



PROBLEMAS DE OLIMPIADA MATEMÁTICA



2018



SAEM THALES

Problemas de la Olimpiada Matemática THALES 2018

AUTORES

Carmen María Aguilera Sillero

Dolores Ariza Cabrera

Francisco Miguel González Ternero

Francisco Haro Laguardia

Sagrario Panadero Ruiz

Inmaculada Romano Paguillo

Javier Ruiz Gómez

Alejandro Sáez Martínez

Jose Ignacio Tijeras Uclés

EDITA:

SOCIEDAD ANDALULA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

c/ Tarfia s/n. (Facultad de Matemáticas)

41012 Sevilla

Correo electrónico: thales@cica.es thales.matematicas@uca.es

Página web: <http://thales.cica.es>

ISBN: 978-84-15641-01-8

Sevilla (España), 2020

Se autoriza la reproducción por fotocopia de una parte reducida de este material si se hace con fines educativos y no comerciales. Debe obtenerse permiso de reproducción parcial cuando se haga un uso comercial, publicitario o de reproducción remunerada.

ÍNDICE

1. PRÓLOGO	6
2. METODOLOGÍA.....	9
3. CONTEXTUALIZACIÓN	10
4. SUGERENCIAS DIDÁCTICAS DE LOS PROBLEMAS.....	13
5. RELACIÓN ENTRE LOS ESTÁNDARES Y COMPETENCIAS CLAVE Y LOS PROBLEMAS PROPUESTOS.	15
6. ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS	26
▪ PROBLEMA Nº 1	26
▪ PROBLEMA Nº 2	26
▪ PROBLEMA Nº 3	27
▪ PROBLEMA Nº 4	28
▪ PROBLEMA Nº 5	28
▪ PROBLEMA Nº 6	29
▪ PROBLEMA Nº 7	29
▪ PROBLEMA Nº 8	30
▪ PROBLEMA Nº 9	30
▪ PROBLEMA Nº 10.....	31
▪ PROBLEMA Nº 11	31
▪ PROBLEMA Nº 12	32
▪ PROBLEMA Nº 13	33
▪ PROBLEMA Nº 14	33
▪ PROBLEMA Nº 15	33
▪ PROBLEMA Nº 16	33
▪ PROBLEMA Nº 17	34
▪ PROBLEMA Nº 18	34
▪ PROBLEMA Nº 19	35
▪ PROBLEMA Nº 20	37
7. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS	38
▪ PROBLEMA Nº 1	38
▪ PROBLEMA Nº 2	39
▪ PROBLEMA Nº 3	40

▪ PROBLEMA Nº 4	43
▪ PROBLEMA Nº 5	46
▪ PROBLEMA Nº 6	47
▪ PROBLEMA Nº 7	52
▪ PROBLEMA Nº 8	54
▪ PROBLEMA Nº 9	57
▪ PROBLEMA Nº 10	60
▪ PROBLEMA Nº 11	63
▪ PROBLEMA Nº 12	65
▪ PROBLEMA Nº 13	67
▪ PROBLEMA Nº 14	69
▪ PROBLEMA Nº 15	70
▪ PROBLEMA Nº 16	73
▪ PROBLEMA Nº 17	74
▪ PROBLEMA Nº 18	75
▪ PROBLEMA Nº 19	78
▪ PROBLEMA Nº 20	88

1. Prólogo

La Resolución de Problemas es el corazón del aprendizaje de las matemáticas. Pueden proporcionar esa motivación inicial tan necesaria para que el alumnado se interese por el trabajo que han de hacer. El deseo de descubrir, de inquirir, preguntarse por la razón de las cosas, está en el fondo de la inteligencia de todas las personas. El deseo de saber, de resolver retos, de responder a las dificultades ha sido uno de los acicates históricos para el desarrollo de la Humanidad; sin él la Humanidad no habría llegado a las cotas de evolución que tiene actualmente.

No hay nada más que ver cómo toda la prensa escrita y los programas de radio y TV tienen páginas de entretenimiento con retos que siguen con interés muchas personas. Muchas editoriales, que no hay duda de que antes de lanzar un producto al mercado analizan su rentabilidad, se dedican últimamente a poner en el mercado libros de problemas y acertijos.

Puede ocurrir que a ciertos niveles de desarrollo matemático sean muy útiles los desarrollos axiomático-deductivos de las teorías, como hizo Euclides en el siglo III a.C., o Bourbaki, en los mediados del siglo XX, incluso las teorías que se presentan así, se desarrollaron a partir de problemas concretos, como la teoría de grafos que inicia Euler en el siglo XVIII para resolver el problema de los puentes de Königsberg; incluso teorías aparentemente muy formales tienen su origen en un problema. Por ejemplo, la derivada en un punto (definida como el límite...) es una solución al problema de cómo medir la intensidad del cambio en cada punto de una curva o de una función.

Desde el punto de vista didáctico una de las dificultades permanentes es hallar un modo de motivar al alumnado en el estudio de cada una de las partes que figuran en los currículos. Desde el enfoque que preconizamos es encontrar un problema seminal que nos sirva para abordar ese contenido, y sobre todo que le sirva al alumnado, que le sea motivante.

El planteamiento de los problemas es uno de los puntos fundamentales. Hay que introducir al alumnado en el contexto donde vamos a plantear el problema. Eso es algo que no hemos podido incluir en esta colección, porque es el profesorado quien conoce a sus alumnos, sus vivencias y emociones, y podrá decidir cuál es el mejor

planteamiento de la situación ambiental: un video, una búsqueda en las redes, una historia contada (o un cuento si son más pequeños), una lectura previa, un juego de tablero o de cartas, una manipulación de piezas, un puzle, etc. La forma de creación de situaciones de aprendizaje es tan diversa como lo son los propios alumnos y alumnas.

Pero hay también una cuestión importante en el desarrollo de un curso de matemáticas: las conexiones entre sus diversas partes, de modo que un problema geométrico, por ejemplo, (de grafos, o de probabilidades) pueda llevar a necesitar un planteamiento algebraico (con matrices o ecuaciones) o numérico para su completa solución. Y viceversa.

Ya sabemos que en el desarrollo de un currículo de matemáticas tiene que haber también otro tipo de ejercicios, actividades o problemas: de consolidación, de rutina, etc., que tienen otros objetivos necesarios en el desarrollo curricular. Pero éstos que presentamos quieren poner el acento en los aspectos heurísticos de la investigación en matemáticas, en el sentido que ya puso de manifiesto Pölya, y sobre todo Schoenfeld a finales de los años 70 del pasado siglo, y que luego se han tomado como referentes para las pruebas PISA.

Otra cuestión de referencia para esta colección de problemas es la edad del alumnado a los que va dirigida. Hay que decir que los problemas no tienen edad biológica de planteamiento sino nivel de desarrollo matemático, y éste tampoco se corresponde con el nivel académico del curso en que están los alumnos y alumnas. No olvidemos que todos estos tipos de niveles tienen una distribución en curva de Gauss alrededor de la media que es la que nos sirve de referencia, pero que no sirve para la situación de aprendizaje de cada alumno o alumna, que es individual.

Pero hay además otra característica de los problemas que es necesario considerar aquí: cuando se hace un planteamiento inicial de un problema, lleva una cierta profundidad tanto cognitiva como de tareas, pero que se pueden ir profundizando las dificultades añadiendo (o simplificando) alguna de sus condiciones iniciales, lo que además le puede permitir al profesorado tener una ayuda para que el alumnado de más altas capacidades trabaje la misma situación a distintos niveles de profundidad y no se aburra al resolver muy pronto los niveles más sencillos.

En cuanto a las soluciones que se proponen, no es más que una forma de resolverlos, pero habrá muchas otras, y en el planteamiento al alumnado nos encontramos con frecuencia que este obtiene soluciones que ni se nos había ocurrido al profesorado que pudieran hacerse así. En ello está la riqueza del aprendizaje, y todas ellas deben ser motivo de discusión en una clase.

Por eso, aunque los problemas que aparecen aquí estuvieron inicialmente propuestos para 2º ESO, pueden utilizarse en el nivel que el profesorado estime conveniente. Los problemas que aparezcan en esta colección han sido diseñados por el equipo de profesores y profesoras que elaboran las pruebas de la Olimpiada Matemática para el alumnado de 2º de ESO (anteriormente 8º de EGB) de la Comunidad Autónoma de Andalucía durante los últimos 34 años; a los cuales le enviamos nuestro agradecimiento por su generosidad para que pudieran aparecer en esta colección.

Colección que por otro lado pretende ser sólo el comienzo que nos permita ir mejorando no solo cada uno de los problemas seleccionados, sino añadir otros muchos hasta llegar a tener para todo el profesorado de matemáticas de Andalucía una auténtica colección de recursos para la clase.

Salvador Guerrero Hidalgo

2. Metodología

Pretendemos contextualizar la situación actual y dotar al profesorado de nuevos recursos metodológicos de rápida aplicación para las necesidades concretas y únicas tanto de su clase en general y de sus estudiantes en particular.

Dispondremos de una serie de recursos lingüísticos con algunas consideraciones sobre el papel de la lingüística aplicada, con puntualizaciones sobre PNL (Programación Neuro-lingüística), de la lingüística cognitiva y la psicología del aprendizaje.

Tendremos una colección de 20 problemas de Olimpiadas Matemáticas. Aportaremos algunas particularidades matemáticas de los problemas de los cuales dispondréis de la solución: repaso, refuerzo, motivación, dinámicas de grupo etc.

La elección del tipo de marco donde utilizar los problemas solo puede ser seleccionada por el personal docente de acuerdo con la realidad de su clase y de su alumnado.

No existe una metodología exacta que permita una aplicación sistemática y que a la vez garantice el éxito de la misma por las increíbles diferencias colectivas e individuales a las que se enfrenta el profesorado, además de la elevada ratio que frecuentemente se tiene en la clase.

La importancia de descontextualizar el temario de la habilidad de resolución de problemas para garantizar un aprendizaje en la habilidad y no en una mera repetición.

3. Contextualización

Vivimos tiempos de disrupción tecnológica como profesional. La formación continua es una realidad, y nuestra capacidad de adaptabilidad puesta a prueba constantemente.

El objetivo principal del aprendizaje es dotar de flexibilidad al individuo rígido y estereotipado frente a un entorno cambiante. Es irónico ver como el método actual del aprendizaje es en apariencia opuesto a su fin, dígase el obtener flexibilidad, adaptabilidad, recursos internos, y a la vez justificada como veremos a continuación.

“La ironía es el resultado de estar atrapado entre dos visiones del mundo, una agonizante y la otra luchando por nacer” (Soren Kierkegaard).

Por un lado vivimos una etapa de muy fácil acceso a ingentes cantidades de información y de directa aplicación, siendo los temarios de secundaria en oposición eminentemente teóricos. Justificado porque las enseñanzas de psicología del aprendizaje afirman fuertemente la idoneidad de un aprendizaje basado en la consecución palpable de objetivos.

No hacer partícipe al estudiante de la selección de los objetivos, es un paradigma en proceso de extinción, en el peor de los casos produce en los estudiantes grandes dosis de desmotivación, frustración, alienación y por supuesto fracaso. En el mejor de los casos como dice Carlos Usón Villalba “alumnos serviles, sumisos, acostumbrados a repetir lo que la autoridad ha pontificado previamente”.

