

Combinatoria

2 de noviembre de 2004

1. Objetivos

- Distinguir las distintas formas de agrupar elementos de un conjunto.
- Resolver problemas de recuento sencillos.

2. Introducción

¿De cuántas formas puede el profesor sacar a dos alumnos a la pizarra? ¿Cuántas combinaciones son posibles en la Lotería Primitiva? ¿Cuántas opciones puede mostrarte una máquina tragaperras?

La parte de las Matemáticas que estudia este tipo de problemas se llama COMBINATORIA. Antes de resolver estos problemas hay que clasificarlos porque no todos son iguales, para ello vamos a definir las VARIACIONES, las PERMUTACIONES y las COMBINACIONES.

3. Historia

El nacimiento y desarrollo de la combinatoria ha sido paralelo al desarrollo de otras ramas de las Matemáticas, tales como el álgebra, teoría de números, y probabilidad. Desde tiempos muy remotos ha habido problemas de combinatoria que han llamado la atención de los matemáticos. Por ejemplo, el problema de los cuadrados mágicos, que son matrices de números con la propiedad de que la suma de los elementos de cualquier columna, fila o diagonal es el mismo número, aparece en un viejo libro chino fechado 2200 a. C. Los cuadrados mágicos de orden 3 fueron estudiados con fines místicos. Los coeficientes binomiales, que son los coeficientes enteros del desarrollo de $(a + b)^n$ fueron conocidos en el siglo XII. El triángulo de Pascal que es una disposición triangular de los coeficientes binomiales fue desarrollado en el siglo XIII.

Se puede considerar que en Occidente la combinatoria surge en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal y de Pierre Fermat sobre la teoría de juegos de azar. Estos trabajos, que formaron los fundamentos de la teoría de la probabilidad, contenían asimismo los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito, y así se estableció la tradicional conexión entre combinatoria y probabilidad.

El término “combinatoria” tal y como lo usamos actualmente fue introducido por Wilhem Leibniz en su Dissertatio de Arte Combinatoria. De gran importancia para la consolidación de la combinatoria fue el artículo de Ars Conjectandi

(el arte de conjeturar) de J. Bernoulli; este trabajo estaba dedicado a establecer las nociones básicas de probabilidad. Para esto fue necesario introducir también un buen número de nociones básicas de combinatoria pues se usaron fuertemente como aplicaciones al cálculo de probabilidades. Se puede decir que con los trabajos de Leibniz y Bernoulli se inicia el establecimiento de la combinatoria como una nueva e independiente rama de las matemáticas.

El matemático suizo Leonard Euler fue quien desarrolló a principios del siglo XVIII una auténtica escuela de matemática combinatoria. En sus artículos sobre la partición y descomposición de enteros positivos en sumandos, estableció las bases de uno de los métodos fundamentales para el cálculo de configuraciones combinatorias, que es el método de las funciones generadoras. También se le considera el padre de la teoría de grafos por el planteamiento y solución del problema de los “Puentes de Königsberg” usando por primera vez conceptos y métodos de teoría de grafos. Los primeros problemas de teoría de grafos surgieron de la búsqueda de solución a algunos problemas cotidianos y también en el planteamiento de algunos acertijos matemáticos tales como el problema de los Puentes de Königsberg, la colocación de reinas en un tablero de ajedrez con alguna restricción, problemas de transporte, el problema del viajero, etcétera.

En Inglaterra a finales de siglo XIX Arthur Cayley (motivado por el problema de calcular el número de isómeros de hidrocarburos saturados) hizo importantes contribuciones a la teoría de enumeración de grafos. Por este tiempo el matemático George Boole usó métodos de combinatoria en conexión con el desarrollo de la lógica simbólica y con las ideas y métodos que Henri Poincaré desarrolló en relación con problemas de topología. Uno de los factores más importantes que han contribuido al gran desarrollo que ha tenido la combinatoria desde 1920 es la teoría de grafos, la importancia de esta disciplina estriba en el hecho de que los grafos pueden servir como modelos abstractos para modelar una gran variedad de relaciones entre objetos de un conjunto.

