Algunos tipos de límites de funciones.

2nd November 2004

....

1. Funciones racionales.

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+6x+3}{5x^3+15x^2+15x+5} \qquad \lim_{x\to 3}\left(\frac{2x+5}{x-3}-\frac{x}{x^2-9}\right)$$
$$\lim_{x\to -a}\frac{x^5+a^5}{x^4-a^4} \qquad \lim_{x\to -2}\frac{2x^3+9x^2+12x+4}{3x^3+11x^2+8x-4}$$

2. Funciones irracionales.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x+2}-2} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}+5x}{25x+6\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{\frac{x}{3}}-1}{x^2-6x+9} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+7}-3} \tag{1}$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt[3]{2x}-2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{2-\sqrt[3]{x+7}} \tag{2}$$

3. Algunos ejemplos de funciones racionales con parámetros.

3.1. Halla el valor que ha de tomar m para que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2-x+4}{3x^3+mx^2+2x-2}=-\frac{3}{7}$$

3.2. Determina el valor de k para que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+4x-8}{-2x^3+kx^2-6x}=3$$

3.3. Calcula a y b, números reales, de manera que se cumpla:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+2x-4}{x^2+ax-b}=\frac{6}{5}$$

4. Algunas funciones racionales con valores absolutos.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x-10+|x-5|}{|x^2-6x+5|}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4+|x+2|}{x+2+|x+2|}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2-|x-1|}{3(x-1)+|x-1|}$$

5. Funciones exponenciales.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\exp(x-1)}{1-\exp(x-1)} \qquad \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}} \qquad \lim_{x\to 3} \left(\frac{2x+2}{x+5}\right)^{\frac{x-1}{|x-3|}}$$

$$\lim_{x\to -\propto} \left(\frac{2x+5}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-1}{2x}} \qquad \lim_{x\to \pm\propto} \frac{5^x-3^{x+1}}{5^{x-1}+3^x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}-1}$$

6. Funciones logarítmicas.

$$\lim_{x\to +\propto} \frac{2x^2-1}{x+1}\cdot\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)-\ln(2x-3)}{x^3-8}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{\ln(x^2-8)}$$

7. Funciones trigonométricas.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin\sqrt{x-4}}{x^2-5x+4} \qquad \lim_{x\to 2} \tan\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\right) \qquad \lim_{x\to 0} (1+2\sin x)^{\frac{1}{x\sin x}}$$

8. Algunos ejercicios sobre continuidad de funciones.

8.1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} f(x)=x^2-5|x|+4 \quad ; & g(x)=\frac{1}{|x^2-5x+6|}; & h(x)=\frac{1}{x\ln x} \\ i(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}; & j(x)=x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{x}\right); & l(x)=\frac{x+2}{|x|-2} \end{array} \qquad (3)$$

8.2. Halla m para que la función f sea continua en R:

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x+m-1}{x^2+m} & si \quad x \leq -1 \\ x^2 - mx - 3 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

8.3. Determina m, número real, para que la función siguiente sean continua en todo R:

$$f(x) = \begin{cases} e^{mx} & si \quad x <= 1 \\ \frac{2x^2+(m-1)x-m}{x+2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

8.4. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \ln \frac{-x}{(x-2)\cdot(x-5)}$$

8.5. Halla el valor de a para que la función f sea continua en a:

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} |3-x| & si \quad x > a \\ x+4 & si \quad x <= a \end{cases}$$

8.6. Dada la función f, definida por $f(x) = \frac{x^2-x}{\sin(\pi x)}$, determina:

8.6.1. Su dominio.

8.6.2. Definir $f(0)$ y $f(1)$ de modo que f sea continua en el intervalo $[0,1]$.

8.7. Hallar a y b de modo que la función f sea continua en todo R:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) + a & si \quad x <= -1 \\ ax + b & si \quad -1 < x <= 0 \\ x^2 + 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

9. Breve descripción de los ejemplos propuestos.

9.1. En la sección1 se trabaja básicamente con la descomposición factorial de un polinomio para resolver las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ e $\propto - \propto$.

9.2. En la sección 2 aparecen casos del tipo $\frac{0}{0}$ y del tipo $\frac{\propto}{\propto}$, que se resuelven, bien mediante la identidad notable

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

bien mediante la identidad

$$\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)\cdot(a-b) = a^3 - b^3$$

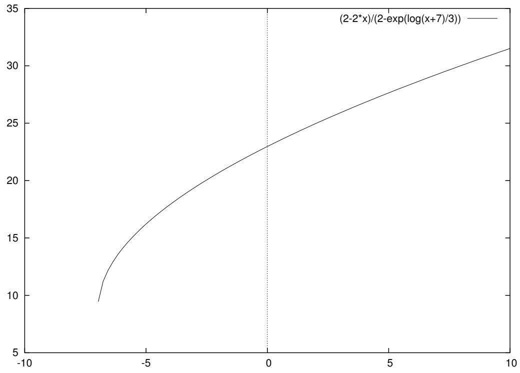


Figure 2: Raices2

También es posible realizar un cambio de variable o sustitución que racionalice la función y permita resolver el problema como en la sección 1. Así, por ejemplo, en el caso $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{\frac{x}{3}}-1}{x^2-6x+9}$**, mediante el cambio** $\frac{x}{3}=t^2$**, y en el caso de** $\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{2-\sqrt[3]{x+7}}$**, mediante la sustitución** $x+7=t^3$**. Para los dos ejemplos citados podemos apollarnos en los gráficos de las funciones en un entorno del punto donde se calcula el límite:**