Es nuestra obligación prestar atención a cualquier disciplina que pueda aportar un papel nuevo y novedoso en el desarrollo de metodologías, destacando la Lingüística Aplicada apoyándonos en su reciente formalización científica en lo teórico, e incipiente en lo práctico, reconociendo en general que las Matemáticas son un lenguaje.

A modo de sugerencia, realizar investigaciones conjuntas con entidades como AESLA (Asociación Española de Lingüística Aplicada) y AELCO (Asociación Española de Lingüística Cognitiva) puede abrir un paradigma metodológico nuevo. Es de vital importancia desarrollar desde pequeño el léxico matemático para mejorar las

habilidades cognitivas de los estudiantes y acelerar en lo más posible los procesos de demostración matemática tanto en su versión deductiva como inductiva.

Saber definir, teoremas, demostraciones, hipótesis, suposiciones, aritmética, geometría, etc... va dotando al estudiante de una comprensión de las reglas del juego matemático de las cuales muchos carecen, aunque sepan resolver con acierto la mayoría de las cuestiones que les plantee el temario.

Para dotar a nuestros estudiantes de amor propio, confianza, criterio, independencia, iniciativa para explorar lo desconocido, tenemos que aprender a ser menos dirigentes y más dirigidos, evitando sentimientos inútiles como lo son la frustración, la culpabilidad o la preocupación y poder transformarlo en motivación, pasión y curiosidad.

Como herramienta para este propósito destacar el papel simple, sencillo y de rapidísima aplicación que tiene la PNL. La PNL se basa en el estudio de patrones del lenguaje y sirven para entender y modificar las creencias propias y las de los demás, cambiando el foco de atención general o marco.

Muchos estudiantes frustrados o desmotivados se encuentran en un “Marco Problema”, en un “Marco Imposibilidad”, o en un “Marco Fracaso”. La PNL dota al docente de herramientas para transformar un “Marco Problema” en un “Marco Objetivo”, un “Marco Imposibilidad” a un “Marco como si ya fuera realidad” y un “Marco Fracaso” en un “Marco Enseñanza” a través de sencillas preguntas que se realizan al estudiante examinando las creencias que podrían llegar a tener los estudiantes, nuestra misión como docentes es transformar las creencias limitadoras en creencias potenciadoras.

Es muy importante comprender como se desarrolla internamente el cambio natural de creencias no solo para ayudar a nuestros estudiantes sino para dotar a las Matemáticas de la reputación que se merece y no la que actualmente tiene a “pie de calle”, como asignatura incomprensible o extremadamente dura.

Para enfatizar que las matemáticas son un lenguaje, inspirado en el libro de Antonio Basante titulado “Leer contra la nada” y para resolver la recurrente pregunta de, profe ¿qué son las Matemáticas? se puede resolver metafóricamente así: “La

Matemática es detenerse, observar, escuchar, es interpretar, es comprender, es cosechar, es tejer, es surcar, es elegir, es transformar, es asimilar, es compartir, es una búsqueda por la verdad, un camino que nos une en un patrimonio común. Luego las Matemáticas son todo lo que tu sueñes”.

Sugerimos ensayar con el alumnado lo anteriormente citado como fuente de curiosidad y de motivación.

4. Sugerencias didácticas de los problemas

Los problemas propuestos son un esfuerzo colectivo por desarrollar problemas originales que sirvan como fuente de motivación y aprendizaje al alumnado y de recursos al profesorado, tocando las áreas lectivas más relevantes del temario. Hay problemas que son manifiestamente específicos, otros implícitos en los contenidos.

Son problemas en general diferentes a los que aparecen en los libros de textos, quizás algo más largos y con un nivel de dificultad un poco superior a la media de los problemas que están acostumbrados a resolver en clase. Creemos que este tipo de material dota al docente para afianzar la habilidad de resolución de problemas en su alumnado, área muy menguada y que muchos centros no entrenan, o entrenan poco.

Desde esta perspectiva los problemas están destinados al alumnado de 2º de E.S.O, no excluye la posibilidad de utilizarlo como recurso didáctico en cualquier otro curso con independencia del nivel de la clase. Desde nuestra perspectiva siempre será recomendable enfrentarse a problemas en apariencia o en esencia un poco más difíciles; dependiendo del nivel de la clase será más o menos necesaria la intervención del docente.

Dependiendo de las características de la clase y del alumnado tendremos diferentes modalidades de presentación que focalizarán la atención general en el aspecto a destacar que quiera fomentar el docente a saber, repaso, refuerzo, motivación, dinámicas de grupo, etc.

Las posibilidades de presentación son infinitas ahora más que nunca con la posibilidad de recursos TIC, por ejemplo, GeoGebra, que dotan la clase de dinamismo y novedad.

Algunos de los infinitos ejemplos de presentación:

- Desde trabajos por grupo con días de investigación y presentación colectiva al final del plazo acordado. Se recomendaría dar a cada grupo un problema distinto, el problema podría rotar entre grupos hasta su resolución. Por ejemplo, en los problemas 1, 7, 10, 11 y 12.

- Exposición del problema a modo de coloquio con la clase e ir resolviendo el problema de forma oral, mientras se le va dando tiempo para alguna reflexión personal y algún cálculo, serviría para repasar o para profundizar. Por ejemplo, en los problemas 2, 3, 5, 14 y 17
- La realización de construcciones geométricas (en las que se puedan usar programas informáticos, como GeoGebra) que sirvan de ayuda para la resolución de problemas con figuras geométricas en dos o tres dimensiones. Por ejemplo, en los problemas 4, 8, 9, 13 y 18.
- Algunos problemas son de entretenimiento lúdico-matemático que podrían usarse como si fueran retos o juegos o como entretenimiento por ejemplo para el alumnado de altas capacidades. Por ejemplo, los problemas 6, 15, 16 y 19.
- A modo de clase dinámica podría el docente llevarse unas cuantas barajas de cartas y proponer el problema 20.
- Todos estos problemas podrían servir como repaso y como ampliación de lo estudiado en las distintas áreas matemáticas (aritmética, álgebra, geometría, estadística y probabilidad, lógica, ...)

Es muy interesante para el estudiante que el mismo docente no conozca la solución para que los mismos vean cómo se desarrolla el proceso mental de resolución en su maestro, ya que algunos problemas requieren tiempo e ingenio.

Cuanto más dinámica y menos magistral sean las presentaciones de los problemas con este material mejor será el ambiente general, creando espacios de disfrute con el aprendizaje de las matemáticas. La creatividad y la flexibilidad en el marco de las presentaciones harán la diferencia.

Una misma dinámica en grupos distintos puede tener resultados muy distintos, no existe una llave maestra, quizás la experiencia con las dinámicas en sí, y especialmente ser capaz de cambiar la metodología en el instante que se esté haciendo si vemos que manifiestamente no funciona.

5. Relación entre los estándares y competencias clave y los problemas propuestos.

LEGISLACIÓN

MATEMÁTICAS 2º ESO

- Orden de **14 de julio de 2016**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. (28 de julio 2016 Boletín Oficial de la Junta de Andalucía)
- La numeración de los criterios de evaluación se corresponde exactamente con la establecida en el Real Decreto 1105/2014, donde aparecen también los estándares de aprendizaje evaluables de cada bloque.

Competencias

Desde el área de Matemáticas se contribuye a la adquisición de las competencias clave desde los siguientes aspectos:

✓ **Comunicación lingüística (CCL)**

Comprensión lectora a través de textos y de enunciado de problemas.
Comunicación de los resultados obtenidos usando el lenguaje matemático adecuado.
Transmisión de la información por diversos medios: escrito, oral, digital,...

✓ **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)**

Aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

Adquirir los conocimientos necesarios sobre números, medidas y estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos.

Para el desarrollo de las competencias en ciencia y tecnología resulta necesario abordar los saberes o conocimientos científicos relativos a la física, la química, la biología, la geología, las matemáticas y la tecnología, los cuales se derivan de conceptos, procesos y situaciones interconectadas.

Para ello es necesario utilizar y manipular herramientas y máquinas tecnológicas, utilizar datos y procesos científicos, identificar preguntas, resolver problemas, llegar a una conclusión o tomar decisiones basadas en pruebas y argumentos.

✓ **Competencia digital (CD)**

Para su adquisición son necesarios los conocimientos relacionados con el lenguaje específico: textual, numérico, icónico, visual gráfico y sonoro. Supone el acceso a las fuentes y procesamiento de la información.

Precisa del desarrollo de diversas destrezas relacionadas con el acceso a la información, el procesamiento y uso para la comunicación, la creación de contenidos, la seguridad y la resolución de problemas.

✓ **Aprender a aprender (CAA)**

Esta competencia se caracteriza por la habilidad para iniciar, organizar y persistir en el aprendizaje. Esto exige la capacidad para motivarse por aprender, así como conocer y controlar los propios procesos de aprendizaje para ajustarlos a los tiempos y las demandas de las tareas y actividades que conducen al aprendizaje.

✓ **Competencias sociales y cívicas (CSC)**

Las competencias sociales y cívicas implican la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, entendida desde las diferentes perspectivas, en su concepción dinámica, cambiante y compleja, para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados; para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas. Además de incluir acciones a un nivel más cercano y mediato al individuo como parte de una implicación cívica y social.

✓ **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SEIP)**

La competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto.

La adquisición de esta competencia es determinante en la formación de futuros ciudadanos emprendedores, contribuyendo así a la cultura del emprendimiento. En este sentido, su formación debe incluir conocimientos y destrezas relacionados con las oportunidades de carrera y el mundo del trabajo, la educación económica y financiera o el conocimiento de la organización y los procesos empresariales, así como el desarrollo de actitudes que conlleven un cambio de mentalidad que favorezca la iniciativa emprendedora, la capacidad de pensar de forma creativa, de gestionar el riesgo y de manejar la incertidumbre.

✓ **Conciencia y expresiones culturales (CEC)**

La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de

enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos.

Esta competencia incorpora también un componente expresivo referido a la propia capacidad estética y creadora y al dominio de aquellas capacidades relacionadas con los diferentes códigos artísticos y culturales, para poder utilizarlas como medio de comunicación y expresión personal. Implica igualmente manifestar interés por la participación en la vida cultural y por contribuir a la conservación del patrimonio cultural y artístico, tanto de la propia comunidad como de otras comunidades.

Criterios de Evaluación. Estándares de aprendizaje.

BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES MATEMÁTICAS

Estándares de aprendizaje	Competencias Clave	Problemas
B1.C2.E1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).	CCL	1 al 20
B1.C2.E2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.	CMCT	
B1.C2.E3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.	CMCT	
B1.C2.E4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas,	SIEP	

reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.		
B1.C3.E1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	CMCT	
B1.C3.E2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.	CMCT, SIEP	
B1.C4.E1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.	CAA	
B1.C5.E1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.	CCL	
B1.C6.E2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.	CMCT, CSC	
B1.C6.E3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.	CMCT	

B1.C6.E4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.	CMCT	
B1.C7.E1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CAA	
B1.C8.E2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés, adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.	CAA	
B1.C8.E4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	SIEP	
B1.C9.E1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.		
B1.C11.E1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.		
B1.C12.E3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de		

su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.		
--	--	--

BLOQUE 2: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Estándares de aprendizaje	Competencias clave	Problemas
B2.C1.E1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.	CMCT	2,7
B2.C1.E2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.	CMCT	4,7,8
B2.C1.E3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.	CMCT, CD, CSC	2,3,14
B2.C2.E1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.	CMCT	4,8,12

B2.C3.E2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, decimales y fraccionarios decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.	CMCT	1,7,13,15
B2.C4.E1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.	CMCT, CEC	1,3,5
B2.C4.E2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.	CMCT	3,5,17
B2.C5.E1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.	CMCT	5,6,11,17,20
B2.C5.E2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.	CMCT	2,6,7,10,14,16
B2.C6.E1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.	CMCT	6,8,11
B2.C6.E2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.	CCL, CMCT, CSC	6,8,11

BLOQUE 3: GEOMETRÍA

Estándares de aprendizaje	Competencias clave	Problemas
B3.C1.E1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.	CMCT	4,9,18
B3.C1.E2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	CMCT	4,9,18
B3.C2.E1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.	CMCT, CSC	4
B3.C3.E1. Analiza e identifica las características de distintas figuras geométricas, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.	CCL, CMCT	8,13,18
B3.C3.E2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados.	CMCT, CD	9
B3.C3.E3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.	CMCT	9
B3.C4.E1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de	CCL, CMCT	4,9,13,18

cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.		
--	--	--

BLOQUE 4: FUNCIONES

Estándares de aprendizaje	Competencias clave	Problemas
B4.C1.E1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada según el contexto.	CMCT, CSC	19
B4.C3.E1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.	CMCT	12
B4.C3.E3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.	CMCT, CSC	12
B4.C3.E4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.	CMCT, CD, CSC	12,19

BLOQUE 5: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Estándares de aprendizaje	Competencias clave	Problemas
---------------------------	--------------------	-----------

B5.C1.E1. Define población, muestra e individuo desde el punto de vista de la estadística, y los aplica a casos concretos.	CCL, CMCT, CSC	1
B5.C1.E2. Reconoce y propone ejemplos de distintos tipos de variables estadísticas, tanto cualitativas como cuantitativas.	CMCT	1
B5.C1.E3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente.	CMCT	1
B5.C1.E4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo mediano), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas.	CCL, CMCT, CSC	1
B5.C2.E1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas.	CMCT, CD	1
B5.C2.E2. Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada.	CMCT, CD	1

6. Enunciados de los problemas

■ Problema nº 1

El pasado mes de noviembre se realizó una campaña para promocionar las diferentes aceitunas de Andalucía. La provincia de Jaén quiso participar con su variedad de aceituna Picual montando un Stand decorado con 76.000 aceitunas.



Para conseguir dicha cantidad de aceitunas y no tener que contarlas todas, se les pidió a un grupo de siete estudiantes olímpicos que pesaran cada uno de ellos doscientos gramos de aceitunas y que contaran la cantidad de aceitunas que tenían esos 200 gramos. Estos fueron los siete resultados:

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7
63 Aceitunas	60 Aceitunas	55 Aceitunas	59 Aceitunas	67 Aceitunas	65 Aceitunas	58 Aceitunas

- Las aceitunas se deben comprar envasadas en sacos de 5 kg cada uno. ¿Cuántos sacos de aceitunas deberían comprar los responsables de la campaña para conseguir las 76.000 aceitunas?
- Tras la campaña, todas las aceitunas que se compraron, se llevaron a una almazara (molino de aceite) donde el rendimiento de las aceitunas fue de un 18.2%. Es decir, que, por cada 100 kg de aceitunas, se consiguen 18.2 kg de aceite. ¿Cuántos kilos de aceite se produjeron?

Razona tus respuestas.

■ Problema nº 2

En el escaparate de una tienda de bicicletas figura el siguiente escrito:

Se regalará una bicicleta a la primera persona que resuelva este acertijo: “¿Qué cinco números enteros



positivos al sumarlos por parejas dan como resultado siempre una de estas tres cantidades: 21, 28 ó 35?”.

Halla de forma razonada cuáles son esos números y serás tú el afortunado.

Nota: Los números buscados pueden o no repetirse.

■ Problema nº 3

A las elecciones del parlamento se han presentado 4 partidos y como ninguno ha obtenido mayoría absoluta han tenido que volver a votar.



A partir de los siguientes datos debes de deducir de forma razonada cuántos representantes han obtenido cada partido en cada una de las votaciones.

La segunda vez:

- El partido A ha aumentado en 25, con ello consigue el doble de los que obtuvo D.
- El partido B ha perdido un número capicúa de representantes, que se aproxima a la tercera parte de los que obtuvo al principio, con esto consigue tener los mismos representantes que D.
- El partido C ha obtenido 8 representantes más que en la primera votación.
- El partido D es el único que obtiene los mismos representantes en ambas votaciones.

Además, debes de saber que:

- En total son 350 representantes.
- El partido B obtuvo el 28% de los representantes totales en la primera votación.

■ Problema nº 4

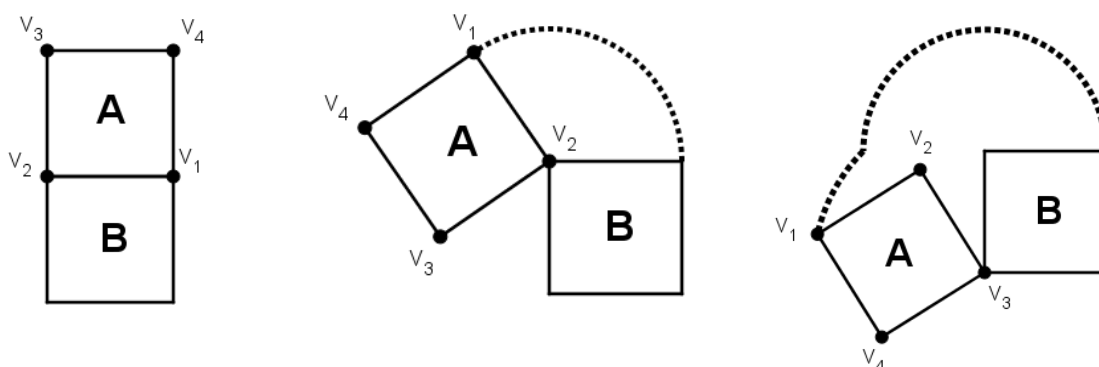
El señor Eucli Despistado ha diseñado el logo de su empresa, “*Elements Solutions*” de la siguiente manera:

Partiendo de dos cuadrados, A y B, de 3.2 centímetros de lado, que tienen un lado en común (como muestra la figura), gira el cuadrado A sobre el vértice V_2 en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cuando vuelven a coincidir dos lados, vuelve a girar el cuadrado en el mismo sentido, pero esta vez sobre el vértice V_3 . Continúa el proceso hasta que el vértice V_1 regresa a su posición inicial.

El logo que ha obtenido es la figura que encierra la curva que describe el vértice V_1 del cuadrado A al girar.

Realiza un dibujo del logo diseñado por Eucli y calcula la superficie del mismo.

Razona tus respuestas.



■ Problema nº 5

En Todolandia a comienzo del siglo XX de cada 100 habitantes 45 eran mujeres.

Al iniciar el presente siglo XXI se ha constatado en los censos que la población todolandesa ha tenido un incremento del 20%; pero que el total de mujeres solo ha aumentado en un 10%.



¿Cuál es el porcentaje del total de la población de Todolandia que representa las mujeres al comienzo de este siglo XXI? Razona la respuesta.

■ Problema nº 6

El Jardín de Matelandia se ha dividido en 25 cuadrículas como las de la figura y se han escondido seis tesoros, en seis cuadrículas diferentes.



	1		2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x



Tras múltiples averiguaciones hemos podido reducir a 14 el número de cuadrículas donde pueden estar escondidos dichos tesoros, que se corresponden con las casillas en blanco del dibujo.

Si los números indican la cantidad de tesoros que podemos encontrar alrededor de la casilla numerada y las **X** nos indican que en esas casillas no se encuentra el tesoro, coloca cada uno de los seis tesoros en cada una de las casillas donde se encuentran, explicando de forma razonada por qué has deducido que deben ir ahí.

■ Problema nº 7

Enrique tiene 2017 bolas, enumeradas del 1 al 2017, de manera que las bolas cuya suma de las cifras sea la misma son del mismo color. Es decir, si tenemos dos bolas y la suma de las cifras de cada una de ellas es diferente, ambas bolas son de colores distintos.

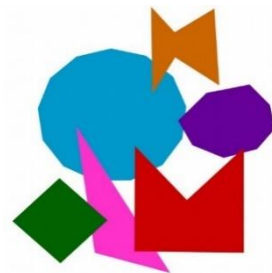


Contesta razonando tu respuesta, entre las 2017 bolas, ¿cuántos colores diferentes tendremos?

■ Problema nº 8

Paco siempre anda presumiendo ante todos sus hermanos y amigos que es el que más sabe de todos los tipos de polígonos en Todolandia.

Por dicho motivo entre todos le han preparado esta serie de cuestiones para ver si es cierto:



- a) ¿Cuál es el polígono que tiene igual número de lados que de diagonales?
- b) ¿Cuál es el polígono que posee triple cantidad de diagonales que de lados?
- c) ¿Cuáles son los polígonos regulares en los que cada uno de sus ángulos centrales es un cuadrado perfecto?
- d) ¿Cuál es el menor número de lados que debe tener un polígono para que la suma de todos sus ángulos interiores sea un cuadrado perfecto?

Demuestra que eres mejor conocedor de los polígonos que Paco dando las respuestas acertadas a todas las preguntas de forma razonada.

■ Problema nº 9

En el castillo de Santa Catalina de Jaén podemos ver seis torres llamadas, Torre del Homenaje, Torre de las Damas, Torre de la Vela, Torre de las Troneras y las dos Torres Albarranas.



Si las pudiéramos poner una encima de otra medirían en total 124.5 metros. Si sabemos que la Torre del Homenaje mide más de 30 metros de altura y que, si las ordenáramos, la diferencia entre dos torres consecutivas en tamaño es de cuatro metros y medio. ¿Cuál será la altura de las demás torres?

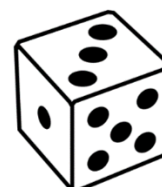
El interior de una de las torres Albarranas del castillo de Santa Catalina es cilíndrico. Aunque no es muy ancho, tiene 8 metros de envergadura (diámetro), y una altura de 9.5 metros. Laura y Lucas subieron a lo alto de la torre por una rampa pegada

a la pared interior de la torre. Comprobaron que la rampa de pendiente constante terminaba justo encima de donde empezaba. Calcula la longitud de dicha rampa.

Razona las respuestas.

■ Problema nº 10

Juan y Andrés han ideado un juego utilizando un dado cúbico de 6 caras equilibradas con las siguientes normas:



- Juan se asigna los números 1 y 2, y Andrés los números 3, 4, 5 y 6.
- Si en la primera tirada sale el 1, Juan gana el juego y ya no se tira más.
- Si no sale el 1 en la primera tirada, se apunta un punto al que tenga asignado el número que salga.
- A continuación, se realiza una segunda tirada y se apuntará 1 punto a quien le corresponda el número que haya salido.
- Gana el juego el que tenga dos puntos; si están empatados a un punto nadie gana.

