Unidad Didáctica facilita su adaptación a la mayor parte de los alumnos en tanto que, al distinguirse el desarrollo de las actividades en bloques distintos, se acotan las dificultades que pueden presentarse a cada uno de ellos y a las que hay que dar respuesta (sabemos donde están y cómo hay que tratarlas). Además la distribución y distinta dificultad de las actividades permiten que el profesor y el alumno se detengan, avancen o cambien de rumbo según el resultado de las mismas. Si el profesor observa bloqueos, debe proponer tareas distintas para salir del bache. Si el recuerdo de lo aprendido es deficiente o confuso, se reforzará antes de seguir adelante.

Por otra parte, la secuencia de las actividades, la distinta dificultad que presentan y la diversidad de situaciones a las que hacen referencia (problemas con figuras geométricas, problemas de hechos cotidianos, resolución de tipo algorítmico...), facilitan la adaptación de la Unidad a ritmos de aprendizaje, experiencias e intereses distintos. Además, la coherencia y estrecha relación entre los contenidos que se trabajan, facilitan la atribución de sentido por parte del alumno al conjunto de los mismos.

El enunciado de las actividades puede adaptarse también a distintas situaciones. Un planteamiento más abierto, menos dirigido, conviene a aquellos alumnos con mayor nivel de autonomía en el trabajo. Al contrario, otros necesitarán más pautas, un desglose minucioso de la tarea, sugerencias complementarias, recapitulaciones constantes para avanzar sin perder el sentido de la misma. Así, por ejemplo, las actividades 7 y 8 están pensadas para estos últimos alumnos; y para los alumnos con mayor nivel de autonomía se les podría pedir directamente realizar la actividad 9 y reenumerar las actividades 7 y 8 en los términos de la 9.

Por tanto, no basta con que la Unidad Didáctica tenga un grado de estructuración adecuado para alumnos con un cierto nivel de autonomía. Es necesario que el profesor estimule a todos ellos y les ofrezca recursos necesarios para recorrer el camino previsto de manera diferenciada, esto es, en función de las necesidades especiales de cada uno: ayudándole con una pregunta adecuada; remitiendo un problema determinado a una situación análoga pero más familiar; identificando con él el paso erróneo en la aplicación de una técnica concreta, etc.

De todos modos, es bueno que todos los alumnos recorran juntos la mayor parte del camino, en la seguridad de que ninguno de ellos va a perder el tiempo.

Índice de contenido

JUSTIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	2
OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LA UNIDAD.....	4
Objetivos de la Unidad Didáctica.....	4
Contenidos de la Unidad Didáctica.....	4
Hechos y conceptos.....	5
Procedimientos.....	5
Actitudes, valores y normas.....	5
IDEAS PREVIAS. CONTENIDOS PREVIOS.....	7
DESARROLLO DE LA UNIDAD. METODOLOGÍA.....	11
EXPOSICIÓN: ELABORACIÓN DE MAPA DE CONCEPTOS.	11
PROBLEMAS A PROPONER EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	11
INVESTIGACIONES A PROPONER A LOS ALUMNOS.....	12
SELECCIÓN DE ACTIVIDADES A REALIZAR (DE COMPRENSIÓN, MEMORIA, OPINIÓN Y RUTINA.).....	13
Bloque 1: Desigualdades. Propiedades de las desigualdades.....	13
Bloque 2: Conjuntos dados por inecuaciones: intervalos, representación gráfica.....	14
Bloque 3: Inecuaciones de primer grado con una incógnita.....	16
Bloque 4: Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita..	19
Bloque 5: Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.....	21
Bloque 6: Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.....	22
SELECCIÓN DE RECURSOS A UTILIZAR.....	25
EL CLIMA DE LA CLASE.	29
ORGANIZACIÓN ESPACIAL.....	29
LA AUTORIDAD DEL PROFESOR: AUTONOMÍA-DIRECCIÓN.....	29
EVALUACIÓN.....	31
EVALUACIÓN DEL ALUMNO.....	31
Evaluación inicial.....	31
Evaluación formativa o del proceso de aprendizaje.....	31
La evaluación sumativa.....	33
Autoevaluación del alumno.....	34
Evaluación del trabajo en equipo.....	34
EVALUACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	35
Aspectos relativos al diseño de la Unidad Didáctica.....	35
Interacción profesor-alumno.....	35
PROPUESTA DE EXÁMEN.....	36
SECUENCIA, UBICACIÓN Y TEMPORALIZACIÓN DE METODOLOGÍA- ACTIVIDAD, USO DE RECURSOS, EVALUACIÓN.....	37
TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN EL AULA.....	38