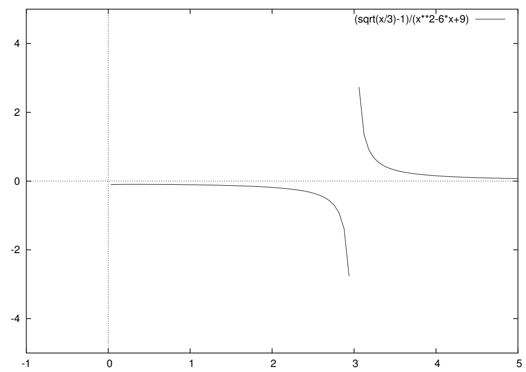
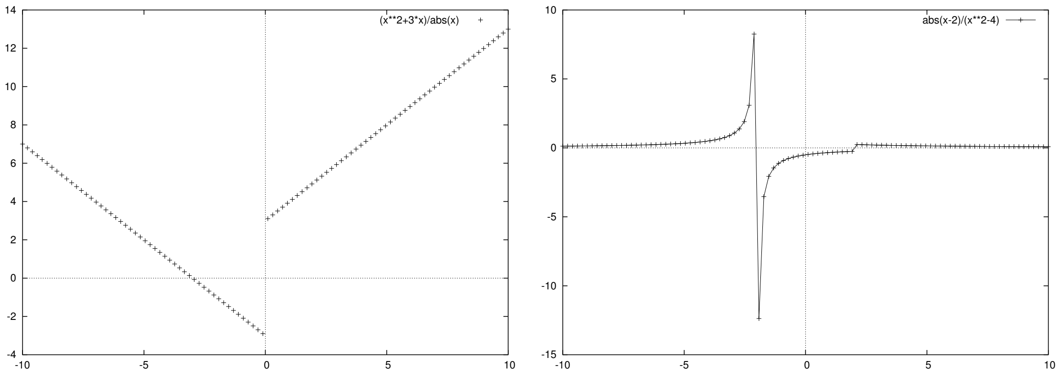


Figure 1: Raices1

9.3. En la sección 4 se trabaja con los mismos tipos de indeterminaciones pero, además, se incluye la función valor absoluto que trabaja de la forma:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x >= 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

; las gráficas de dos de esas funciones son las que se exponen a continuación:



(a) Absoluto1 (b) Absoluto2

Figure 3: Valor Absoluto

9.4. En la sección 6 se aborda la indeterminación $0 \cdot \propto$, con ayuda del número e que sabemos es el utilizado en la resolución de las indeterminaciones de la forma $1^{\propto}$expresada como a continuación se indica:

$$\lim_{f(x)\to\propto}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

además de necesitar las propiedades de la función logarítmica

$$\begin{aligned} \ln a + \ln b &= \ln(a.b) \\ \ln a - \ln b &= \ln \tfrac{a}{b} \\ k \cdot \ln m &= \ln m^k \end{aligned}$$

se incluye a continuación la gráfica de una de las funciones:

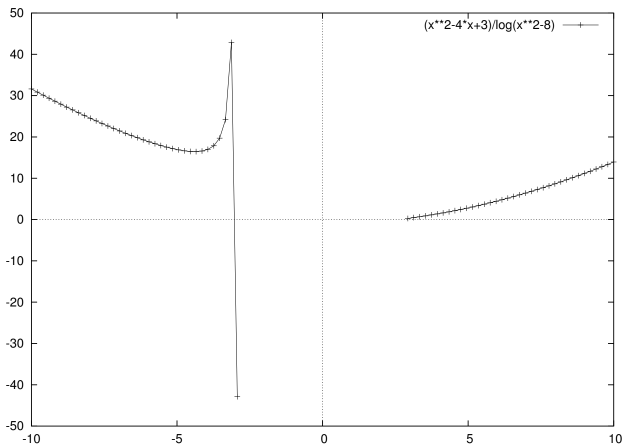
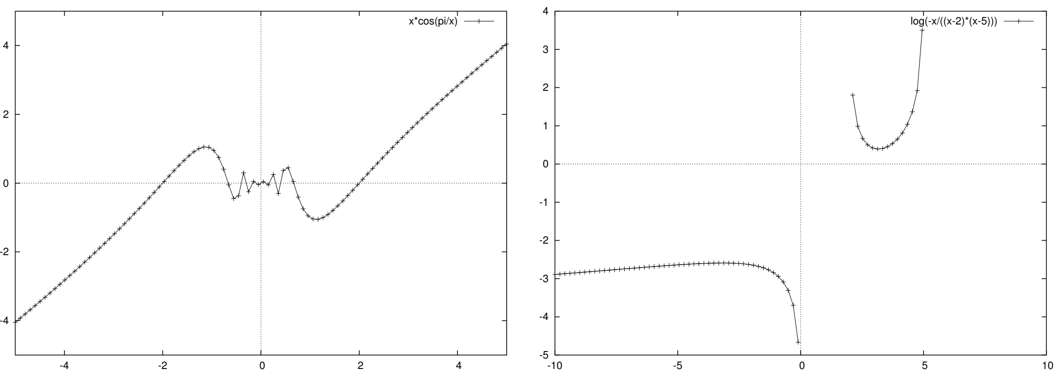


Figure 4: Función logarítmica

9.5. Exponemos a continuación la gráfica de una función trigonométrica de las incluídas en la sección 6, y la gráfica de la función contenida en la subsesión 4:



(a) Funcion trigonometrica

(b) Funcion Logaritmica

Figure 5: Función trigonométrica y Función logarítmica