¿Cuál de los dos amigos tiene más posibilidades de ganar el juego?

Razona tu respuesta.

■ Problema nº 11

Hubo originalmente en Occidente, una reunión de los seguidores de los hijos más poderosos del Titán Cronos: “Zeus”, “Hades” y “Poseidón” para disputarse el Trono de Plata y con él gobernar el paraíso de los Campos Elíseos.

Sabemos que los seguidores de Hades y Poseidón juntos son el doble que los seguidores de Zeus. Los seguidores de Zeus y Poseidón son ocho veces el número de los seguidores de Hades. El número de seguidores de Poseidón supera en 55 a la suma de los seguidores de Zeus y Hades.

Averigua de forma razonada el número total de asistentes a esa reunión y cuántos seguidores de cada hijo acudió.

■ Problema nº 12

Se disponen unos números en la siguiente tabla:

0	2	4	6	8	10	12	14
3	5	7	9	11	13	15	17
6	8	10	12	14	16	18	20
9	11	13	15	17	19	21	23

Nos fijamos en el cuadrado señalado en la trama de números formados por dos filas y dos columnas consecutivas. Si multiplicamos en cruz los números que forman el cuadrado, y al mayor de los dos valores le restamos el menor, se obtiene de resultado 6.

5	7
8	10

$$8 \cdot 7 - 5 \cdot 10 = 6$$

- ¿Ocurrirá lo mismo con cualquier cuadrado de la trama formado por dos filas y dos columnas consecutivas?
- Si nos fijáramos ahora en cualquier cuadrado formado por tres filas y tres columnas consecutivas y multiplicamos en cruz los números que forman las esquinas y al mayor resultado le restamos el menor, ¿se obtendría siempre el mismo resultado? ¿Cuál sería este resultado?

Razona todas tus respuestas.

■ **Problema nº 13**

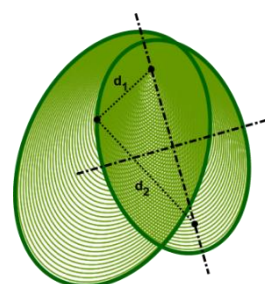
El señor Fugimoto ha decidido plantar sandías en su pequeño huerto ecológico; lo que pasa es que, cuando han ido creciendo, las ha metido en cajas ortoédricas cuyas dimensiones son 42 cm de largo, 30 cm de ancho y 27 cm de alto, para que adquirieran esa forma.



Sabiendo que la corteza tiene un grosor de 2 cm y que, del resto, solo un 7% es compuesto sólido, contesta razonadamente ¿cuántos litros de líquido contiene cada sandía?

■ **Problema nº 14**

En una de las Olimpiadas de Matemáticas realizada hace años acudieron 300 alumnos. El objetivo al igual que este año era resolver correctamente los seis problemas propuestos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: 275 alumnos resolvieron el primer problema, 268 resolvieron el segundo, 252 el tercero, 246 el cuarto, 239 el quinto y por último 230 resolvieron el sexto.



Contesta de forma razonada cuál fue el número mínimo de olímpicos que resolvieron correctamente los seis problemas.

■ **Problema nº 15**

Indica de forma razonada cuánto valdría la suma de todos los números de cuatro cifras que se puedan formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4.

■ **Problema nº 16**

Encuentra el nº de 6 cifras $ABCDEF$ que cumple que:

$$ABCDEF \cdot 1 = ABCDEF$$

$$ABCDEF \cdot 3 = BCDEFA$$

$$ABCDEF \cdot 2 = CDEFAB$$

$$ABCDEF \cdot 6 = DEFABC$$

$$ABCDEF \cdot 4 = EFABCD$$

$$ABCDEF \cdot 5 = FABCDE$$



Debes de ir deduciendo cifra a cifra su valor y explicar cómo lo haces. (La primera cifra de un número nunca es cero y cada letra solo representa un valor).

■ Problema nº 17

El precio del viaje en un autobús urbano es de 60 céntimos de euro si se paga con el bonobús. Las recargas de saldo suelen ser de 5, 10 y 20 euros (no cargables simultáneamente ni divisibles, por ejemplo, no se aceptan recargas de 7 euros, ni recargas de 15, 25, 30, 35, 40, 45 euros, etc.).



Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

- Averigua la mínima cantidad de recargas del bonobús y la cuantía total más barata para tal cantidad de recargas que has de hacer para “limpiar” el bonobús, es decir, que el saldo sea 0 euros. ¿A cuántos viajes equivale la limpieza anterior?
- Si el precio del viaje puede tomar los siguientes valores: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 céntimos de euro, ¿para qué precios se limpia el bonobús al usarlo asiduamente con la cantidad mínima de recarga (5euros)? y ¿cuántos viajes se realizaría con cada uno de estos precios?

■ Problema nº 18

Teresa pasa cada verano una semana en El Rocío, la popular aldea de Huelva. Teresa es una enamorada de los caballos. Su padre lo sabe y, por ello, para su

cumpleaños, le ha regalado una preciosa yegua que han bautizado con el bonito nombre de “Marisma”.



En la aldea hay mucho pasto en verano, con lo cual, han preparado un cercado con forma de hexágono regular de ocho metros de lado para que “Marisma” pueda pastar tranquilamente en el terreno interior del cercado aprovechando el estupendo clima veraniego en la aldea.

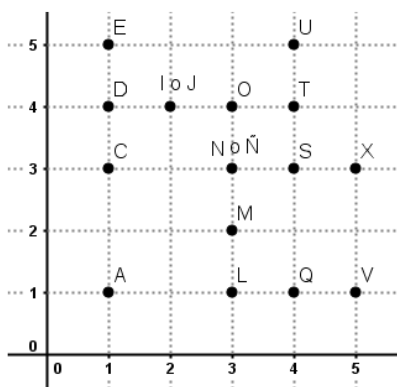
Cada día de la semana, de lunes a viernes, “Marisma” será atada a uno de los postes, con una cuerda de cuatro metros de lado, en un vértice distinto del cercado y el sábado será atada a un poste situado en el centro del cercado, con la misma cuerda.

“Marisma” cada día come todo el pasto que tiene a su alcance. Teresa cree que no dejará ni un solo metro cuadrado del interior del cercado sin comer, pero su amiga Isabel cree que no lleva razón y que dejará superficie sin pastar.

¿Quién de las dos está equivocada? Realiza los cálculos pertinentes y, en caso de que Isabel lleve razón, calcula la superficie de pasto que deja sin comer “Marisma”.

Razona la respuesta.

■ Problema nº 19



Sagrario quiere mandar un mensaje cifrado a su amiga Carmen, y para ello dispone las 16 letras del alfabeto que tiene pensado usar en el 1º cuadrante de unos ejes de coordenadas (como se observa en



la figura) y reemplaza cada una de ellas por el par ordenado (x,y) ; donde x e y representan, respectivamente, la coordenada horizontal del eje X y la vertical del eje Y .

Así, por ejemplo, el par correspondiente a la letra L es $(3,1)$.

De forma razonada ayuda a Carmen a descifrar el mensaje enviado por Sagrario.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55

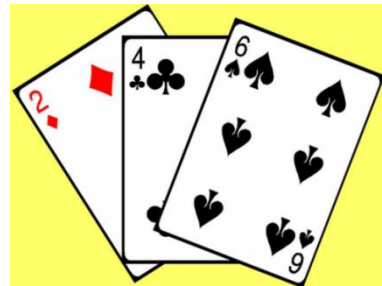
PARA RESOLVERLO LE MANDA COMO AYUDALAS SIGUIENTES PISTAS SOBRE LAS POSICIONES DE LAS LETRAS EN EL MENSAJE CIFRADO

- 1) $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$ Corresponde a la misma letra, cuyas coordenadas, al multiplicarlas, nos dan un divisor de 111.
- 2) $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al sumarlas dan el menor número primo posible.
- 3) $3 = 14 = 15 = 34 = 55$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale 12.
- 4) $37 = 51$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al sumarlas sale la parte entera del número 2π .
- 5) $7 = 23 = 28 = 46 = 47$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale el exponente de la factorización del número 32.
- 6) $16 = 38 = 44 = 52$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas, en ese orden, son números consecutivos y su suma es 7.
- 7) $17 = 19 = 24 = 42$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale un cuadrado perfecto impar menor que 16.

- 8) $11 = 22 = 26 = 50$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas están formadas por dos números pares consecutivos.
- 9) $6 = 10 = 32 = 45$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas son iguales y las más grandes representadas en el diagrama.

■ Problema nº 20

Debemos colocar las 20 cartas que tenemos, que son del 1 al 10 de corazones y del 1 al 10 de tréboles de forma que al tenerlas boca abajo, la primera carta al voltearla debe ser el As de corazones, la siguiente la pasamos debajo del mazo sin mirarla y volteamos la siguiente, que debe ser el dos de corazones, la siguiente la pasamos debajo del mazo sin mirarla y volteamos la siguiente que debe ser el tres de corazones y así hasta que se acabe volteando todas las cartas, que deberán ir apareciendo en el siguiente orden:



$1♥ - 2♥ - 3♥ - 4♥ - 5♥ - 6♥ - 7♥ - 8♥ - 9♥ - 10♥$

$1♣ - 2♣ - 3♣ - 4♣ - 5♣ - 6♣ - 7♣ - 8♣ - 9♣ - 10♣$

7. Solución de los problemas

▪ Problema nº 1

El pasado mes de noviembre se realizó una campaña para promocionar las diferentes aceitunas de Andalucía. La provincia de Jaén quiso participar con su variedad de aceituna Picual montando un Stand decorado con 76.000 aceitunas.



Para conseguir dicha cantidad de aceitunas y no tener que contarlas todas, se les pidió a un grupo de siete estudiantes olímpicos que pesaran cada uno de ellos doscientos gramos de aceitunas y que contaran la cantidad de aceitunas que tenían esos 200 gramos. Estos fueron los siete resultados:

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7
63 Aceitunas	60 Aceitunas	55 Aceitunas	59 Aceitunas	67 Aceitunas	65 Aceitunas	58 Aceitunas

- Las aceitunas se deben comprar envasadas en sacos de 5 kg cada uno. ¿Cuántos sacos de aceitunas deberían comprar los responsables de la campaña para conseguir las 76.000 aceitunas?
- Tras la campaña, todas las aceitunas que se compraron, se llevaron a una almazara (molino de aceite) donde el rendimiento de las aceitunas fue de un 18.2%. Es decir, que, por cada 100 kg de aceitunas, se consiguen 18.2 kg de aceite. ¿Cuántos kilos de aceite se produjeron?

Razona tus respuestas.

✓ **Solución:**

Como necesitamos 76.000 aceitunas y las vamos a comprar en sacos de 5 kg de aceitunas, vamos a averiguar en primer lugar, cuántas aceitunas habrá en cada uno de los sacos de 5 kg.

Cada estudiante ha contabilizado un número diferente de aceitunas en los 200 g, por lo que en primer lugar vamos a averiguar cuántas aceitunas habrá en 200 g.