4. Variaciones

Vamos a estudiar dos tipos de variaciones, sin y con repetición.

4.1. Variaciones sin repetición

Se llama variación ordinaria o sin repetición de m elementos tomados de n en n , a los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos de forma que cada grupo conste de n elementos distintos. Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de éstos.

Es interesante observar que $m \geq n$, puesto que no tiene sentido hacer grupos de 4 elementos si sólo tenemos 2.

Las variaciones reciben distintos nombres según el número de elementos:

$n = 1$ Variación unitaria

$n = 2$ Variación binaria

$n = 3$ Variación ternaria

$n = 4$ Variación cuaternaria

El número de variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se representa por V_m^n ó $V_{m,n}$.

Comprobar con ejemplos que se verifica: $V_m^n = m \cdot (m - 1) \dots (m - n + 1)$.

4.2. Variaciones con repetición

Se llaman VARIACIONES CON REPETICIÓN de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos que podemos formar con los m elementos de forma que en cada grupo existen n elementos, iguales o no. Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

Ahora no se necesita que se verifique $m \geq n$, debido a que ahora podemos repetir los elementos.

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por VR_m^n ó $VR_{m,n}$.

Comprobar con ejemplos que se verifica: $VR_m^n = m^n$.

4.3. Ejercicios

1. ¿Cuántos capicúas hay de cinco cifras?
2. ¿Cuántos números de tres cifras significativas se pueden escribir de forma que todas sus cifras sean distintas?
3. ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden hacer en la quiniela?
4. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar? ¿cuántos son pares?
5. Con 28 letras diferentes, ¿cuántas palabras de 7 letras se pueden formar?
6. Una línea de autobús tiene paradas en 6 pueblos diferentes, ¿cuántos billetes distintos debe tener el conductor disponibles?

5. Permutaciones

Hay dos tipos de permutaciones, las ordinarias y las permutaciones con repetición, las primeras son un caso particular de las variaciones sin repetición. Las segundas son un poco mas complicadas y necesitaremos estudiar antes el factorial de un número.

5.1. Factorial de un número natural

Dado un número natural $n > 1$, definimos el factorial de n como el siguiente producto:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y se escribe $n!$. Además definimos $1! = 1$ y $0! = 1$.

El factorial se utiliza generalmente para simplificar algunas expresiones, por ejemplo:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m - n)!}$$

5.2. Permutaciones ordinarias

Se llaman permutaciones ordinarias de n elementos a los distintos grupos que se pueden formar de manera que en cada grupo están los n elementos. Dos grupos son distintos si difieren en el orden de colocación de sus elementos.

El número de permutaciones ordinarias de n elementos se representa por P_n .

Es fácil ver que las permutaciones son un caso particular de las variaciones, el caso en que $m = n$. Por tanto $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, es decir $P_n = n!$.

5.3. Permutaciones con repetición

El problema de las permutaciones con repetición aparece cuando hay que ordenar un conjunto en el que hay elementos iguales y elementos distintos.

Se llama permutación con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b, \dots y el último k veces ($a + b + \dots + k = n$), a los distintos grupos que se pueden formar de manera que en cada grupo de n elementos el primero se repite a veces, el segundo b, \dots . Dos grupos se diferencian en el orden de colocación de sus elementos.

El número de permutaciones con repetición de n elementos, donde el primero se repite a veces, el segundo b veces, \dots el último k veces, se representa por $P_n^{a,b,\dots,k}$.

Comprobar con ejemplos que se verifica:

$$P_n^{a,b,\dots,k} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \dots \cdot k!}$$

5.4. Ejercicios

1. Tenemos 3 bolas rojas y 4 negras. ¿De cuántas formas las podemos ordenar?
2. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden escribir con las cifras de 33.577?
3. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con las cifras 0, 1, 2 y 3?
4. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar 5 caballos a la meta?
5. Tenemos 3 lápices rojos, 3 azules y 3 negros. ¿De cuántas formas los podemos ordenar?
6. ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra Matemáticas? ¿Cuántas empiezan por "mat"?

