Expresiones Algebraicas y Ecuaciones de Primer Grado en el Primer Ciclo de E.S.O.

Departamento de Matemáticas
IES Carrillo Salcedo
Morón de la Frontera

Julio Gómez Martín

Curso 2003–2004

Índice general

1. Significado y utilidad de las expresiones algebraicas **2**

1.1. Significado y utilidad 2

1.1.1. Identificación de los componentes 2

1.1.2. Expresiones algebraicas más comunes 3

1.2. El Valor Numérico de una Expresión Algebraica 4

1.2.1. Ejemplos explicativos 4

1.3. Monomios y Polinomios 6

1.3.1. Monomios 6

1.3.2. Polinomios 7

1.4. Operaciones con Monomios y Polinomios 8

1.4.1. Operaciones con Monomios 8

1.4.2. Operaciones con Polinomios 9

2. Significado y utilidad de las Ecuaciones **11**

2.1. Significado y Utilidad 11

2.1.1. Significado 11

2.1.2. Utilidad 12

2.2. Ecuaciones e Identidades. Identidades Notables 13

2.2.1. Ecuaciones e identidades 13

2.2.2. Identidades notables 13

2.2.3. Algunos ejemplos prácticos 15

2.3. Ecuaciones Equivalentes 18

2.3.1. Significado 18

2.3.2. Transformación de una ecuación en otra equivalente 18

2.3.3. Aplicaciones de las ecuaciones equivalentes en la resolución de ecuaciones 1

2.4. Resolución de Ecuaciones de Primer Grado 21

2.4.1. Reglas básicas a tener en cuenta para resolver una ecuación. . 21
2.4.2. Pasos para despejar la incógnita de una ecuación: 21
2.5. Resolución Algebraica de Problemas 23
2.5.1. Consejos 23
2.5.2. Procedimientos y ejemplos 23

3. Hojas de problemas **25**
3.1. Hoja de Problemas con Soluciones 25
3.2. Hoja de Problemas sin soluciones 26

4. Controles **28**

Capítulo 1

Significado y utilidad de las expresiones algebraicas

Una ***expresión algebraica*** es una combinación de letras y números relacionados por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Los signos de sumar y de restar sirven para separar unos ***términos*** de otros (también se les llama ***sumandos***). Dentro de cada término tenemos dos partes, una formada sólo por números llamada ***coeficiente*** y otra formada por letras y que se llama ***parte literal***. A cada una de las letras se le llama ***variable*** o ***indeterminada***.

1.1. Significado y utilidad

Hay veces que en matemáticas nos encontramos con cantidades cuyo valor no está expresado con números. Por ejemplo cuando decimos *mi padre tiene el triple de años que yo*, o *me he gastado la mitad del dinero que tenía*, o sin ir más lejos, seguro que te acuerdas del área del rectángulo ($A = b \times a$). En estos casos en los que no se especifican cantidades concretas, expresamos lo que queremos decir con letras:

- Así en el primer caso llamamos x a la edad que yo tengo, y $3x$ a la edad de mi padre.
- En el segundo ejemplo n puede ser el dinero que tenía al principio y $\frac{n}{2}$ el dinero gastado.
- Y en el tercer ejemplo A representa el resultado de multiplicar una longitud cualquiera de la base (b) por una longitud cualquiera de la altura(a) en una figura rectangular

1.1.1. Identificación de los componentes

Decíamos en el resumen lo que era una expresión algebraica y cuales eran sus componentes; veamos ahora con un ejemplo como identificar cada uno de sus componentes.

Sea la expresión algebraica

$$\boxed{p^2 - 2pq^3 + 3 \cdot (n \cdot m + 5) - 4} \tag{1.1}$$

Si te fijas bien descubrirás que esta formada por cuatro ***términos o sumandos*** que son respectivamente: p^2, $-2pq^3$, $3(nm + 5)$ y -4. Verás que los términos separados por el signo de restar son términos negativos ($-2pq^3$, -4) y es que , como ya sabes, la resta no es más que la suma de los opuestos.

El término $3.(nm+5)$ es un solo término aunque dentro tenga un signo de sumar, pero al estar dentro de un paréntesis queda todo reducido a la multiplicación de dos números.

Habrás comprobado también que en la expresión algebraica (1.1) hay cuatro ***variables o indeterminadas*** que son respectivamente las letras p, q, n, y n.

Si, por último, analizamos un término cualquiera de (1.1), por ejemplo, $-2pq^3$ verás que el ***coeficiente*** sería el número entero -2 y la ***parte literal*** estaría representada por las letras pq^3 (incluido el exponente numérico 3, que no indica otra cosa, sino que la letra q está multiplicada tres veces por si misma. Sería lo mismo que $p \cdot q \cdot q \cdot q$).

1.1.2. Expresiones algebraicas más comunes

LENGUAJE ORDINARIO	*LENGUAJE ALGEBRAICO*
Un número cualquiera	x
Un número aumentado en 3 unidades	$x+3$
Un número disminuido en 2 unidades	$x-2$
El doble, triple, ... de un número	$2x, 3x, \ldots$
La mitad, tercera parte, ... de un número	$\frac{x}{2}, \frac{x}{3} \ldots$
Un número par	$2n$
Un número impar	$2n+1$
Dos números consecutivos	$p, (p+1)$
Dos números pares consecutivos	$2p, (2p+2)$
Dos números impares consecutivos	$(2p+1), (2p+3)$
La suma de dos números consecutivos	$r+(r+1)$
La suma de dos números pares consecutivos	$2r+(2r+2)$
La suma de dos números impares consecutivos	$(2r+1)+(2r+2)$
El cuádruple de la suma de dos números	$4 \cdot (x+y)$
El cuadrado de una suma de dos números	$(a+b)^2$
La diferencia de dos cuadrados	a^2+b^2

1.2. El Valor Numérico de una Expresión Algebraica

El ***valor numérico*** de una expresión algebraica es UN NÚMERO que se obtiene al sustituir las letras de dicha expresión por números determinados y después realizar las operaciones que se indican.

1.2.1. Ejemplos explicativos

Aunque el concepto de valor numérico de una expresión algebraica parece sencillo, a muchos niños se les atraganta a la hora de ponerlo en práctica; la mayoría de las veces porque no dominan los conceptos previos y las operaciones con números enteros. Veamos su aplicación con unos ejemplos de menor a mayor dificultad.

Primer ejemplo

Sea la expresión algebraica

$$x + 8 \tag{1.2}$$

Supongamos que damos a la x el valor 23. Automáticamente, si sustituimos en (1.2) la x por el número 23 obtenemos la ***expresión numérica***

$$23 + 8 \tag{1.3}$$

Y si realizamos la operación correspondientes en (1.3) nos da un número que es 31 y que es lo que se conoce como ***valor numérico*** de la expresión (1.2) cuando la letra x vale 23.

Como es lógico, si en vez de valer 23, valiera 18, u otro valor cualquiera obtendríamos nuevos valores numéricos de la misma expresión algebraica (1.2).

Segundo ejemplo

Sea ahora la expresión algebraica

$$3mn + 1 \tag{1.4}$$

En esta expresión aparecen, en vez de una letra, dos letras, por lo tanto, para poder hallar el valor numérico necesitamos darle valores a las letras m y n. Supongamos que $m = 2$ y $n = 3$; si sustituimos las letras por su valor, obtendremos la siguiente expresión numérica:

$$3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \tag{1.5}$$

Si ahora realizamos las operaciones en (1.5) (cuidado, recuerda que primero debes hacer las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y restas) tendremos que el valor numérico de la expresión (1.4) cuando $m = 2$ y $n = 3$ es 19. ¿Sabrías cual sería el valor numérico si $m = -1$ y $n = -2$? (recuerda las reglas de los signos en la multiplicación de números enteros)

Tercer ejemplo

Por último sea la expresión algebraica

$$5 \cdot (a - b)^2 - 3 \cdot (a^2 - b^2) \tag{1.6}$$

Tenemos ahora, además de dos letras, una expresión con paréntesis y potencias. No te asustes, todo se resuelve fácilmente si vas paso a paso.