Para ello vamos a utilizar el recurso matemático que se conoce como media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{63 + 60 + 55 + 59 + 67 + 65 + 58}{7} = 61$$

Concluimos que habrá 61 aceitunas en cada 200 g. ¿Cuántas habrá en 1 kg y en un saco?

Así que en 1 kg habrá $61 \cdot 5 = 305$ aceitunas y tendremos $305 \cdot 5 = 1525$ aceitunas en cada saco de 5 kg.

¿Qué habrá que hacer para saber los sacos que necesitamos?

Para saber los sacos de aceitunas que necesitamos, vamos a dividir el número total de aceitunas entre las aceitunas que contienen los sacos de 5 kg.

Necesitaremos $76.000 : 1525 = 49.836$ sacos de aceitunas. Por lo que tendremos que comprar 50 sacos de aceitunas

Pasemos a la segunda parte del problema.

Los 50 sacos se llevaron al molino para la producción de aceite, por lo que llevamos un total de: $5 \cdot 50 = 250$ kg de aceitunas.

Como el rendimiento del aceite fue del 18.2%, habrá que calcular el 18.2% de los 250 kg de aceitunas que se compraron: $250 \cdot 0.182 = 45.5$ kg de aceite.

En conclusión. Hemos comprado 50 sacos de aceitunas, con lo que hemos producido 45.5 kg de aceite.

■ Problema nº 2

En el escaparate de una tienda de bicicletas figura el siguiente escrito:

Se regalará una bicicleta a la primera persona que resuelva este acertijo: “¿Qué cinco números enteros positivos al sumarlos por parejas dan como resultado siempre una de estas tres cantidades: 21, 28 o 35?”.



Halla de forma razonada cuáles son esos números y serás tú el afortunado.

Nota: Los números buscados pueden o no repetirse.

✓ Solución:

Partimos de la idea de que algún o algunos números tienen que repetirse, ya que, por ejemplo, si tenemos cinco números distintos: 1, 2, 3, 4, 5, al hacer las restas tendríamos 4 resultados distintos.

Con lo que llegamos a la conclusión de que tiene que repetirse alguno.

Veamos qué número es candidato a repetirse, para ello le hacemos la mitad a cada uno de los números dados.

$21/2$ No es exacto.

$28/2$ Es exacto 14.

$35/2$ No es exacto.

Luego el que se tiene que repetir es el 14, de ese modo obtenemos:

$$21 - 14 = 7; \quad 35 - 14 = 21$$

Entonces hasta ahora los números sólo pueden ser:

$$7 ; 14 ; 14 ; 21$$

Pero nos faltaría uno. Si repetimos el proceso con los números que tenemos obtenemos de nuevo el 14, es decir, que este número se tiene que volver a repetir.

Con lo cual el problema tiene como **solución**: $7 ; 14 ; 14 ; 14 ; 21$

■ Problema nº 3

A las elecciones del parlamento se han presentado 4 partidos y como ninguno ha obtenido mayoría absoluta han tenido que volver a votar.

A partir de los siguientes datos debes de deducir de forma razonada cuántos representantes han obtenido cada partido en cada una de las votaciones.



La segunda vez:

- El partido A ha aumentado en 25, con ello consigue el doble de los que obtuvo D.
- El partido B ha perdido un número capicúa de representantes, que se aproxima a la tercera parte de los que obtuvo al principio, con esto consigue tener los mismos representantes que D.
- El partido C ha obtenido 8 representantes más que en la primera votación.
- El partido D es el único que obtiene los mismos representantes en ambas votaciones.

Además, debes de saber que:

- En total son 350 representantes.
- El partido B obtuvo el 28% de los representantes totales en la primera votación.

✓ **Solución:**

Comenzamos con los datos:

En total son 350 representantes. Como el partido B obtuvo el 28% de los representantes totales en la primera votación, 28% de 350; $350 \cdot 0.28 = 98$ diputados que obtuvo el partido B en la primera votación.

	Primera Votación	Segunda Votación
A		
B	98	
C		
D		

El partido B ha perdido un número capicúa de representantes, que se aproxima a la tercera parte de los que obtuvo al principio, con esto consigue tener los mismos representantes que D. La tercera parte de 98 es 32.666..., que se aproxima a 33, con lo

que concluimos que el partido B perdió 33 escaños, que igualan al partido D en la segunda votación.

	Primera Votación	Segunda Votación
A		
B	98	$98 - 33 = 65$
C		
D		65

El partido D es el único que obtiene los mismos representantes en ambas votaciones.

	Primera Votación	Segunda Votación
A		
B	98	65
C		
D	65	65

El partido A ha aumentado en 25, con ello consigue el doble de los que obtuvo D.

	Primera Votación	Segunda Votación
A	$2 \cdot 65 - 25 = 105$	$2 \cdot 65 = 130$
B	98	65
C		
D	65	65

En total son 350 representantes.

	Primera Votación	Segunda Votación

A	105	130
B	98	65
C	$350 - (105 + 98 + 65) = 82$	$350 - (130 + 65 + 65) = 90$
D	65	65

Además, comprobamos que el Partido C ha obtenido 8 votos más en la segunda votación que en la primera. Efectivamente $82 + 8 = 90$.

Por lo que los resultados de las elecciones fueron:

En la 1ª votación:

Partido A	Partido B	Partido C	Partido D
105 representantes	98 representantes	82 representantes	65 representantes

En la 2ª votación:

Partido A	Partido B	Partido C	Partido D
130 representantes	65 representantes	90 representantes	65 representantes

■ Problema nº 4

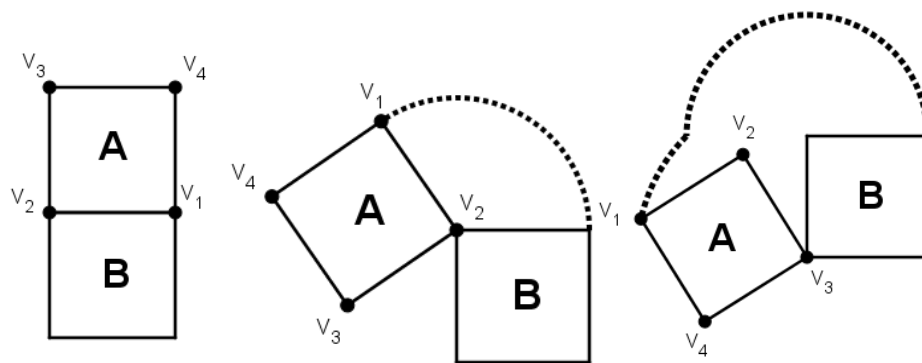
El señor Eucli Despistado ha diseñado el logo de su empresa, “*Elements Solutions*” de la siguiente manera:

Partiendo de dos cuadrados, A y B, de 3.2 centímetros de lado, que tienen un lado en común (como muestra la figura), gira el cuadrado A sobre el vértice V_2 en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cuando vuelven a coincidir dos lados, vuelve a girar el cuadrado en el mismo sentido, pero esta vez sobre el vértice V_3 . Continúa el proceso hasta que el vértice V_1 regresa a su posición inicial.

El logo que ha obtenido es la figura que encierra la curva que describe el vértice V_1 del cuadrado A al girar.

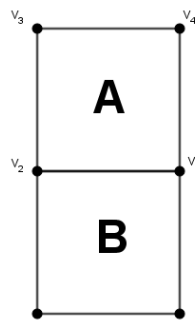
Realiza un dibujo del logo diseñado por Eucli y calcula la superficie del mismo.

Razona tus respuestas.

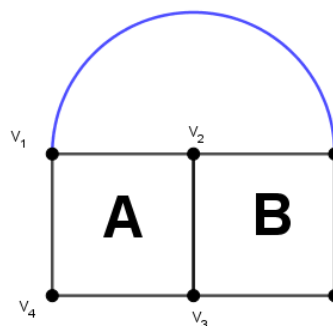


✓ **Solución:**

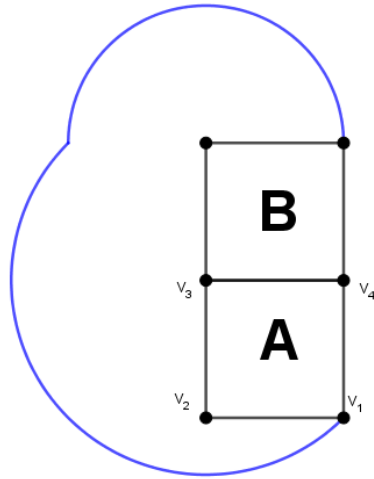
Parte 1. Trazado de la curva partiendo de la posición inicial.



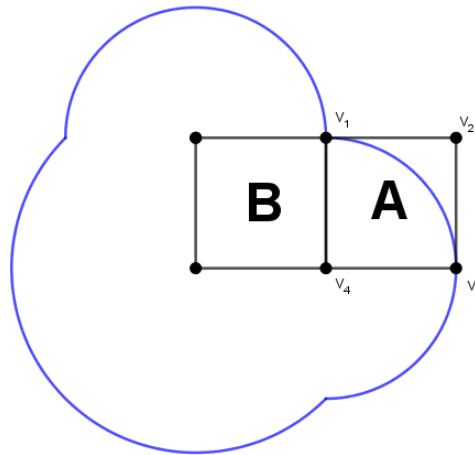
Primer Tramo: El punto V_1 describe una semicircunferencia de centro V_2 y radio el lado del cuadrado B.



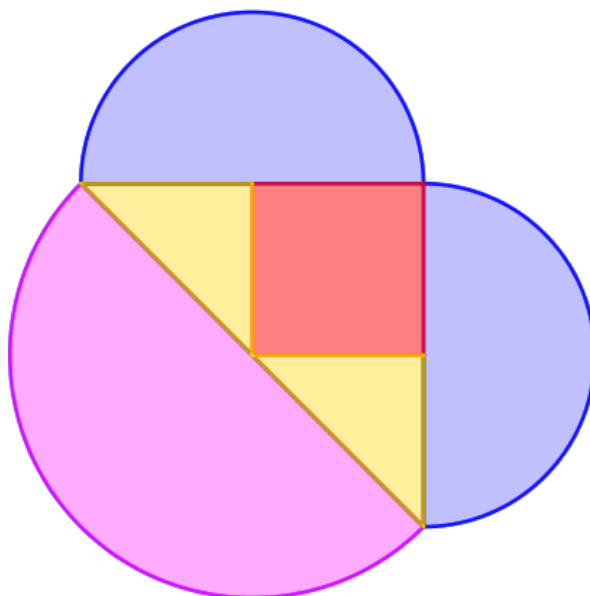
Segundo Tramo: El punto V_1 describe una semicircunferencia de centro V_3 y radio la diagonal del cuadrado B.



Tercer tramo: El punto V_1 describe una semicircunferencia de centro V_4 y radio el lado del cuadrado B.



