UNA INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA PLANA

Alejandro M. Caño

Ediciones IES S.A.

Índice general

Capítulo 1

Empezando con los Ángulos

1.1. Introducción

En esta unidad temática, vamos a realizar una serie de actividades al final de las cuales, llegarás a tener conocimientos sobre los elementos fundamentales de la Trigonometría[1] [?] , parte de las Matemáticas que, tal y como irás descubriendo a lo largo de las distintas actividades, trata de ángulos , lados de un triángulo y las distintas relaciones entre ellos.
En las distintas actividades recomendadas, mediremos la altura de uno de los edificios del Instituto, la de alguno de los árboles que nos rodean, la de algún monte cercano y algo más. Construiremos aparatos de medida de ángulos y haremos algún que otro boceto de alguna parte del Castillo de la Mota.

1.2. Ángulos

Iniciemos el camino utilizando la escuadra, el cartabón y el transportador de ángulos que todos poseéis y que más adelante manejaremos de forma casi abusiva.
Denominamos ángulo a la porción del plano delimitado por dos semirectas que se cortan en un punto que se llama vértice.
Exiten distintas medidas de ángulos que recordaremos:[?]

- **Grado Centesimal** Cada unidad en que se divide la circunferencia sabiendo que toda ella mide 400^g. Por tanto, media circunferencia medirá 200^g (medida utilizada en los paises anglosajones.
- **Grado Sexagesimal** Cada unidad en que se divide la circunferencia sabiendo que toda ella mide 360^o. Por tanto, media circunferencia medirá 180^o (medida utilizada en España y que seguro que conocéis).
- **Radianes** Un radian es el ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia que lo define. Como sabéis, la circunferencia mide de longitud $2\Pi r$, es decir, 2Π radios, o lo que es igual 2Π radianes. Por tanto,media circunferencia mide Π radianes. El ángulo recto $\frac{\Pi}{2}$ radianes y así sucesivamente. Esta medida es muy utilizada en circulos científicos.

Para pasar de una medida a otra, basta con establecer la proporción adecuadada

$$\frac{\Pi}{180^o} = \frac{rad}{x} \qquad\qquad \frac{200^g}{180^o} = \frac{x}{n^o}$$

[1] del griego, medida de triangulos

Ejemplo: Pasar de grados sexagesimales a radianes y a grados centesimales en la siguiente tabla:

Rad	0			$\frac{\Pi}{6}$			$\frac{\Pi}{3}$						$\frac{7\Pi}{6}$	2Π
G.S.		10	20		40			70	80			270		
G.C.						50				10	150			

1.3. Construyamos el Clinómetro

Vamos a medir ángulos en el exterior, pero como no poseemos grandes Teodolítos [2] (ni pequeños), nos vamos a construir un instrumento que nos servirá para medir ángulos y que se llama **Clinómetro** . De su buena construcción dependen nuestras medidas y cálculos posteriores. Además, todas las actividades deberán de hacerse en grupo, por lo tanto será muy interesante acostumbrarse a repartir el trabajo, ser solidario, convivir, etc.
Los paso a seguir para construirlo son:

- Necesitamos semicírculo, regla, peso, 2 tablas de madera de 1m., cuerda, cinta adhesiva y tornillo y tuerca.
- Uniremos con la cinta adhesiva, el semicírculo y la regla.
- Ataremos la cuerda en la mitad del semicírculo, con el peso en el otro extremo.
- Uniremos esta a las dos tablas de madera mediante el tornillo y la tuerca.(Debe de poder girar)

Quedará el aparatito aproximadamente de la siguiente forma:

1. ¿Cómo podríamos utilizar el Clinómetro para medir el ángulo de inclinación desde tu mesa a la esquina del techo de la clase?Haz un esquema gráfico del método más idóneo.

[2] Instrumento utilizado por los Ingenieros para medir ángulos y distancias

Capítulo 2

Continuación

2.1. Empecemos con las proporciones de la TRIGONOMETRÍA

2. Busca extensa información sobre la palabra Trigonometría.

Trasladaremos toda la información recopilada en el campo y resolveremos distintos problemas utilizando la representación a escala. Considera de esta forma el croquis que hemos efectuado anteriormente donde la letra griega α representa el ángulo, s la longitud de la sombra y h la altura del árbol que todos sabemos que es lo que necesitamos calcular.

3. Si tomamos como s=4 cm. y dibujando el ángulo medido con el transportador de ángulos,¿cuánto mide h?. Habrás observado que has dibujado un triángulo semejante al que necesitas resolver ¿Por qué?

4. Con los datos de s=8 cm. ¿cuánto mide h?. ¿Y si s=2?

5. Completa la tabla siguiente:

s	h	h/s
2 cm		
4 cm		
8 cm		
100 cm		
15 cm		
		15 cm

¿ A qué conclusión llegas?

6. ¿Cuánto mide el ángulo del patio?

7. Repite todas las actividades para calcular la altura del Instituto.
Habrás comprobado en todos los casos que el cociente entre el cateto opuesto al ángulo (b) y el cateto contiguo al ángulo (c) no varía si mantenemos el ángulo, pero sí varía al cambiar el ángulo. Luego la proporción b/c es un valor numérico asociado al ángulo que llamaremos **TANGENTE DEL ÁNGULO.**
En al anterior triángulo rectángulo la tangente de α es b/c.
Lo escribiremos así:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{b}{c}$$

8. Mide en el triángulo adjunto los catetos y calcula $\mathrm{tg}(\alpha)$.

9. ¿Podrías encontrar un método para calcular la tangente de cualquier ángulo? Descríbelo y calcula la tangente de 45º y 60º.