Primero necesitamos conocer los valores de las letras. Supongamos que $a = -2$ y $b = 5$. Atención, el valor de a es un número entero negativo y hay que estar muy pendientes de su signo.

Sustituyamos en (1.6) las letras por su valor, para ello vamos a colocar el valor de a entre paréntesis, pues al ser un número negativo podemos confundirnos con los signos.

Obtenemos, por tanto, la expresión numérica

$$5 \cdot [(-2) - 5]^2 - 3 \cdot [(-2)^2 - 5^2] \tag{1.7}$$

Para resolver la expresión (1.7) hay que tener en cuenta que lo primero son los paréntesis, corchetes y potencias; por lo tanto un primer paso sería:

$$5 \cdot (-7)^2 - 3 \cdot (4 - 25) \tag{1.8}$$

Como verás hemos resuelto, en el primer corchete la operación de suma de números enteros aplicando la regla correspondiente (al ser dos números negativos se suman los valores absolutos y se deja el signo que tienen), dejando para el siguiente paso la resolución de la potencia. Mientras en el segundo corchete hemos actuado al revés; hemos hecho primero las potencias ($4 = (-2) \cdot (-2)$ y $25 = 5 \cdot 5$) y hemos dejado para el final el corchete.

En el siguiente paso,quitamos definitivamente en (1.8) potencias y paréntesis, obteniendo la expresión numérica

$$5 \cdot 49 - 3 \cdot (-21) \tag{1.9}$$

Observarás que en el segundo paréntesis de (1.8) hemos obtenido (-21), pues al restar un número positivo con otro negativo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del de mayor valor absoluto, en este caso negativo y lo ponemos entre paréntesis.

Si resolvemos ahora, aplicando la norma explicada en (1.5) obtenemos

$$245 - (-63) \tag{1.10}$$

O lo que es lo mismo (recuerda que la resta no es sino una suma con el opuesto)

$$245 + 63 \tag{1.11}$$

Y, por tanto, el valor numérico de (1.6) cuando $a = -2$ y $b = 5$ es 308

1.3. Monomios y Polinomios

Un ***monomio*** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que afectan a los números y letras son la multiplicación y la potenciación con exponentes naturales.[1]

Un ***polinomio*** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o mas monomios no semejantes. Cada monomio se llama ***término del polinomio***

1.3.1. Monomios

Fíjate en la expresión algebraica

$$\boxed{57x^3 \cdot y^2 \cdot z} \tag{1.12}$$

Si buscas las operaciones que unen los números y las letras de esta expresión sólo encontrarás productos y potencias. Esto es, precisamente, lo que identifica a los monomios.

En todo monomio se pueden distinguir dos partes:

$$\boxed{57}\boxed{x^3 \cdot y^2 \cdot z} \tag{1.13}$$

El cuadro rojo encierra un número, que recibe el nombre de ***coeficiente***; y el cuadro verde encierra sólo letras, aunque tengan exponentes numéricos, por eso se llama ***parte literal***.

Los coeficientes pueden ser también números negativos; como en estos ejemplos de monomios:

$$-yz \qquad -0,23x \qquad -\frac{8}{9}x$$

Donde los coeficientes son respectivamente -1, $-0,32$ y $-\frac{8}{9}$

Monomios semejantes

Se dice que dos monomios son ***semejantes*** si sus partes literales son iguales

Por ejemplo, $3x^3z$ y $-5,6x^3z$, si te fijas tienen la misma parte literal y, aunque sus coeficientes sean distintos, se dice que SON SEMEJANTES.

Sin embargo, $3xz$ y $3pq$ NO SON SEMEJANTES, pues, aunque tengan el mismo coeficiente, no tienen la misma parte literal

Grado de un monomio

Para identificar el grado de un monomio hay que fijarse en su parte literal.

Por ejemplo, en el monomio (1.12) la parte literal dijimos que era $\boxed{x^3 \cdot y^2 \cdot z}$, tal y como vimos en (1.13). Cada una de las letras, también llamadas ***variables*** o ***indeterminadas*** tiene un exponente, que es su grado:

VARIABLE	*EXPONENTE*	*GRADO*
x	3	3
y	2	2
z	1	1
x^3y^2z	6	6

[1] Se refiere al conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

El grado, por tanto, del monomio cuya parte literal era x^3y^2z, es 6 y lo hemos hallado SUMANDO LOS GRADOS O EXPONENTES de cada una de sus letras[2] o indeterminadas

1.3.2. Polinomios

Veamos ahora la siguiente expresión algebraica:

$$\boxed{5x^3 + x^2 - 2x + 3} \tag{1.14}$$

Observa que esta formada por los monomios $5x^3$, x^2, $-2x$ y 3 unidos por las operaciones de sumar o restar[3]. Cada uno de estos monomios es un ***término del polinomio***:

- El término o monomio de mayor grado es el que determina el ***grado del polinomio***. En nuestro polinomio (1.14) el término de mayor grado sería $5x^3$ y su grado, y por tanto , el grado del polinomio, sería 3.
- El ***término de grado cero*** se llama ***término independiente***, y en nuestro ejemplo sería el 3

Representación y tipos de polinomios

Las expresiones algebraicas que hemos denominado polinomios suelen simbolizarse con letras mayúsculas que nos sirven para no tener que escribirlos completos cada vez. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} P & = & -2x + 2 \\ Q & = & -2,5ab - 5 \\ R & = & z^4 - \frac{5}{4}z^3 - \frac{2}{7}z \end{array} \tag{1.15}$$

A partir de aquí cada vez que tengamos que referirnos a los polinomios de (1.15), lo haremos con las letras P, Q y R respectivamente

Algunos polinomios reciben nombres especiales. Así, si están formados por dos monomios se llaman ***binomios*** (Por ejemplo $a - b^2$); y si están formados por tres monomios se llaman ***trinomios*** (por ejemplo $x^2 - 2x + 1$)

[2]Cuando una letra no tiene ningún exponente es como si tuviera exponente 1, así, por ejemplo, $z = z^1$, por tanto, su grado sería 1.

[3]El 3 es también un monomio , y de grado cero, pues 3 es lo mismo que $3x^0$, ya que cualquier potencia de exponente cero vale 1 y $3 \cdot 1 = 3$, por tanto, también tiene su parte literal y su exponente, o lo que es lo mismo, su grado es cero

1.4. Operaciones con Monomios y Polinomios

1.4.1. Operaciones con Monomios

Para ***sumar o restar*** monomios semejantes, se suman o se restan, sus coeficientes y se deja la misma parte literal. Si no son semejantes, la suma o la resta no se pueden hacer, pero se dejan indicadas, formándose así un polinomio.

Para ***multiplicar*** dos monomios, no hace falta que sean semejantes, ya que, en cualquier caso, se multiplican los coeficientes, y se multiplican las partes literales, aplicándose en estas últimas las reglas del cálculos de potencias.[4]

Suma y Resta de Monomios

La suma y la resta de monomios es superfácil, pues no tienes nada más que comprobar si los monomios son o no son semejantes:

- Si SON SEMEJANTES, todo se resuelve sumando o restando los coeficientes y dejando la misma parte literal. Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} 5b + 3b = (5+3)b = 8b \\ 6c + 2c = (6-2)c = 4c \end{array} \tag{1.16}$$

  Es obvio, si tienes 5 bellotas – por ejemplo – y le sumas 3 bellotas, lo lógico es que al final tengas 8 bellotas; es decir, la suma de los coeficientes $(5+3)$. Idéntico razonamiento podemos hacer con la resta, si tenemos 6 cerdos – por ejemplo – y quitamos 2 al final tendremos 4 cerdos, es decir, la resta de sus coeficientes $(6-4)$.