6. Combinaciones

6.1. Combinaciones ordinarias

Se llaman combinaciones ordinarias o sin repetición de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de forma que en cada grupo entren n elementos distintos. Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no importa el orden de colocación.

6.3.1. Propiedades de los números combinatorios

1. Todas las filas empiezan y terminan por 1.

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

2. Todas las filas son simétricas:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

3. Cada número se obtiene sumando los dos que tiene encima, excepto los elementos de los extremos;

$$\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$$

4. La suma de los elementos de la fila n -ésima es 2^n

6.4. Ejercicios

1. Las variaciones de n elementos tomados de dos en dos suman 820 más que las combinaciones de n elementos tomados de dos en dos. Calcula n .
2. ¿Cuántas jugadas diferentes se pueden obtener si se sacan cinco cartas de una baraja de 40?
3. ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer en la Lotería Primitiva?
4. A una reunión asisten 17 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se intercambian?
5. En este Centro hay 67 profesores, y se decide formar una comisión de 6. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?
6. Un entrenador de fútbol dispone de 20 jugadores. ¿Cuántas alineaciones distintas puede hacer?

7. Binomio de Newton

Calculando las potencias sucesivas de $(a + b)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(a + b)^1 &= a + b \\(a + b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \\&\dots\end{aligned}$$

Sería interesante encontrar un método general que nos permita calcular $(a + b)^n$. Observando los desarrollos anteriores vemos que los coeficientes se corresponden con los elementos del triángulo de Tartaglia, si escribimos estos elementos como

números combinatorios llegamos a la expresión que se conoce como BINOMIO DE NEWTON:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Análogamente podemos calcular el desarrollo de $(a-b)^n$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n - \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n \cdot b^n$$

7.1. Ejercicios

1. Desarrolla $(2-x)^4$.
2. Calcula $(2-x)^4 + (2+x)^4$
3. Calcula el quinto término de $(x-y)^7$
4. Probar que la suma de los elementos de la fila n del triángulo de Tartaglia vale 2^n .

8. Problemas de Síntesis

1. Contesta verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones:
 - En las variaciones con repetición no influye el orden.
 - En las variaciones sin repetición si influye el orden.
 - En las permutaciones con repetición influye el orden.
 - En las permutaciones sin repetición no influye el orden.
 - En las combinaciones influye el orden.
2. Un estudiante tiene que contestar 8 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas formas diferentes puede contestar? ¿Y si las tres primeras son obligatorias? ¿Y si de las cinco primeras tiene que contestar cuatro?
3. Para jugar al dominó, siete fichas hacen un juego. Sabiendo que hay 28 fichas, ¿cuántos juegos diferentes se pueden hacer?
4. Hallar el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. (Suponer que el alfabeto tiene 28 letras)
5. El séxtuplo del número de combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados de tres en tres es igual al número de variaciones que se pueden formar con $m-1$ objetos tomados de cuatro en cuatro. Halla el valor de m suponiendo que es mayor que cuatro.
6. La diferencia entre el número de variaciones binarias de m objetos y el de combinaciones binarias de los mismos m objetos es 45. Halla el número de objetos.
7. En las variaciones sin repetición que podemos formar con las nueve cifras significativas tomadas de tres en tres ¿cuántas veces está la cifra 7?