Parte 2. Cálculo del área. Para ello vamos a dividir la figura de la siguiente forma:



Analicemos la figura:

- El cuadrado inicial en rojo de lado 3.2 cm
- Los dos semicírculos azules forman un círculo de radio 3.2 cm
- Los dos triángulos amarillos forman un cuadrado de lado 3.2 cm
- El semicírculo rosa tiene por radio la diagonal del cuadrado inicial. Para calcular el radio utilizaremos el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 3.2^2 + 3.2^2 \rightarrow r = \sqrt{20.48} \cong 4.5254834 \text{ cm}$$

El área de la figura del logo será:

$$\begin{aligned}\text{Área del logo} &\cong 3.2^2 + 3.2^2 + 3.2^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\sqrt{20.48})^2 \cong \\ &\cong 10.24 + 10.24 + 32.1699 + 32.1699 \cong \\ &\cong 84.8198 \text{ cm}^2 \cong 84.82 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Concluyendo, la superficie del logo diseñado por el Sr, Eucli Despistado es de 84.82 cm²

■ Problema nº 5

En Todolandia a comienzo del siglo XX de cada 100 habitantes 45 eran mujeres.

Al iniciar el presente siglo XXI se ha constatado en los censos que la población todolandesa ha tenido un incremento del 20%; pero que el total de mujeres solo ha aumentado en un 10%.



¿Cuál es el porcentaje del total de la población de Todolandia que representa las mujeres al comienzo de este siglo XXI?

Razona la respuesta.

✓ **Solución:**

De la información recibida deducimos que:

- Al inicio del siglo XXI la población ha tenido un aumento del 20%, es decir, que por cada 100 habitantes que hubiese al comienzo del siglo anterior ahora habrá 120 habitantes.
- Igualmente, al inicio del siglo XX por cada 100 habitantes había 45 mujeres y al comienzo del siglo XXI las mujeres solo han aumentado el 10%, lo que nos indica que por cada 45 mujeres que había ahora habrá 4.5 más, es decir, tendremos 49.5 mujeres.

Recapitulemos, al inicio del siglo XXI en Todolandia por cada 120 habitantes hay 49.5 mujeres.

Ya solo nos queda calcular qué porcentaje de la población total todolandesa representa estas mujeres y ello lo podemos hacer mediante una regla de tres:

$$\begin{array}{rcl} 120 \text{ personas} & \text{_____} & 100\% \\ 49.5 \text{ personas} & \text{_____} & x\% \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 49.5}{120} = 41.25\%$$

Resumiendo, al comienzo del siglo XXI las mujeres todolandesas representan el 41.25% del total de la población de su país.

■ Problema nº 6

El Jardín de Matelandia se ha dividido en 25 cuadrículas como las de la figura y se han escondido seis tesoros, en seis cuadrículas diferentes.

Tras múltiples averiguaciones hemos podido reducir a 14 el número de cuadrículas donde pueden estar escondidos dichos tesoros, que se corresponden con las casillas en blanco del dibujo.



	1		2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x



Si los números indican la cantidad de tesoros que podemos encontrar alrededor de la casilla numerada y las **X** nos indican que en esas casillas no se encuentra el tesoro, coloca cada uno de los seis tesoros en cada una de las casillas donde se encuentran, explicando de forma razonada por qué has deducido que deben ir ahí.

✓ **Solución:**

En primer lugar, empezaremos colocando los dos primeros tesoros, para ello nos fijamos en la casilla señalada que nos obliga a colocarlos justo en las casillas de debajo.

	1		2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

Si nos fijamos ahora en la casilla rodeada observamos que podemos colocar justo en el lado izquierdo una “X” ya que los dos tesoros que los rodean ya estarían colocados en el paso anterior.

	1	x	2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

Pasemos a la colocación del tercer tesoro. Y en este caso tendremos según la casilla que destacamos, dos posibles opciones:

Opción A:

Opción B:

	1	x	2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

	1	x	2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

Veamos, que la opción B no es posible y por lo tanto la única opción es la A.

Si el tesoro estuviera situado en ese lugar, tendríamos que seguir forzosamente la siguiente secuencia en la colocación de los cofres:

x	1	x	2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

x	1	x	2	
	2	x		
x	1	x	3	
x	2	x	3	
	1			x

x	1	x	2	2
	2	x		
x	1	x	3	
x	2	x	3	
	1			x

¡Ojo!. Esto no puede darse ya que no cumplen las reglas de colocación de los cofres (observamos que este "2", no tiene dos cofres situados alrededor suyo).

Esto nos lleva a elegir de nuevo la opción A:

	1	x	2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

Ya tenemos entonces tres cofres colocados, para la colocación de los tres tesoros que nos quedan vamos a fijarnos en este “3”, que nos obliga a colocar los cofres alrededor de él, por lo que en las casillas de la columna de la izquierda no puede haber ningún cofre.

	1	x	2	2
x	2	x		
x	1		3	
x	2		3	
x	1			x

El dato marcado me da la solución para la colocación del cuarto tesoro, ya que tiene que tener otro a su lado.

	1	x	2	2
x	2	x		
x	1		3	
x	2		3	
x	1			x

Llegado a este punto la solución del problema ya es única y muy sencilla. Esta casilla me reduce las posibilidades para los dos últimos tesoros que debemos colocar.

	1	x	2	2
x	2	x		
x	1		3	
x	2	x	3	
x	1			x

Y por último si nos fijamos en esta casilla solo podemos colocar los dos tesoros en estos lugares.

	1	x	2	2
x	2	x		
x	1		3	x
x	2	x	3	x
x	1			x

De esta forma hemos conseguido encontrar **la solución** donde se habían escondidos todos los tesoros en el jardín de Matelandia. Pero, ... ¿habrá más formas de conseguir este objetivo?

	1		2	2
	2	x		
	1		3	
	2		3	
	1			x

■ Problema nº 7

Enrique tiene 2017 bolas, enumeradas del 1 al 2017, de manera que las bolas cuya suma de las cifras sea la misma son del mismo color. Es decir, si tenemos dos bolas y la suma de las cifras de cada una de ellas es diferente, ambas bolas son de colores distintos.



Contesta razonando tu respuesta, entre las 2017 bolas, ¿cuántos colores diferentes tendremos?

✓ **Solución:**

Lo primero que haremos será dividir el intervalo de números correspondiente a las bolas enumeradas del 1 al 2017 en cuatro sub-intervalos o tramos:

$$I = [1, 2, 3, \dots, 99, 100, \dots, 999, 1000, \dots, 1999, 2000, \dots, 2017]$$

$$I_1 = [1, 2, 3, \dots, 99]$$

$$I_2 = [100, \dots, 999]$$

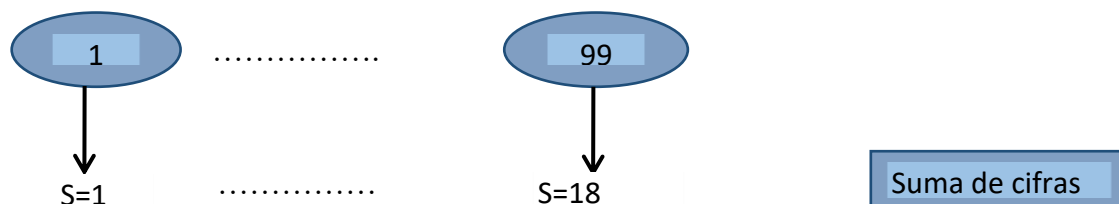
$$I_3 = [1000, \dots, 1999]$$

$$I_4 = [2000, \dots, 2017]$$

De esta forma tendremos los cuatro tramos $I = [1, \dots, 2017] = [I_1, I_2, I_3, I_4]$.

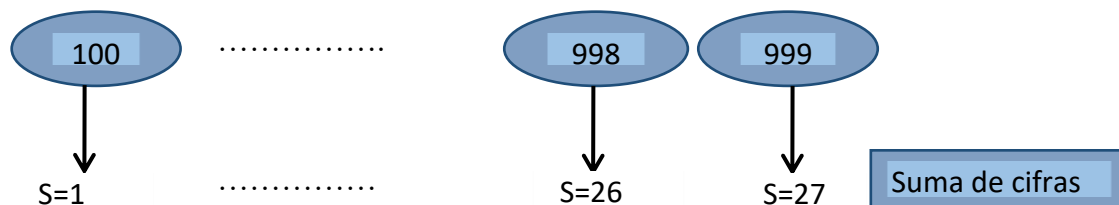
Ahora estudiamos los posibles resultados en cada sub-intervalo:

a) Para las bolas enumeradas del 1 al 99: $I_1 = [1, 2, 3, \dots, 99]$



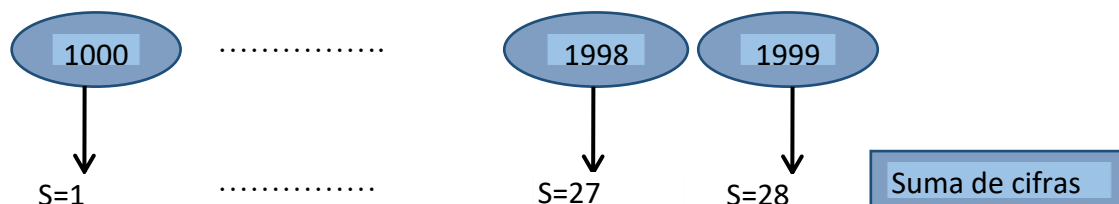
El máximo que corresponde a la suma de sus cifras es: $M_1 = \max \{1, 2, \dots, 18\} == 18$ que daría lugar a 18 colores distintos de bolas.

- b) Para las bolas enumeradas del 100 al 999: $I_2 = [100, \dots, 999]$ el razonamiento sería el mismo.



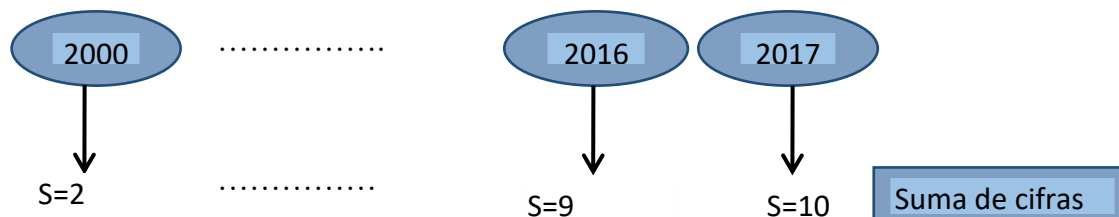
El máximo que corresponde a la suma de sus cifras es: $M_2 = \text{máx} \{1, 2, \dots, 27\} == 27$ que daría lugar a 27 colores distintos de bolas, pero ATENCIÓN habría bolas del mismo color que las que aparecen en el apartado a).

- c) Para las bolas enumeradas del 1000 al 1999: $I_3 = [1000, \dots, 1999]$ repetimos el mismo razonamiento.



El máximo que corresponde a la suma de sus cifras es: $M_3 = \text{máx} \{1, 2, \dots, 28\} == 28$ que daría lugar a 28 colores distintos de bolas, pero ATENCIÓN habría bolas del mismo color que las que aparecen en los apartados a) y b).

- d) Y, por último, hacemos lo mismo con las últimas bolas que nos quedan, las bolas enumeradas del 2000 al 2017: $I_4 = [2000, \dots, 2017]$



El máximo que corresponde a la suma de sus cifras es: $M_4 = \max\{2, \dots, 9, 10\} = 9$ que daría lugar a 9 colores distintos de bolas, pero ATENCIÓN habría bolas del mismo color que las que aparecen en los apartados a), b) y c).