- Si NO SON SEMEJANTES no hay nada que hacer. Por ejemplo:

$$5b + 3c = 5b + 3c \tag{1.17}$$

  Es decir, si por ejemplo sumas 5 bellotas con 3 cerdos el resultado final sigue siendo lo que teníamos al principio. Ahora bien, como dijimos en el resumen se nos forma un polinomio de dos términos, o lo que se conoce como un binomio.

En el primer caso (1.16) el resultado de la suma o la resta es un un único monomio ya que la suma de los monomios $5b$ y $3b$ queda reducida a un solo término $8b$; y lo mismo podríamos decir de la resta, por eso, cuando sumamos a restamos término semejantes se dice que ***reducimos términos***. Por ejemplo:

$$8x - 3x + 2x = 7x$$

Hemos reducido los tres términos semejantes a un sólo, $7x$.

---

[4] Reglas del cálculo de las potencias:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}l@{\qquad}rcl} x^m \cdot x^n & = & x^{m+n} & \textit{Por ejemplo} & x^4 \cdot x^3 & = & x^7 \\ x^m : x^n & = & x^{m-n} & \textit{Por ejemplo} & x^4 : x^3 & = & x^1 \\ (x \cdot y)^m & = & x^m \cdot y^m & \textit{Por ejemplo} & (x \cdot y)^4 & = & x^4 \cdot y^4 \\ (x : y)^m & = & x^m : y^m & \textit{Por ejemplo} & (x : y)^4 & = & x^4 : y^4 \\ (x^m)^n & = & x^{m \cdot n} & \textit{Por ejemplo} & (x^3)^4 & = & x^{12} \end{array}$$

Si tenemos que multiplicar o dividir potencias con distinta base la operación se dejaría indicada. Por ejemplo:

$$x^4 \cdot y^3 = x^4 y^3$$

En cualquier caso lo que si es importante es que recuerdes muy bien las reglas de la suma de números enteros.[5]

Multiplicación de Monomios

Al contrario de lo que ocurre con la suma y la resta, los monomios no tienen por qué ser semejantes para proceder a su multiplicación. Ejemplos:

$$2x^2 \cdot 3x^3 = (2 \cdot 3)x^2 \cdot x^3 = \boxed{6x^5} \tag{1.18}$$

$$3xy \cdot 8z^4 = (3 \cdot 8)xy \cdot z^4 = \boxed{24xyz^4} \tag{1.19}$$

Verás que en los dos casos hemos hecho algo en común; multiplicar los coeficientes: $(2 \cdot 3) = 6$ en (1.18) y $(3 \cdot 8) = 24$ en (1.19). Sin embargo, con las partes literales no ha ocurrido lo mismo en los dos casos:

- En (1.18) las partes literales de los dos monomios tienen la misma letra y según las reglas del cálculo de potencias, se obtiene $x^2 \cdot x^3 = x^5$.
- En (1.19), al no tener la misma base, las letras quedan multiplicadas pero con sus exponentes intactos: $xy \cdot z^4 = xyz^4$

Si sabes multiplicar dos monomios, multiplicar tres, cuatro, etc será muy fácil, ya que puedes ir multiplicando de dos en dos hasta que llegues al final.

1.4.2. Operaciones con Polinomios

Para ***sumar o restar*** dos polinomios, se suman o se restan, los monomios semejantes de ambos polinomios – se reducen términos – y se dejan indicados los monomios no semejantes. El resultado será otro polinomio.

Para ***multiplicar*** dos polinomios, se multiplica cada término o monomio de uno de los polinomios por todos los términos o monomios del otro; y después, se suman los polinomios resultantes.

---

[5] Reglas de la suma de números enteros:

- Si los dos tienen el mismo signo se suman sus valores absolutos y se deja el mismo signo. Por ejemplo,

$$(+4) + (+3) = +7$$
$$(-4) + (-3) = -7$$

- Si los dos tienen signos distintos se restan sus valores absolutos y se antepone el signo del que tenga mayor valor absoluto. Por ejemplo,

$$(+5) + (-3) = +2$$
$$(-5) + (+3) = -2$$

- Recuerda igualmente que la resta de dos números enteros es lo mismo que la suma del primero con el opuesto del segundo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (+7) - (+3) = (+7) + (-3) &= +4 \\ (+9) - (-5) = (+9) + (+5) &= +14 \end{aligned}$$

Suma y Resta de Polinomios

Lo mejor es verlo con un ejemplo. Sean los polinomios $P = 3x^2 + 4x - 5$ y $Q = x^3 + 4x^2 - 9$ vamos a efectuar su suma $(P + Q)$ y su resta $(P - Q)$:

Se escriben los polinomios uno sobre otro de manera que los términos semejantes queden en la misma columna	$\begin{array}{cccccccc} & & & 3x^2 & + & 4x & - & 5 \\ + & x^3 & + & 4x^2 & & & - & 9 \\ \hline \end{array}$
Se suman sus términos semejantes	$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & 7x^2 & + & 4x & - & 14 \end{array}$

Luego

$$P + Q = x^3 + 7x^2 + 4x - 14 \tag{1.20}$$

La resta $P - Q)$, se haría igual salvo con una modificación imprescindible: SE CAMBIA DE SIGNO A TODOS LOS TÉRMINOS DEL SEGUNDO POLINOMIO (Q, en nuestro caso); es decir, se suma P con el opuesto de Q $(-Q = -x^3 - 4x^2 + 9)$. Su resolución gráfica sería:

Se escriben los polinomios uno sobre otro de manera que los términos semejantes queden en la misma columna	$\begin{array}{cccccccc} & & & 3x^2 & + & 4x & - & 5 \\ + & -x^3 & + & -4x^2 & & & + & 9 \\ \hline \end{array}$
Se suman sus términos semejantes	$\begin{array}{ccccccc} -x^3 & - & x^2 & + & 4x & + & 4 \end{array}$

Luego:

$$P - Q = -x^3 - x^2 + 4x + 4 \tag{1.21}$$

Observarás que en ambos casos (1.20) y (1.21) hemos utilizado el signo de sumar entre los dos polinomios ya que al hacer el opuesto del segundo, la resta se convierte en suma. Además es fundamental, para sumar y restar, tanto monomios como polinomios, que recuerdes las reglas de la suma de números enteros.

Multiplicación de Polinomios

Al igual que con el punto anterior vamos a explicarlo con un ejemplo. Sean los polinomios $A = 3x^{+}2x - 1$y $B = 2x^2 - 3$ vamos a realizar el producto AxB

Se multiplica cada término de un polinomio por todos y cada uno de los términos del otro	$\begin{array}{cccccccccc} & & & 3x^3 & + & & & 2x & - & 1 \\ & & \times & & & 2x^2 & & & - & 3 \\ \hline & - & 9x^3 & & & & - & 6x & + & 3 \end{array}$
Se suman los polinomios resultantes	$\begin{array}{cccccccccc} 6x^5 & + & 4x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \hline 6x^5 & - & 5x^3 & - & 11x^2 & - & 6x & + & 3 & \end{array}$

Luego

$$A \times B = 6x^5 - 5x^3 - 11x^2 - 6x + 3 \tag{1.22}$$

- Verás que para multiplicar polinomios no hemos necesitado colocar los monomios semejantes de ambos polinomios uno debajo de otro; sin embargo, para la suma posterior si es imprescindible dicha colocación.
- Habrás comprobado igualmente que para multiplicar los sucesivos términos has tenido que recordar las reglas del producto de números enteros[6], así como las reglas del cálculo de potencias
- Observa, por último, el grado de (1.22) y descubre la relación que tiene con los grados de los polinomios A (de grado 3) y del polinomio B (de grado 2).