8. ¿Cuántas palabras de 12 letras se pueden formar con las letras de AYUNTAMIENTO, de tal manera que siempre comiencen por vocal?
9. Con una baraja de 52 cartas, ¿cuántos grupos de cinco cartas se pueden formar?
10. De un grupo de 12 alumnos deben formarse tres equipos de cuatro. ¿De cuántas formas se pueden escoger los grupos?
11. ¿Cuál de las siguientes expresiones es mayor, $C_{26,3}$, P_6 , $V_{9,4}$, $VR_{6,4}$?
12. Con las cifras 2, 4, 6 y 8, ¿cuántos números menores que 1.000 se pueden formar?
13. Halla el séptimo término de $(1+x)^{12}$.
14. Halla el término central de $(1-x)^{12}$.
15. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 12 lados?
16. Una chica tiene tres blusas y cuatro faldas, ¿de cuántas formas se puede vestir?
17. Halla el término que contiene a la potencia x^6 en el desarrollo de $(2x+1)^{15}$.
18. ¿De cuántas formas se pueden colocar 3 bolas rojas y 5 negras?
19. Los 25 alumnos de una clase se ponen en fila, ¿de cuántas formas pueden formar la fila?
20. Calcula x para que se cumpla la igualdad:

$$\binom{x}{16} = \binom{x}{7}$$

21. Tenemos 5 regalos que identificamos por sus iniciales:
 ABRIGO A
 BOTELLA B
 COCHE C
 DIADEMA D
 ESMERALDA E
 Queremos hacer dos regalos a dos personas distintas. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?
 Identificar todas las soluciones.
22. Calcular las variaciones de 20 elementos tomados de 4 en 4.
23. Calcular las variaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3.
24. Calcular las permutaciones de 5 elementos.
25. Calcular las permutaciones de 8 elementos.
26. Resolver la ecuación: $V_m^3 = P_{m-4}$.

27. ¿Cuántas palabras de 5 letras podemos formar con las letras ABCDE sin repetir ninguna letra? ¿Cuántas de esas palabras empiezan por A? ¿Cuántas acaban por CE? ¿Cuántas cumplen ambas condiciones? (No hace falta que sean auténticamente palabras.)
28. Resolver el problema anterior si las palabras son de 3 letras en lugar de 5?
29. ¿Cuántos números distintos de 4 cifras diferentes se pueden formar con las cifras del 1 al 6? ¿Cuántos son más pequeños que 5.000?
30. De los números de 4 cifras diferentes que se pueden formar con las cifras de 1 al 7 decir cuántos son pares y cuántos son múltiplos de 5.
31. De los 11 componentes de un equipo de fútbol, 5 tienen puesto fijo y otro sólo puede ocupar uno de los extremos, ¿cuántas posibles alineaciones hay?
32. Suponiendo que el portero de un equipo de fútbol es fijo y que a los otros 10 jugadores sólo podemos intercambiarlos de manera que no se salgan de su línea (3 defensas, 2 medios y 5 delanteros), calcular el número de alineaciones diferentes. ¿Qué pasa si consideramos al portero suplente para cambiarlo con el titular? ¿Qué pasa (con y sin portero suplente) si el equipo adapta la táctica de 4-3-3?
33. Tenemos 3 pantalones, 4 camisas y 2 corbatas. ¿De cuántas maneras diferentes podemos vestirnos?
34. Tenemos 3 porteros, 6 defensas, 4 medios y 8 delanteros. ¿Cuántas alineaciones clásicas (1-3-2-5) podemos formar?
35. Tenemos una bolsa con 10 papeletas, cada una de las cuales tiene un nombre distinto. Sacamos 3 de ellas simultáneamente y leemos los nombres. ¿Cuántos grupos diferentes pueden salir?
36. ¿Qué pasa si en el problema anterior sacamos los 3 nombres sucesivamente y los escribimos de forma ordenada, o sea, 1º, 2º y 3º? ¿Cuántos grupos diferentes hay ahora?
37. ¿Cuántas parejas diferentes de bueyes podemos formar partiendo de un grupo de 6?
38. ¿Cuántos ramilletes distintos de 4 flores podemos formar si tenemos 7 clases distintas de flores y sólo ponemos una flor de cada clase?
39. Tenemos 6 animales diferentes, entre los que están un león y un cordero, y metemos 3 en una jaula. ¿Cuántos grupos posibles hay? ¿En cuántos de ellos no están juntos el león y el cordero?
40. Hay que formar una patrulla de 5 hombres y contamos con 10 soldados, pero 3 de ellos están reñidos entre sí. ¿Cuántas posibles patrullas hay que eliminar si no queremos que se junten dos de los hombres enemistados entre sí?
41. Tenemos dos grupos, uno de 4 letras y otro de 4 números, ¿cuántos grupos de 3 letras y 3 números podemos formar? (Considerar que el orden de letras o números no importa.)