Por tanto, si tomamos el máximo de:

$$M_1 = \max\{1, 2, \dots, 18\} = 18$$

$$M_2 = \max\{1, 2, \dots, 27\} = 27$$

$$M_3 = \max\{1, 2, \dots, 28\} = 28$$

$$M_4 = \max\{2, \dots, 9, 10\} = 9$$

Obtenemos: $M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\} = \max\{18, 27, 28, 9\} = 28$, que es el máximo número de sumas distintas que podemos obtener y que corresponderá a 28 distintos colores de bolas.

Solución: Entre las 2017 bolas habrá un total de 28 colores diferentes.

■ Problema nº 8

Paco siempre anda presumiendo ante todos sus hermanos y amigos que es el que más sabe de todos los tipos de polígonos en Todolandia.

Por dicho motivo entre todos le han preparado esta serie de cuestiones para ver si es cierto:



- e) ¿Cuál es el polígono que tiene igual número de lados que de diagonales?
- f) ¿Cuál es el polígono que posee triple cantidad de diagonales que de lados?
- g) ¿Cuáles son los polígonos regulares en los que cada uno de sus ángulos centrales es un cuadrado perfecto?
- h) ¿Cuál es el menor número de lados que debe tener un polígono para que la suma de todos sus ángulos interiores sea un cuadrado perfecto?

Demuestra que eres mejor conocedor de los polígonos que Paco dando las respuestas acertadas a todas las preguntas de forma razonada.

✓ **Solución:**

a) ¿Cuál es el polígono que tiene igual número de lados que de diagonales?

En los polígonos desde cada vértice pueden salir un número de diagonales igual al número de vértices (lados) quitándole tres (el elegido y los dos adyacentes).

Si queremos calcular el total de diagonales del polígono habrá que multiplicar las de un vértice por la cantidad de vértices que tiene el polígono y a continuación hallarle la mitad, ya que cada diagonal pertenece a dos vértices.

$$\text{Total diagonales} = \frac{(x - 3) \cdot x}{2}$$

Como queremos que el número de diagonales sea igual al de lados, entonces tendremos:

$$x = \frac{(x - 3) \cdot x}{2}; \Rightarrow 2x = (x - 3) \cdot x \Rightarrow 2 = x - 3 \Rightarrow x = 5$$

El polígono buscado es el **pentágono**.

b) ¿Cuál es el polígono que posee triple cantidad de diagonales que de lados?

Nuevamente tenemos que utilizar la fórmula del número de diagonales:

$$\text{Total diagonales} = \frac{(x - 3) \cdot x}{2}$$

Como queremos que el número de diagonales sea igual al triple que de lados, entonces tendremos:

$$3x = \frac{(x-3) \cdot x}{2} \Rightarrow 6x = (x - 3) \cdot x \Rightarrow 6 = x - 3 \Rightarrow x = 9$$

El polígono buscado es el **eneágono**.

c) ¿Cuáles son los polígonos regulares en los que cada uno de sus ángulos centrales es un cuadrado perfecto?

En los polígonos el número de ángulos centrales es igual al número de lados. Y cuando el polígono es regular todos tienen la misma amplitud.

La amplitud de un ángulo central de un polígono regular se calcula repartiendo los 360° de la circunferencia (el ángulo completo) entre el número de ángulos centrales que tenga el polígono.

$$\text{Ángulocentral} = \frac{360}{x}$$

Comencemos haciendo la descomposición factorial de 360:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

- Una de las formas de obtener un cuadrado perfecto sería quitarle además del 5 uno de los tres 2 que aparece en la descomposición factorial, es decir, habría que dividir entre $5 \cdot 2 = 10$.

$$\text{Ángulocentral} = \frac{360}{x} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 36 = 6^2$$

Uno de los polígonos buscado tendría $5 \cdot 2 = 10$ lados, es decir, sería el **decágono regular**.

- Otra de las formas de obtener un cuadrado perfecto sería quitarle además del 5 los tres 2 que aparece en la descomposición, es decir, habría que dividir entre $5 \cdot 2^3 = 40$.

$$\text{Ángulocentral} = \frac{360}{x} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{5 \cdot 2^3} = 9 = 3^2$$

Otro de los polígonos buscado tendría $5 \cdot 2^3 = 40$ lados, es decir, sería el **polígono regular de 40 lados**.

Otras dos formas de obtener un cuadrado perfecto serían:

- Quitarle además del 5 los dos 3 y uno de los 2 a lo que hay en la descomposición, es decir, habría que dividir entre $5 \cdot 3^2 \cdot 2 = 90$.

$$\text{Ángulocentral} = \frac{360}{x} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{5 \cdot 3^2 \cdot 2} = 4 = 2^2$$

Tendríamos un **polígono regular de 90 lados**.

- Y para finalizar dividirlo por $5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 360$.

$$\text{Ángulocentral} = \frac{360}{x} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}{5 \cdot 3^2 \cdot 2^3} = 1 = 1^2$$

Y por último tendríamos el **polígono regular de 360 lados**.

- d) ¿Cuál es el menor número de lados que debe tener un polígono para que la suma de todos sus ángulos interiores sea un cuadrado perfecto?

Para calcular lo que suma los ángulos interiores de cualquier polígono lo que hacemos es descomponer éste en triángulos (la cantidad de triángulos que se forman es igual al número de lados del polígono menos dos, es decir, $x - 2$) y a continuación multiplicamos el número de triángulos por lo que mide los ángulos del triángulo (180°).

$$\text{Suma ángulos interiores} = 180 \cdot (x - 2)$$

Empecemos por descomponer en sus factores primos el número 180, para saber qué factores le faltan para formar un cuadrado perfecto.

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Observamos que, si multiplicamos por 5, todos los factores serían cuadrados.

Esto nos indica que $x - 2$ debe dar como resultado 5, por lo cual el número de lados (x) tiene que ser 7.

Comprobemos:

$$\text{Suma ángulos} = 180 \cdot (x - 2) = 180 \cdot (7 - 2) = 180 \cdot 5 = 900 = 30^2$$

El polígono buscado es el **heptágono**.

■ Problema nº 9

En el castillo de Santa Catalina de Jaén podemos ver seis torres llamadas, Torre del Homenaje, Torre de las Damas, Torre de la Vela, Torre de las Troneras y las dos Torres Albarranas.



Si las pudiéramos poner una encima de otra medirían en total 124.5 metros. Si sabemos que la Torre del Homenaje mide más de 30 metros de altura y que, si las ordenáramos, la diferencia entre dos torres consecutivas en tamaño es de cuatro metros y medio. ¿Cuál será la altura de las demás torres?

El interior de una de las torres Albarranas del castillo de Santa Catalina es cilíndrico. Aunque no es muy ancho, tiene 8 metros de envergadura (diámetro), y una altura de 9.5 metros. Laura y Lucas subieron a lo alto de la torre por una rampa pegada a la pared interior de la torre. Comprobaron que la rampa de pendiente constante terminaba justo encima de donde empezaba. Calcula la longitud de dicha rampa.

Razona las respuestas.

✓ Solución:

■ Empezamos resolviendo la primera parte del problema:

Para ello sabemos que:

- Todas las torres puestas una encima de otra miden 124.5 m.
 - La torre del Homenaje mide más de 30 m.
 - Una de las torres Albarranas mide 9.5 m.
 - La diferencia entre dos torres consecutivas en tamaño es 4.5 m.
- Torre 1: 9.5 m
 - Torre 2: $9.5 \text{ m} + 4.5 \text{ m} = 14 \text{ m}$
 - Torre 3: $14 \text{ m} + 4.5 \text{ m} = 18.5 \text{ m}$
 - Torre 4: $18.5 \text{ m} + 4.5 \text{ m} = 23 \text{ m}$
 - Torre 5: $23 \text{ m} + 4.5 \text{ m} = 27.5 \text{ m}$
 - Torre 6: $27.5 \text{ m} + 4.5 \text{ m} = 32 \text{ m}$, ésta debe ser la torre del Homenaje que medía más de 30 m, por lo que ya tenemos la altura de las 6 torres.

Para comprobar que es la solución correcta, comprobamos que la suma de todas las torres ha de ser 124.5 m.

$$9.5 \text{ m} + 14 \text{ m} + 18.5 \text{ m} + 23 \text{ m} + 27.5 \text{ m} + 32 \text{ m} = 124.5 \text{ m}$$

Podríamos haber calculado una altura como $9.5 \text{ m} - 4.5 \text{ m} = 5 \text{ m}$. ¿Podría ser correcto el resultado?

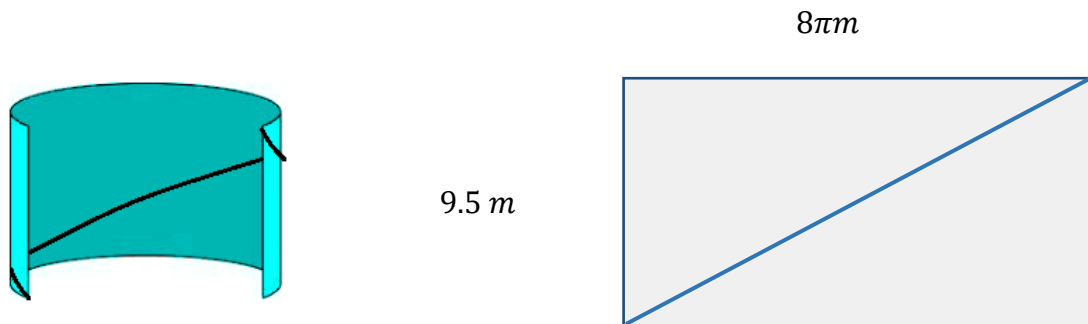
No porque la sexta torre no hubiera alcanzado los 30 m.

■ Ahora resolvamos la segunda parte del problema:

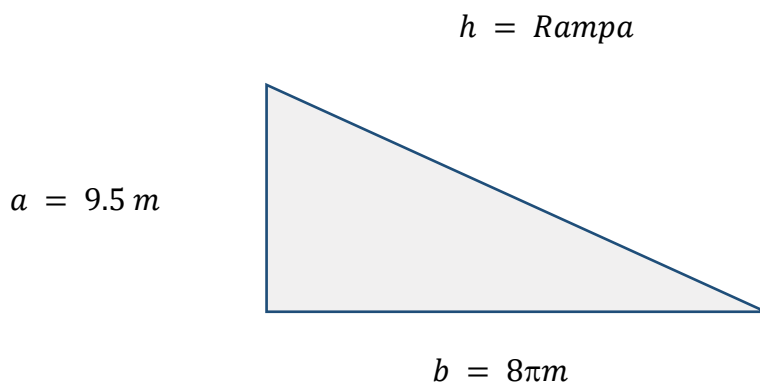
El interior de una de las torres Albarranas del castillo de Santa Catalina es cilíndrico. Aunque no es muy ancho, tiene 8 metros de envergadura (diámetro), y una altura de 9.5 metros. Laura y Lucas subieron a lo alto de la torre por una rampa pegada a la pared interior de la torre. Comprobaron que la rampa de pendiente constante terminaba justo encima de donde empezaba. Calcula la longitud de dicha rampa.

Como la torre es cilíndrica, para resolver este apartado desplegamos el cilindro:

Obtenemos un rectángulo en el que la diagonal es la rampa, su altura es la de la torre, 9.5 m, y su base es 8π m (la longitud de la circunferencia de las bases del cilindro).