[6] Reglas del producto de números enteros

$$\begin{array}{ccccccc} + & \cdot & + & = & + \\ + & \cdot & - & = & - \\ - & \cdot & + & = & - \\ - & \cdot & - & = & + \end{array}$$

Capítulo 2

Significado y utilidad de las Ecuaciones

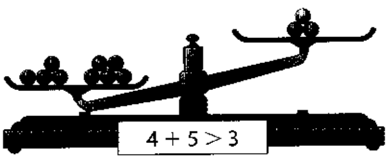
Una ***ecuación*** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A las expresiones algebraicas que se sitúan a ambos lados de signo igual se les llama ***miembros*** y a las letras que aparecen en ellas ***incógnitas***. Hallar la ***solución*** de la ecuación es descubrir el valor de la incognita para que la igualdad planteada sea cierta.

2.1. Significado y Utilidad

2.1.1. Significado

La comparación gráfica más parecida que se puede hacer con una ecuación es una BALANZA: así como en una balanza tenemos dos platillos igualados por un fiel, en una ecuación tenemos dos miembros que son dos expresiones algebraicas, igualadas por el sigo igual; y en los dos casos queremos representar lo mismo; la equivalencia entre lo que hay en un platillo o miembro y lo que hay en el otro.

Veamos lo con algunos gráficos:



En estas dos balanzas no hay equilibrio, y por lo tanto, no hay igualdad.

Observa estas otras:

Aquí las dos balanzas aparecen equilibradas pero para que se produzca tal equilibrio debemos averiguar a cuantas bolitas equivale el cuadrado azul (x), y el triángulo rosa (y); es lo que llamábamos las ***incógnitas***.

Por tanto, las expresiones de las dos balanzas anteriores

$$\begin{array}{ccc} 4+5 & = & 3+x \\ 4+5+y & = & 10 \\ \boxed{\begin{array}{l}\text{PRIMER}\\ \text{MIEMBRO}\end{array}} & & \boxed{\begin{array}{l}\text{SEGUNDO}\\ \text{MIEMBRO}\end{array}} \end{array}$$

Representan lo que hemos llamado ***ecuaciones***.

Observa que la primera ecuación sólo es cierta cuando $x = 6$, porque $4 + 5 = 3 + 6$; y la segunda ecuación sólo es cierta cuando $y = 1$, porque $4 + 5 + 1 = 10$.

Por tanto, $x = 6$ e $y = 1$ son lo que en el resumen llamábamos ***solución*** de una ecuación.

2.1.2. Utilidad

La mayoría de las fórmulas que vas a utilizar, tanto en matemáticas como en física o química están basadas en las ecuaciones.

Así, por ejemplo:

- Las fórmulas del movimiento son ecuaciones:

$$v = \frac{e}{t} \qquad e = v \cdot t \qquad t = \frac{e}{v}$$

- Las fórmulas de las áreas de las figuras planas:

$$A = a^2 \ (cuadrado) \qquad A = b \times a \ (rectngulo) \qquad A = \frac{b \times a}{2} \ (tringulo) \qquad etc$$

- Las fórmulas del interés bancario:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

- Etc.

2.2. Ecuaciones e Identidades. Identidades Notables

Las ***identidades*** son igualdades entre expresiones algebraicas que se cumplen para cualquier valor que le demos a las incógnitas

2.2.1. Ecuaciones e identidades

Fíjate en esta ecuación $y+y=2y$, las expresiones algebraicas de los dos miembros son equivalentes, pues da lo mismo decir la suma de un número consigo mismo, que un número multiplicado por dos (o el doble de un número).

Además hay otro dato importante: ¿Qué pasa si la $y=1$, o $y=2$, o $y=3$, o $y=$ *cualquier número*?

Observa:

- Para $y=1$, $1+1=2\cdot 1$; luego $y=1$ es una solución
- Para $y=2$, $2+2=2\cdot 2$; luego $y=2$ es una solución
- Para $y=3$, $3+3=2\cdot 2$; luego $y=3$ es una solución

Y así podríamos seguir dándole valores a la y, que siempre se cumplirá la igualdad; por eso, lo que caracteriza a las identidades es que *tienen infinitas soluciones*; o lo que es lo mismo cualquier valor de la incognita es solución de la ecuación, como decíamos en el resumen.

2.2.2. Identidades notables

Ya sabemos lo que es una identidad, pero ¿por qué a las que vamos a estudiar a continuación se les llama ***notables***?; pues sencillamente porque se utilizan con mucha frecuencia en álgebra, ya que ayudan a calcular y simplificar muchas expresiones algebraicas.

Vamos a comprobar algebraicamente como se obtiene el resultado final de las tres identidades notables más comunes y usadas en los cálculos algebraicos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2+b^2+2ab \\ (a-b)^2 & = & a^2+b^2-2ab \\ (a+b)\cdot(a-b) & = & a^2-b^2 \end{array} \right.$$

El cuadrado de una suma:

El binomio

$$\mathbf{(a+b)^2} \tag{2.1}$$

es, por definición de potencia, el producto de $(a+b)\cdot(a+b)$.

Haciendo su multiplicación algebraica obtendríamos:

Se multiplica cada término de abajo por los dos de arriba

Se suman los términos resultantes

$$\begin{array}{ccccc} & & a & + & b \\ & \times & a & + & b \\ \hline & & ab & + & b^2 \\ a^2 & + & ab & & \\ \hline a^2 & + & 2ab & + & b^2 \end{array} \tag{2.2}$$

Igualando (2.1) y el resultado de (2.2) se obtendría esta identidad:

$$\boxed{\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}} \tag{2.3}$$

Con lo que en base a la ecuación (2.3) podríamos concluir que:

El CUADRADO DE LA SUMA de dos números es igual al cuadrado del primero mas el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo

El cuadrado de una diferencia:

El binomio

$$\mathbf{(a-b)^2} \tag{2.4}$$

es, por definición de potencia, el producto de $(a-b)\cdot(a-b)$.

Haciendo su multiplicación algebraica obtendríamos:

Se multiplica cada término de abajo por los dos de arriba

Se suman los términos resultantes

$$\begin{array}{ccccc} & & a & - & b \\ & \times & a & - & b \\ \hline & - & ab & + & b^2 \\ a^2 & - & ab & & \\ \hline a^2 & - & 2ab & + & b^2 \end{array} \tag{2.5}$$

Igualando (2.4) y el resultado de (2.5) se obtendría esta identidad:

$$\boxed{\mathbf{(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab}} \tag{2.6}$$

Con lo que en base a la ecuación (2.6) podríamos concluir que:

El CUADRADO DE LA DIFERENCIA de dos números es igual al cuadrado del primero mas el cuadrado del segundo menos el doble del primero por el segundo

El producto de una suma por una diferencia:

El producto

$$\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)} \tag{2.7}$$

representa la multiplicación del binomio suma por el binomio diferencia, teniendo en común ambos binomios la repetición de los términos **a** y **b**.