10. Dibujar un ángulo cuya tangente sea 3/5.

11. Dibuja los ángulos cuya tangente es:

    a) $2/3$
    b) $0'5$
    c) $0'78$
    d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Recoge los datos del monte y las dos visuales en el croquis que habrás hecho como el siguiente:

    Reflexiona sobre las siguientes cuestiones:

    a) ¿Cuántos triángulos rectángulos aparecen?
    b) ¿Que dato necesitas para poder conocer la altitud del monte?
    c) Llamando x a la distancia del punto B al pie del monte.¿Qué relaciones puedes establecer?
    d) Resuelve el sistema de ecuaciones resultante y hallarás la altitud del monte.¿Cuál es la altitud total?

13. Construir una tabla con las tangentes de los ángulos de 0º a 90º es muy fácil:

    a) Dibuja un cuarto de circunferencia de radio 10 cm. y, en el sentido contrario a las agujas del reloj, señala los ángulo de 0º a 45º.
    b) Traza la recta perpendicular al eje OX en el punto de corte de la circunferencia, y únelo con la recta que me determina un ángulo determinado.
    c) Así tengo construido un triángulo rectángulo, donde es fácil calcular la tangente del ángulo agudo.
    d) ¿Existe alguna relación entre los ángulo agudos de un triángulo rectángulo? Coméntala.
    e) ¿Qué relación existe entre la $tg(\alpha)$ y la $tg(\beta)$? Fíjate en el triángulo adjunto
    f) Teniendo en cuenta esta relación, calcula la tangente de 50º, 75º,y 80º.
    g) Completa la tabla, ampliándola de 45º a 90º.

    Hemos encontrado una relación importantísima entre ángulos complementarios (suman 90º) que habrá sido la siguiente:

    $$tg(90^o - \alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$$

    Se llama **COTANGENTE DE UN ÁNGULO** al número inverso de la tangente de dicho ángulo, es decir:

    $$cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$$

    Luego:

    $$cotg(\alpha) = \frac{cateto \quad contiguo}{cateto \quad opuesto} = \frac{c}{b}$$

    o bien: $cotg(\alpha) = tg(\beta)$, siendo α y β complementarios.

14. Completa la tabla con las cotangentes de los ángulos de 0º a 90º.

2.2. Más proporciones: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Ya hemos definido dos proporciones asociadas a un ángulo, la tangente y la cotangente. A partir de ahora, conoceremos más, todas ellas constituyen las llamadas razones trigonométricas, además surgen a partir del triángulo rectángulo. b Considera el siguiente triángulo:

15. Si consideramos el ángulo $\alpha = 30^o$ y $a = 5$ cm. Dibuja el triángulo y calcula el valor de b.

16. Completa la siguiente tabla:

a	b	b/a
5 cm		
10 cm		
		30 cm

Análogamente a lo que ocurría con la tangente, el cociente entre los cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo es constante para cada ángulo. Así pues, se llama **SENO DE UN ÁNGULO** al cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa; y **COSENO DE UN ÁNGULO** al cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa, es decir:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad \cos(\alpha) = \frac{cateto \quad contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

17. Indica un método para calcular la pendiente de una carretera conociendo el ángulo de inclinación y la longitud.

18. Amplia la tabla de las razones trigonométricas de los ángulos entre 0^o y 45^o.

19. Del triángulo anterior, calcula $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\operatorname{sen}(\beta)$, $\cos(\alpha)$ y $\cos(\beta)$. ¿Hay alguna relación entre ellos? Enuncia pues, una relación si tenemos ángulos complementarios.

20. Utiliza dicha relación para completar la tabla hasta los 90^o.

21. Seguramente la relación a la que has llegado ha sido: $\operatorname{sen}(90^o - \alpha) = \cos(\alpha)$ y viceversa.

22. Dibujar en cada caso el ángulo que verifique:

    a) $\cos(x) = 1/3$
    b) $\operatorname{sen}(x) = 2/5$
    c) $\cos(x) = 0'3$
    d) $\operatorname{sen}(x) = 0'2$
    e) $\cos(x) = 0'652$
    f) $\operatorname{sen}(x) = 0'215$

23. Un ala delta se deja planear desde 100 m. de altura con un ángulo de planeo de 30^o.¿A que distancia del punto de lanzamiento (en horizontal) tocará tierra?¿Qué distancia habrá recorrido en el vuelo? NOTA.- El ángulo de planeo es el que forman la dirección de planeo y el horizonte.

Existen otras dos razones trigonométricas que son la **SECANTE DE UN ÁNGULO** que es la inversa del coseno y la **COSECANTE DE UN ÁNGULO** que es la inversa del seno.

24. Haz un comentario sobre estas razones.

...

Capítulo 3

Relación de Ejercicios

1. Calcula $\sin 20^o$. Compáralo con lo ya calculado. ¿Hay alguna diferencia?¿A qué crees que se debe?
2. Análogamente, calcula $\cos 45^o, \mathrm{sen}\, 30^o, \mathrm{tg}\, 70^o, \mathrm{cotg}\, 15^o, \cos 50^o, \mathrm{sen}\, 55^o$
3. Comprueba si se verifica el Teorema Fundamental de la Trigonometría para el ángulo de 50^o. ¿Adviertes alguna diferencia?¿A qué crees que se debe?
4. El ángulo de elevación del Sol es de 45^o.¿Cuál es la altura de un edificio que en ese instante proyecta una sombra de 50 metros?
5. Determina la superfície de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 9 cm. de radio.
6. Calcula el área de un decágono regular de 6 cm. de lado.