42. ¿Cuántas agrupaciones posibles hay si consideramos que el orden puede diferenciarlos?
43. ¿Cuántas agrupaciones de este tipo se pueden formar si obligamos a que los lugares impares lo ocupen las letras y los pares los números?
44. Tenemos 10 bolas numeradas en una bolsa. La número 10 es negra y las demás blancas. Pasamos 4 bolas a otra bolsa. De todos los casos posibles, ¿en cuántos queda la bola negra en la bolsa nueva?
45. Calcular después el caso contrario y verificar que la suma de ambos casos es el total de posibilidades.
46. Tenemos 5 colores en una paleta, ¿cuántas mezclas podemos realizar considerando todas las posibilidades?
47. Tenemos 8 tenistas y tenemos que confeccionar parejas para que jueguen partidos de dobles entre sí. ¿De cuántas maneras pueden repartirse? ¿Y si fuesen 9 jugadores y equipos de 3?
48. ¿Cuántas permutaciones con repetición diferentes se pueden hacer con las letras de la palabra CARACALLA? (Considerar la *elle* como dos *eles*.)
49. ¿Cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar con las cifras del 1 al 5?
50. ¿Cuántas quinielas diferentes de 6 resultados pueden escribirse?
51. Tenemos un saco lleno de monedas de 4 clases diferentes: 1, 5, 10 y 20 céntimos. Sacamos 3 monedas. ¿Cuántos valores diferentes puede adoptar la suma de las 3 monedas?
52. En una sastrería tienen botones de 5 clases diferentes. ¿De cuántas maneras podemos coser los 4 botones de un abrigo?
53. Combinando las cifras del número 778447, ¿cuántos números diferentes podemos formar?
54. ¿Cuántos números diferentes de 4 cifras se pueden hacer con las cifras del 0 al 5?
55. Tenemos 4 bolas blancas y 4 negras. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse? ¿Cuántas de ellas empiezan por una bola blanca?
56. Del palo de oros de una baraja extraemos simultáneamente 3 cartas. Sin fijarnos en el orden, ¿cuántos tríos diferentes hay? ¿Y si nos fijamos en el orden?
57. Del palo de oros de una baraja extraemos sucesivamente 3 cartas, pero cada vez que sacamos una carta la devolvemos al mazo antes de sacar la siguientes. ¿Cuántos tríos diferentes de cartas hay si no consideramos el orden en que han salido las cartas? ¿Y considerando el orden?
58. Lanzamos 3 dados sobre una mesa, ¿cuántos resultados diferentes pueden salir?

59. Tiramos una moneda al aire 6 veces y anotamos la secuencia de resultados, ¿cuántas posibilidades hay?
60. Manejando solamente las cifras impares (1, 3, 5, 7 y 9), calcular cuántos números menores de 1.000 se pueden escribir.
61. ¿Cuántos resultados fijos hay que dejar en una quiniela de 14 para que jugando el resto de los partidos a 1, X, 2 no tengamos más de 1.000 apuestas?
62. Sabemos que un número de matrícula de 6 cifras tiene como segunda cifra un 4, como tercera un 6 o un 8, que acaba en 2 y que no tiene ceros. ¿Hay muchas que cumplan estos requisitos?
63. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 7 libros en un estante?
64. Una cerradura de caja fuerte se abre con una combinación de 4 números del 0 al 9. ¿Cuántas combinaciones diferentes hay?
65. En una ruleta del 1 al 36 jugamos tres veces. De todas las posibilidades, ¿en cuántas de ellas nos saldrá en las 3 jugadas un número par?

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesbajogudalquivir/mates>