Haciendo su multiplicación algebraica obtendríamos:

Se multiplica cada término de abajo por los dos de arriba

Se suman los términos resultantes

$-ab$ y ab se anulan, por opuestos

$$\begin{array}{rrrrr} & & a & + & b \\ & \times & a & - & b \\ \hline & - & ab & - & b^2 \\ a^2 & + & ab & & \\ \hline a^2 & & & - & b^2 \end{array} \tag{2.8}$$

Igualando (2.7) y el resultado de (2.8) se obtendría esta identidad:

$$\boxed{\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}} \tag{2.9}$$

Con lo que en base a la ecuación (2.9) podríamos concluir que:

El PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA de dos números es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo

2.2.3. Algunos ejemplos prácticos

Aparentemente la teoría de las identidades notables parece fácil; sin embargo, su aplicación a ejercicios prácticos suele ser problemática para muchos alumnos. De antemano debes tener muy claro los siguientes conceptos:

- Reglas del cálculo de potencias
- Reglas de la suma de números enteros
- Reglas del producto de números enteros

Con estos conceptos bien claros y yendo paso a paso seguro que no se te resiste ninguna identidad notable.

Primer ejemplo: Cuadrado del binomio suma

Vamos a calcular el cuadrado de un binomio suma. En principio debes tener muy presente la conclusión o resumen de como se resuelve el ***cuadrado de una suma***; consúltalo cuantas veces creas necesario.

Sea el cuadrado del binomio $(x+3)^2$. Sigue los siguientes pasos:

- En primer lugar hay que identificar el primer término (x) y al segundo término (3).
- Después empezamos a aplicar la conclusión anteriormente descrita; pero sin prisas, dejándolo indicado con paréntesis y apartado por apartado:
    - Cuadrado del primero: $(x)^2 = x^2$
    - Cuadrado del segundo: $(3)^2 = 9$

- Doble (que quiere decir multiplicado por 2) del primero por el segundo: $2 \cdot (x) \cdot (3) = 6x$. Aquí tienes que multiplicar los coeficientes y las letras aunque en este caso sólo hay una letra

- Por último sólo nos queda ponerlo en forma de ecuación o identidad incluyendo los signos que se especifican en la ***conclusión***:

$$\boxed{(x+3)^2 = x^2 + 9 + 6x}$$

Veamos ahora otro ejemplo un poco más complicado. Sea el cuadrado del binomio $(3xy + y^3)^2$. No te asustes, se resuelve siguiendo los mismos pasos que antes:

- Es importante que identifique el primer término $(3xy)$; ahora tiene un coeficiente y dos letras; y el segundo término (x^3), que ojo, desde el principio vemos que está elevado al cubo.

- Aplicamos la regla paso a paso:

  - Cuadrado del primero:$(3xy)^2 = 3^2 \cdot x^2 \cdot y^2 = \boxed{9x^2y^2}$. Como verás el cuadrado afecta al número y a las dos letras, elevándolos respectivamente al cuadrado.
  - Cuadrado del segundo: $(x^3)^2 = \boxed{x^6}$. Por la regla del calculo de potencias se multiplican los exponentes.
  - Doble (2) del primero $(3xy)$ por el segundo (x^3):$\Rightarrow 2.(3xy).(x^3) = \boxed{6x^4y}$. Donde el 6 sale de multiplicar los coeficientes; $x^4 = x \cdot x^3$ y la y que está sola.

- Si ahora ponemos los tres apartados juntos con los signos correspondientes obtenemos la identidad:

$$\boxed{(3xy + x^3)^2 = 9x^2y^2 + x^6 + 6x^4y}$$

Segundo ejemplo: Cuadrado del binomio resta

Como en el ejemplo anterior ya hemos explicado pormenorizamente los pasos, vamos a obviar algunos detalles. No obstante, como en el ejemplo anterior ahora debes tener muy presente la conclusión o resumen de como se resuelve el ***cuadrado de una resta***; consultalo cuantas veces creas necesario.

Sea el cuadrado del binomio $(-5x^2 - 3y^4)^2$:

- El primer término sería $(-5x^2)$, como verás tiene una particularidad, y es que su coeficiente es negativo y eso debemos tenerlo en cuenta siempre que operemos con este término. Por otro lado, el segundo término sería $(3y^4)$, cuyo coeficiente sería positivo, pues el signo menos que tiene delante hace referencia a la resta del binomio.

- Aplicamos ahora la conclusión sobre el cuadrado de una resta:

  - Cuadrado del primero: $(-5x^2)^2 = (-5)^2 \cdot (x^2)^2 = \boxed{25x^4}$. Verás que el cuadrado de un número negativo es un número positivo, pues $(-) \times (-) = +$
  - Cuadrado del segundo: $(3y^4)^2 = (3)^2 \cdot (y^4)^2 = \boxed{9y^8}$
  - Doble (2) del primero $(-5x^2)$ por el segundo $(3y^4)$:$\Rightarrow 2 \cdot (-5x^2) \cdot 3y^4 = \boxed{-30x^2y^4}$. Verás que sale negativo porque $2 \cdot (-5) \cdot 3 = -30$.

- Si ahora ponemos los tres apartados juntos y aplicamos la conclusión sobre el cuadrado de una resta, obtendremos:

$$(-5x^2 - 3y^4)^2 = 25x^4 + 9y^8 - (-30x^2y^4)$$

  Y haciendo el opuesto del paréntesis tendríamos definitivamente:

$$\boxed{(-5x^2 - 3y^4)^2 = 25x^4 + 9y^8 + 30x^2y^4}$$

Tercer ejemplo: Producto de una suma por una diferencia

Sea el producto $(y^2 + 1) \cdot (y^2 - 1)$; si te fijas bien tenemos multiplicados dos binomios que en lo único que se diferencian es en el signo; por lo demás tienen en común el primer término (y^2) y el segundo término (1).

En este caso la conclusión que hay que aplicar es la del ***producto de una suma por una diferencia***; lo demás se hace como en los casos anteriores: paso a paso.

- Cuadrado del primero $(y^2)^2 = \boxed{y^2}$
- Cuadrado del segundo $(1)^2 = \boxed{1}$
- Con esto ya es suficiente, ahora ya lo podemos poner en forma de ecuación sin olvidarnos del signo menos correspondiente:

$$\boxed{(y^2 + 1) \cdot (y^2 - 1) = y^4 - 1}$$

A medida que vayas cogiendo confianza en la resolución de este tipo de ejercicios podrás ir saltándote pasos y llegarás a hacerlo directamente sin equivocarte.

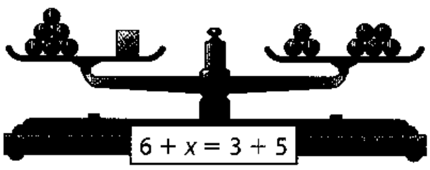
2.3. Ecuaciones Equivalentes

Dos ecuaciones son ***equivalentes*** si tienen las mismas soluciones. Una ecuación se transforma en otra equivalente:

- ***Sumando o Restando*** a sus dos miembros un mismo número
- ***Multiplicando o Dividiendo*** a sus dos miembros por el mismo número

2.3.1. Significado

Lo mejor es verlo con un dibujo:



Si te fijas la solución en las dos balanzas es la misma $x = 2$ por lo tanto las ecuaciones que representan SON EQUIVALENTES.

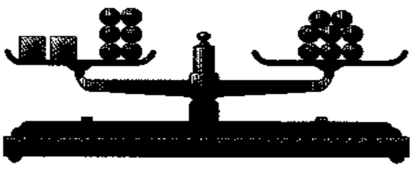
2.3.2. Transformación de una ecuación en otra equivalente

Regla de la suma o de la resta

Figura 2.1: Ecuación base

Como decíamos en el resumen, dada una ecuación cualquiera, como la del dibujo de arriba, yo puedo obtener otras equivalentes sólo con SUMAR O RESTAR a sus dos miembros el MISMO NÚMERO.

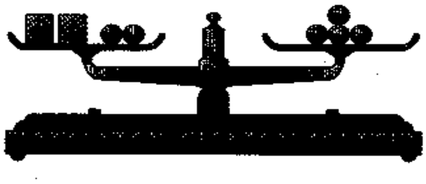
Descúbrelo tu mismo en estos dibujos:



Se añaden dos bolas a ambos platos; o lo que es lo mismo, se suman dos unidades a cada miembro

$$2x + 4 \boxed{+2} = 6 \boxed{+2}$$

$$\boxed{2x + 6 = 8}$$



Se quitan dos bolas a ambos platos; o lo que es lo mismo, se restan dos unidades a cada miembro

$$2x + 4 \boxed{-2} = 6 \boxed{-2}$$

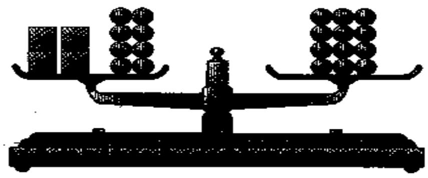
$$\boxed{2x + 2 = 4}$$

Comprueba que $x = 1$ es solución de las tres ecuaciones, por eso decimos que las tres son EQUIVALENTES y las hemos obtenido sumando o restando a los dos miembros de la ecuación base que venía en la figura 2.1

Regla del producto o del cociente

De la misma manera que se pueden obtener ecuaciones equivalentes sumando o restando, se pueden obtener MULTIPLICANDO O DIVIDIENDO a los dos miembros de una ecuación por el MISMO NÚMERO.

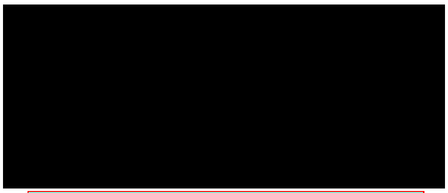
Seguimos partiendo de la ecuación de la figura 2.1, fíjate de nuevo en los dibujos y descubre el proceso



Se hace el doble en ambos platillos; o lo que es lo mismo, se multiplica cada miembro por dos

$$\boxed{2\cdot} 2x + \boxed{2\cdot} 4 = \boxed{2\cdot} 6$$

$$\boxed{4x + 8 = 12}$$



Se hace la mitad en ambos platillos; o lo que es lo mismo, se divide cada miembro por dos

$$\frac{2x}{\boxed{2}} + \frac{4}{\boxed{2}} = \frac{6}{\boxed{2}}$$

$$\boxed{x + 2 = 3}$$

Observa que tanto en el primer caso como en el segundo se multiplica o se divide cada uno de los términos de cada miembro por el número que hallamos elegido (en nuestro caso el 2).

En cualquier caso comprueba que ahora también ($x = 1$) es la solución de las dos nuevas ecuaciones; con lo que podríamos concluir que las ecuaciones obtenidas en las cuatro balanzas son todas equivalentes entre si y equivalentes a la de la figura 2.1, de la cual proceden.

2.3.3. Aplicaciones de las ecuaciones equivalentes en la resolución de ecuaciones

Teniendoen cuenta que , como se explica más adelante, resolver una ecuación consiste en ir obteniendo ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas hasta llegar a *despejar* totalmente la incógnita, las reglas anteriormente descritas nos serán de gran utilidad.

Regla de la suma o de la resta

Pongamos, por ejemplo las ecuaciones:

$$x + 4 = 5 \tag{2.10}$$
$$x - 3 = 7 \tag{2.11}$$

Si queremos obtener otras ecuaciones equivalentes a (2.10) y a (2.11), pero que tengan la x sola en el primer miembro, podremos hacer lo siguiente:

$x + 4 = 5$		$x - 3 = 7$	
$x \boxed{+4} - 4 = 5 - 4$	Resto 4 a los dos miembros	$x \boxed{-3} + 3 = 7 + 3$	Sumo 3 a los dos miembros
$x = 5 \boxed{-4}$	Los cuatros se anulan por opuestos	$x = 7 \boxed{+3}$	Los treses se anulan por opuestos

Si te fijas bien lo que hemos hecho es cambiar, o , como se dice en lenguaje matemático ***trasponer*** los términos que estaban en el primer miembro acompañando a la x ($\boxed{+4}$ y $\boxed{-3}$), al otro miembro; con una particularidad, *el signo CAMBIA al pasar al otro miembro*; ($\boxed{-4}$ y $\boxed{+3}$) y con lo que podemos llegar a la siguiente conclusión:

- ***Todo lo que está SUMANDO en un miembro pasa al otro miembro RESTANDO.***
- ***Todo lo que está RESTANDO en un miembro pasa al otro miembro SUMANDO.***

Regla del producto o el cociente

Vamos a hacer lo mismo que antes pero aplicando las reglas del producto y del cociente para obtener ecuaciones equivalentes. Sean las ecuaciones:

$$3 \cdot x = 5 \tag{2.12}$$
$$\frac{x}{7} = 5 \tag{2.13}$$

Buscamos de nuevo ecuaciones equivalentes a (2.12) y a (2.13), pero que tengan la x sola en el primer miembro:

$3 \cdot x = 5$		$\frac{x}{7} = 5$	
$\frac{\boxed{3} \cdot x}{3} = \frac{5}{3}$	Divido por tres a los dos miembros	$\frac{7 \cdot x}{\boxed{7}} = 7 \cdot 5$	Multiplico por siete ambos miembros
$x = \frac{5}{\boxed{3}}$	Pues, $\frac{3}{3} = 1$ y $1 \cdot x = x$	$x = \boxed{7 \cdot 5}$	Pues, $\frac{7}{7} = 1$ y $1 \cdot x = x$

Verás que aquí, los números que acompañan a la x en el primer miembro ($\boxed{\cdot 3}$ y $\boxed{\frac{}{7}}$) multiplicándola y dividiéndola respectivamente han pasado al otro miembro realizando la operación inversa ($\boxed{\cdot 7}$ y $\boxed{\frac{}{3}}$). Con lo que podríamos concluir que:

- ***Todo lo que está MULTIPLICANDO en un miembro pasa al otro miembro DIVIDIENDO.***
- ***Todo lo que está DIVIDIENDO en un miembro pasa al otro miembro MULTIPLICANDO.***

2.4. Resolución de Ecuaciones de Primer Grado

Resolver una ecuación de primer grado es hallar el valor de la ***incognita***, normalmente la letra x. Para ello hay que conseguir dejar a la x SÓLO y SOLA en uno de los dos miembros —generalmente en el primer miembro— y en el otro miembro un número que es el resultado o solución de la ecuación: A esto se le conoce como ***"despejar la x".***

2.4.1. Reglas básicas a tener en cuenta para resolver una ecuación.

En el apartado anterior y dentro de las aplicaciones de las ecuaciones equivalentes, deducíamos las siguientes reglas a tener presentes en la resolución de ecuaciones:

(a) Todo lo que esté SUMANDO en un miembro pasa al otro miembro RESTANDO.

Ejemplo: $x + 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 - 4$

(b) Todo lo que esté RESTANDO en un miembro pasa al otro miembro SUMANDO.

Ejemplo: $x - 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 7 + 3$

(c) Todo lo que esté MULTIPLICANDO en un miembro pasa al otro DIVIDIENDO.

Ejemplo: $3 \cdot x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$

(d) Todo lo que esté DIVIDIENDO en un miembro pasa al otro MULTIPLICANDO.

Ejemplo: $\frac{x}{7} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \cdot 7$

2.4.2. Pasos para despejar la incógnita de una ecuación:

PRIMER CASO.- Ecuaciones SIN PARÉNTESIS NI FRACCIONES:

Paso 1.- Pasar todos los términos que tengan x al primer miembro y todos los términos numéricos al segundo miembro.

Paso 2.- Reducir a un solo término (sumando, restando, etc) en cada miembro los términos que hay en los dos miembros.

Paso 3.- Si la x está sola, hemos terminado. Si le acompaña algún coeficiente aplicamos los principios (c) o (d) para dejarla sola.[1]

Ejemplo:

$$5x - 2 = 4 + 2x$$

Resolución

$$5x - 2x = 4 + 2$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

SEGUNDO CASO.- Ecuaciones CON PARÉNTESIS:

Paso 1.- Quitar los paréntesis. Para ello se aplica la propiedad DISTRIBUTIVA que consiste en multiplicar el número que está fuera del paréntesis por todos y cada uno de los términos que hay dentro del paréntesis.

[1] No olvidar simplificar, si el resultado es una fracción que se puede reducir; así como COMPROBAR la solución sustituyendo, en la ecuación original, la incognita por su valor, para ver si nos da lo mismo en los dos miembros.

Paso 2.- $\boxed{\text{EL RESTO DE LOS PASOS COINCIDEN CON EL PRIMERO, SEGUNDO Y TERCER PASO DEL CASO ANTERIOR.}}$

Ejemplo:

$$5 \cdot (4x+1) = 7 \cdot (3x-2)$$

Resolución

$$20x + 5 = 21x - 14$$
$$20x - 21x = -14 - 5$$
$$-x = -19$$
$$x = \tfrac{-19}{-1} = 19$$

TERCER CASO.- Ecuaciones CON FRACCIONES:

Paso 1.-

Quitar los denominadores. Para ello se calcula el MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR —o lo que es lo mismo, el m.c.m. de TODOS los denominadores[2]— y después se divide el m.c.m. entre los denominadores de TODOS Y CADA UNO DE LOS TÉRMINOS DE LOS DOS MIEMBROS, y el resultado de la división se múltiplica por los respectivos númeradores [3].

Paso 2.-

$\boxed{\text{EL RESTO DE LOS PASOS COINCIDEN CON LOS DE LOS DOS CASOS ANTERIORES.}}$

Ejemplo:

$$2x + \tfrac{1}{21} = \tfrac{2}{7} - \tfrac{x}{3}$$

Resolución: $m.c.m. = 21$

$$\tfrac{21 \cdot 2x \ + \ 1 \cdot 1}{21} = \tfrac{3 \cdot 2 \ - \ 7x}{21}$$

quitamos el 21

$$42x + 1 = 6 - 7x$$
$$42x + 7x = 6 - 1$$
$$49x = 5$$
$$x = \tfrac{5}{49}$$

[2] Los términos que no no tienen ningún denominador, es como si tuvieran denominador 1

[3] Ver ejemplos resueltos en el libro de texto páginas 95 y 96

2.5. Resolución Algebraica de Problemas

Todo lo aprendido sobre las expresiones algebraicas y las ecuaciones no valdría para nada si no tuviera una utilidad práctica. ***La resolución de problemas*** es la justificación de todos los procedimientos matemáticos tanto numéricos como algebraicos.

2.5.1. Consejos

Muchos problemas se pueden resolver mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones. Para la resolución de estos problemas es necesario que domines bien el paso del lenguaje ordinario al algebraico.

También es importante seguir unos pasos que explicaremos más adelante, pero, sobre todo, no desanimarse nunca e intentar hacer el mayor número de problemas; pues a medida que vayas cogiendo experiencia te resultará más fácil enfrentarte a cada nuevo problema. Por supuesto, debes tener muy presente todo lo relativo a la resolución de ecuaciones.

2.5.2. Procedimientos y ejemplos

Observa estas tablas y mecaniza tu el procedimiento para aplicarlo a nuevos problemas:

PROCEDIMIENTO	EJEMPLO
1. Lee cuidadosamente el enunciado hasta que lo comprendas y sepas explicarlo con tus propias palabras. Esto puede suponer el que tengas que leerlo unas cuantas veces.	*Si multiplicas un número por* 7 *y al resultado le sumas* 5*, obtienes* 33*. ¿De que número se trata?*
2. Anota todos los datos que nos da el problema, ***identificando el dato desconocido***, o incógnita de la ecuación, y asignándole ***una letra***	▪ *Llamamos* x *al número desconocido* ▪ *Multiplicamos por* 7 ▪ *Sumamos* 5 ▪ *Obtenemos* 33
3. Plantea una ecuación transformando el lenguaje ordinario del enunciado en una igualdad entre dos expresiones algebraicas.	*Siete por* x *más* 5 *es igual a* 3. $7x + 5 = 3$
4. Resuelve la ecuación utilizando los procedimientos estudiados.	$7x + 5 = 33$ $7x = 33 - 5$ $7x = 28$ $x = \frac{28}{7} = 4$
5. Comprueba que la solución de la ecuación es la solución del problema	*El número buscado es* 4 *porque* $7 \times 4 = 28$ *y* $28 + 5 = 33$

Como puedes observar, es importante que sigas un orden hasta que te vayas acostumbrando. Veamos un último ejemplo un poco más complicado:

PROCEDIMIENTO	EJEMPLO
1. Lee cuidadosamente el enunciado.	*Una mujer tiene 41 años y su hija 9 ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que la edad de la madre triplique la de su hija.*
2. Datos e incógnita	- *Llamamos x al tiempo que tiene que transcurrir* - *Edad de la madre: 41 años* - *Edad de la hija: 9 años* - *El TRIPLE la madre que la hija*
3. Plantea una ecuación.	*Cuando pasen x años las edades de la madre y la hija serán:* $41 + x \Rightarrow la\ madre$ $9 + x \Rightarrow la\ hija$ *Como la edad de la madre es triple que la de la hija, la igualdad será:* $41 + x = 3 \cdot (9 + x)$
4. Resuelve la ecuación	$41 + x = 3 \cdot (9 + x)$ $41 + x = 27 + 3x$ $x - 3x = 27 - 41$ $-2x = -14$ $x = \frac{-14}{-2} = 7$
5. Comprobación	*Tienen que transcurrir* 7 **años** *porque dentro de 7 años la edad de la madre es de* 48 *años y la de la hija* 16 *años, y se cumple que* $48 = 3 \times 16$

Capítulo 3

Hojas de problemas

3.1. Hoja de Problemas con Soluciones

Problema 1.- Resuelve y comprueba las ecuaciones de la siguiente tabla:

5x-8=2x+4	x=4
8+3x=x+12	x=2
x+3x-3=2x+7	x=5
7x-3x=x+9	x=3
3·(x+1)=2·(x+2)	x=1
5x-7=3·(x+3)	x=8
6·(1+x)=4·(x+2)	x=1
6·(1+x)=2x+18	x=3
x-1=$\frac{x}{2}$	x=2
$\frac{3x+2}{2}=\frac{x+10}{3}$	x=2
x+2=$\frac{x+20}{3}$	x=7
3·(x+1)=$\frac{5x+8}{2}$	x=2

Y ahora...¡vamos con los PROBLEMAS! Tienes que plantear previamente una ECUACIÓN.

Problema 2.- Si a un número le sumamos 18 nos da 97. ¿De qué número se trata? *(Solución=79)*

Problema 3.- Ayer salí de paseo y gasté 275 ptas. LLegué a mi casa con 350 ptas. ¿Con cuanto salí de paseo? *(Solución=625)*

Problema 4.- A una fiesta sólo han asistido la tercera parte de los invitados. En total asistieron 19 personas. Averigua el número de invitados. *(Solución=57)*

Problema 5.- Entre las edades de un padre y su hijo suman 41 años. Calcula la edad del hijo sabiendo que el padre tiene 34 años *(Solución=7)*

Problema 6.- Unos zapatos y un paraguas valen 3.000 ptas. Calcula el precio de cada artículo sabiendo que los zapatos valen el triple que el paraguas. *(Solución=2.250 y 750)*

Problema 7.- Fui con mi madre al cine y compramos dos entradas, una de infantil y otra de adulto. La de adulto costó el doble que la de infantil y en total pagaron 675 ptas. Averigua el precio de cada entrada. *(Solución=225 y 450)*

Problema 8.- De un saco de naranjas sacamos 8 y aún quedaron la tercera parte. ¿Cuantas naranjas había en el saco? *(Solución=12)*

3.2. Hoja de Problemas sin soluciones

Problema 1.- Copia y completa esta tabla:

Expresiones	Indeterminada	Términos
$4xy^2+3xy+7$		
$4y^2-3y+7$		
$4x\cdot(m^2+3n)+7$		
$4ab^2+3a\cdot(b+7)$		

Problema 2.- Copia y completa la siguiente tabla:

Expresiones algebraicas	Valores numéricos				
	m	n	p	Expresiones numéricas	V.N.
$3mn-3mp+3np$	1	0	1		
$(m+n+p)^2$	2	-4	3		
$(m-n)\cdot(m-p)$	7	5	4		
$(m^2+1)\cdot(n^2+1)\cdot^2$	1	1	$\sqrt{5}$		

Problema 3.- Utiliza la fórmula $e=vt$ (donde e, es el espacio; v, la velocidad, y t, el tiempo) para calcular:

a) El espacio recorrido en 3 horas por un ciclista que lleva una velocidad constante de $35\frac{Km}{h}$.
b) El espacio recorrido en 15 minutos por un atleta que corre a una velocidad constante de $200\frac{Km}{h}$.
c) El espacio recorrido en una hora y media por un caracol que se desplaza a una velocidad constante de $3\frac{m}{h}$.

Problema 4.- Resuelve las siguientes ecuaciones sin paréntesis ni denominadores:

i) $18+2x-8=x-25$
ii) $8x-6=x+8+6x$
iii) $4x-12+x=4x-1$
iv) $3x=-27$
v) $5x+4=20+2x$

Problema 5.- Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a) $2(x+3)-6(5+x)=3x+4$
b) $5(2-x)+3(x+6)=10-4(6+2x)$
c) $4\cdot(x-2)+1=5\cdot(x+1)-3\cdot x$
d) $3\cdot(x-3)=5\cdot(x-1)-6x$
e) $3\cdot(5\cdot x+9)-3\cdot(x-7)=11\cdot(x-2)+7$

Problema 6.- Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

i) $10x-\frac{95-10x}{2}=\frac{10x-55}{2}$
ii) $\frac{2x+3}{4}-\frac{143}{6}=\frac{9x-5}{8}-2x$
iii) $\frac{3x-7}{12}=\frac{2x-3}{6}-\frac{x-1}{8}$
iv) $\frac{5x+7}{2}-\frac{2x+4}{3}=\frac{x-5}{4}-1$
v) $\frac{5x-2}{3}-x-\frac{3x-1}{2}=\frac{3x+19}{2}-\frac{x+1}{6}+5$

Problema 7.- Un número más el doble del siguiente es 26 ¿Cuál es ese número?

Problema 8.- Halla tres números pares consecutivos cuya suma sea 24.

Problema 9.- Javier tiene 30 años menos que su padre y éste tiene cuatro veces los años de Javier. Averigua la edad de cada uno.

Problema 10.- En un corral hay conejos y gallinas; en total hay 61 cabezas y 196 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?

Problema 11.- Un agricultor vende $\frac{1}{3}$ de su cosecha de vino; después embotella $\frac{4}{7}$ de lo restante. Le queda 120 hl ¿Cuántos hectolitros de vino había cosechado?

Problema 12.- ¿Cuánto costó un libro, si un quinto, más un sexto, más un séptimo de su precio, menos 2 pesetas, suman la mitad de su precio?

Problema 13.- Los $\frac{2}{3}$ más los $\frac{2}{9}$ de un número valen 80 ¿Cuál es ese número?

Problema 14.- Jaime y su hermana van un sábado al cine y otro al circo; en total se gastan 2,050 pesetas ¿Cuánto cuesta cada entrada si la entrada del cine vale 75 pesetas menos que la del circo?

Problema 15.- En una fiesta de fin de curso hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Halla el número de hombres, mujeres y niños que hay en la fiesta si el total es de 156 personas.

Problema 16.- Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 272 m y que el largo es $\frac{5}{3}$ del ancho.

Problema 17.- Halla un número de dos cifras, tal que:

1) La cifra de las unidades es triple de la de las decenas.
2) Si se intercambian las dos cifras, el número aumenta en 54.

Capítulo 4

Controles

Departamento de Matemáticas
IES Carrillo Salcedo
Morón de la Frontera
Curso 2003–2004

Control de Ecuaciones de Primer Grado

Alumno/a ____ Grupo __________

Pregunta 1.- Completa esta tabla:

Igualdad	¿Es una ecuación?	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$2 + 5x = 3 - 4x$				
$(5-4)^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4$				
$5t + 5 = 3t + 2$				
$2x^2 + 2x - 3$				

Pregunta 2.- Distingue entre ecuaciones e identidades e indica el grado de las primeras:

Igualdad	¿Es ecuación?	¿Es identidad?	Grado
$2 + 3x = 3x + 2$			
$2 + 3x = 5 + 3x$			
$(x + 2x)^2 = 3x^2$			
$1 + 3x = -1$			
$x^2 + 1 = 1 + x \cdot x$			

Pregunta 3.- Utiliza las identidades notables para desarrollar o factorizar las expresiones siguientes:

$(a + 2b)^2 =$ __________________ $(2m + 3n) \cdot (2m - 3n) =$ __________________

$(2x - y)^2 =$ __________________ $p^2 + 9q^2 - 6pq =$ __________________

Pregunta 4.- Resuelve las siguientes ecuaciones sin paréntesis ni denominadores:

I) $18 + 2x - 8 = x - 25$

II) $8x - 6 = x + 8 + 6x$

III) $5x + 4 = 20 + 2x$

Pregunta 5.- Resuelve las ecuaciones (4.1) y (4.2) quitando primero los paréntesis:

$$2(x+3)-6(5+x)=3x+4 \tag{4.1}$$

$$4\cdot(x-2)+1=5\cdot(x+1)-3\cdot x \tag{4.2}$$

Pregunta 6.- Resuelve las ecuaciones (4.3) y (4.4) quitando primero los denominadores:

$$\frac{2x+3}{4}-\frac{143}{6}=\frac{9x-5}{8}-2x \tag{4.3}$$

$$\frac{5x+7}{2}-\frac{2x+4}{3}=\frac{x-5}{4}-1 \tag{4.4}$$

Pregunta 7.- Un número más el doble del siguiente es 26 ¿Cuál es ese número?

Pregunta 8.- Halla tres números pares consecutivos cuya suma sea 24.

Pregunta 9.- Javier tiene 30 años menos que su padre y éste tiene cuatro veces los años de Javier. Averigua la edad de cada uno.

Pregunta 10.- Los $\frac{2}{3}$ más los $\frac{2}{9}$ de un número valen 80 ¿Cuál es ese número?

Pregunta 11.- Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 272 m y que el largo es $\frac{5}{3}$ del ancho.