Para calcular la longitud de la diagonal, usamos el teorema de Pitágoras: ($h^2 = a^2 + b^2$).



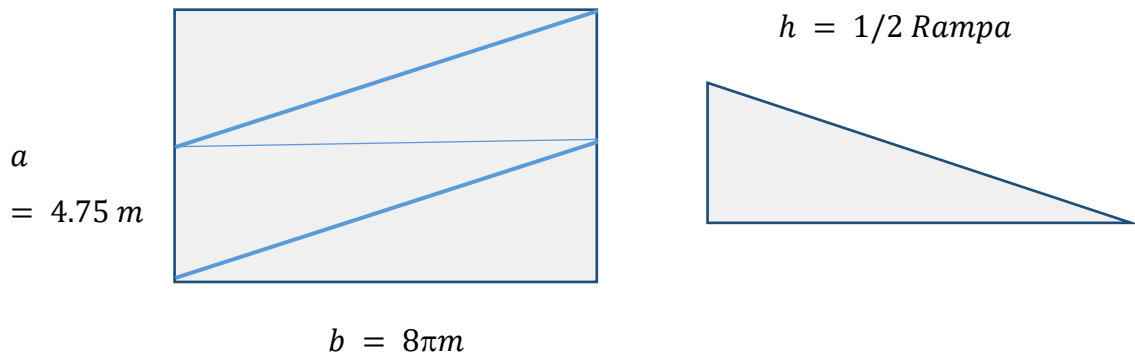
$$h^2 = 9.5^2 + (8\pi)^2 \quad \rightarrow \quad h = 26.86828394 \dots \text{ m}$$

Solución: Por lo tanto, la rampa medirá aproximadamente 26.87 m.

✓ **Otra solución:**

Se podría pensar que a lo mejor la rampa da dos vueltas completas, siendo entonces mayor la distancia a recorrer, pero más cómoda de subir, por ser menor la pendiente de la rampa.

En ese caso, en lugar de una diagonal tendríamos dos, pero los rectángulos tendrían la mitad de altura.



$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = 4.75^2 + (8\pi)^2 \Rightarrow h = 25.57766959 \dots \text{ m} \cong 25.58 \text{ m}$$

Recuerda que debes multiplicar por 2. $25.58 \cdot 2 = 51.16 \text{ m}$

Solución: Por lo tanto, la rampa medirá aproximadamente 51.16 m.

Se podría calcular igual si la rampa diera más vueltas.

■ **Problema nº 10**

Juan y Andrés han ideado un juego utilizando un dado cúbico de 6 caras equilibradas con las siguientes normas:



- Juan se asigna los números 1 y 2, y Andrés los números 3, 4, 5 y 6.
- Si en la primera tirada sale el 1, Juan gana el juego y ya no se tira más.
- Si no sale el 1 en la primera tirada, se apunta un punto el que tenga asignado el número que salga.
- A continuación, se realiza una segunda tirada y se apuntará 1 punto a quien le corresponda el número que haya salido.

- Gana el juego el que tenga dos puntos; si están empatados a un punto nadie gana.

¿Cuál de los dos amigos tiene más posibilidades de ganar el juego?

Razona tu respuesta.

✓ Solución:

La resolución de este ejercicio será más fácil y clara si en primer lugar construimos una tabla donde recojamos los posibles resultados obtenidos en los lanzamientos y quién ganaría en cada caso.

1º lanzamiento	2º lanzamiento	Puntos	Ganador
1	No hace falta		Juan
2	1	Juan(2) Andrés (0)	Juan
2	2	Juan(2) Andrés (0)	Juan
2	3	Juan(1) Andrés (1)	Empate
2	4	Juan(1) Andrés (1)	Empate
2	5	Juan(1) Andrés (1)	Empate
2	6	Juan(1) Andrés (1)	Empate
3	1	Juan(1) Andrés (1)	Empate
3	2	Juan(1) Andrés (1)	Empate
3	3	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
3	4	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
3	5	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
3	6	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
4	1	Juan(1) Andrés (1)	Empate
4	2	Juan(1) Andrés (1)	Empate
4	3	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
4	4	Juan(0) Andrés (2)	Andrés

4	5	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
4	6	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
5	1	Juan(1) Andrés (1)	Empate
5	2	Juan(1) Andrés (1)	Empate
5	3	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
5	4	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
5	5	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
5	6	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
6	1	Juan(1) Andrés (1)	Empate
6	2	Juan(1) Andrés (1)	Empate
6	3	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
6	4	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
6	5	Juan(0) Andrés (2)	Andrés
6	6	Juan(0) Andrés (2)	Andrés

Calculemos las posibilidades de cada uno:

- $P(Juan) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$
- $P(empate) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} + \frac{8}{36} = \frac{12}{36}$
- $P(Andrés) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$

Si contamos quien gana en los posibles 36 casos que se pueden generar, obtenemos:

- En 8 de ellos gana Juan.
- En 12 de ellos los dos amigos quedan empatados y por lo tanto no gana nadie.
- Y en 16 de ellos gana Andrés.

Solución: Por lo tanto, el claro ganador es Andrés.

■ Problema nº 11

Hubo originalmente en Occidente, una reunión de los seguidores de los hijos más poderosos del Titán Cronos: “Zeus”, “Hades” y “Poseidón” para disputarse el Trono de Plata y con él gobernar el paraíso de los Campos Elíseos.

Sabemos que los seguidores de Hades y Poseidón juntos son el doble que los seguidores de Zeus. Los seguidores de Zeus y Poseidón son ocho veces el número de los seguidores de Hades. El número de seguidores de Poseidón supera en 55 a la suma de los seguidores de Zeus y Hades.

Averigua de forma razonada el número total de asistentes a esa reunión y cuántos seguidores de cada hijo acudió.

✓ **Solución:**

Llamamos:

- H a los seguidores de Hades
- P a los seguidores de Poseidón
- Z a los seguidores de Zeus

Sabemos que los seguidores de Hades y Poseidón juntos son el doble que los seguidores de Zeus.

$$H + P = 2Z$$

Los seguidores de Zeus y Poseidón son ocho veces el número de los seguidores de Hades.

$$Z + P = 8H$$

El número de seguidores de Poseidón supera en 55 a la suma de los seguidores de Zeus y Hades.

$$P = Z + H + 55$$

Reuniendo todas las pistas, tenemos:

$$H + P = 2Z$$

$$Z + P = 8H$$

$$P = Z + H + 55$$

Para reducir el número de incógnitas, sustituimos la P de la tercera ecuación en las otras dos:

$$H + Z + H + 55 = 2Z$$

$$Z + Z + H + 55 = 8H$$

Agrupando términos semejantes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales de 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 2H - Z = -55 \\ 2Z - 7H = -55 \end{cases}$$

Elegimos para resolverlo el método de reducción, aunque podríamos haber elegido cualquier otro método.

Multiplicamos por 2 la primera de las ecuaciones para eliminar la Z .

$$\begin{cases} 2H - Z = -55 \\ 2Z - 7H = -55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4H - 2Z = -110 \\ -7H + 2Z = -55 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -3H & = & -165 \end{matrix}$$

De donde deducimos que $H = 55$, que son los seguidores de Hades.

Para calcular Z , sustituimos en la primera ecuación:

$$Z = 2H + 55$$

$$Z = 2 \cdot 55 + 55$$

$$Z = 165$$

Por último, calcular P , sustituimos en la tercera de las ecuaciones que teníamos al principio:

$$P = Z + H + 55$$

$$P = 165 + 55 + 55$$

$$P = 275$$

Solución: El número total de asistentes a esa reunión y los seguidores de cada hijo que acudieron son:

Seguidores de Zeus	165
Seguidores de Hades	55
Seguidores de Poseidón	275
Total asistentes a la reunión	495

■ Problema nº 12

Se disponen unos números en la siguiente tabla:

0	2	4	6	8	10	12	14
3	5	7	9	11	13	15	17
6	8	10	12	14	16	18	20
9	11	13	15	17	19	21	23

Nos fijamos en el cuadrado señalado en la trama de números formados por dos filas y dos columnas consecutivas. Si multiplicamos en cruz los números que forman el cuadrado, y al mayor de los dos valores le restamos el menor, se obtiene de resultado 6.

5	7
8	10

$$8 \cdot 7 - 5 \cdot 10 = 6$$

- ¿Ocurrirá lo mismo con cualquier cuadrado de la trama formado por dos filas y dos columnas consecutivas?
- Si nos fijáramos ahora en cualquier cuadrado formado por tres filas y tres columnas consecutivas y multiplicamos en cruz los números que forman las esquinas y al mayor resultado le restamos el menor, ¿se obtendría siempre el mismo resultado? ¿Cuál sería este resultado?

Razona todas tus respuestas.

✓ **Solución:**

a) Elijamos otro cuadrado cualquiera y veamos si ocurre lo mismo.

0	2	4	6	8	10	12	14
3	5	7	9	11	13	15	17
6	8	10	12	14	16	18	20
9	11	13	15	17	19	21	23

12	14
15	17

$$15 \cdot 14 - 12 \cdot 17 = 210 - 204 = 6$$

Para buscar un razonamiento lógico, veamos cómo está construida la tabla:

- Las columnas van aumentando de 2 en 2.
- Las filas van aumentando de 3 en 3.
- Luego cualquier cuadrado de la trama formado por dos filas y dos columnas consecutivas será de la forma:

$$\begin{array}{cc} x & x + 2 \\ x + 3 & x + 5 \end{array}$$

Veamos si al multiplicar en cruz los números que forman el cuadrado, y al mayor de los dos valores le restamos el menor, se obtiene de resultado 6.

$$(x + 3) \cdot (x + 2) - x \cdot (x + 5) = x^2 + 2x + 3x + 6 - x^2 - 5x = 6$$

Solución: Sí, siempre ocurrirá lo mismo con cualquier cuadrado de la trama, dará 6.

b) Elijamos ahora un cuadrado, cualquiera de la trama, formado por tres filas y tres columnas consecutivas.

0	2	4	6	8	10	12	14
---	---	---	---	---	----	----	----

3	5	7	9	11	13	15	17
6	8	10	12	14	16	18	20
9	11	13	15	17	19	21	23

Multipliquemos en cruz los números que forman las esquinas.

9	11	13
12	14	16
15	17	19

$$= 15 \cdot 13 - 9 \cdot 19 = 195 - 171 = 24$$

Razonemos igual que en el apartado anterior y veamos si siempre se obtiene 24.

x	x+2	x+4
x+3	x+5	x+7
x+6	x+8	x+10

$$= (x + 6) \cdot (x + 4) - x \cdot (x + 10) =$$

$$= x^2 + 4x + 6x + 24 - x^2 - 10x = 24$$

Solución: Luego siempre se obtendría el mismo resultado, siendo éste 24.

■ Problema nº 13

El señor Fugimoto ha decidido plantar sandías en su pequeño huerto ecológico; lo que pasa es que, cuando han ido creciendo, las ha metido en cajas ortoédricas cuyas dimensiones son 42 cm de largo, 30 cm de ancho y 27 cm de alto, para que adquirieran esa forma.



Sabiendo que la corteza tiene un grosor de 2 cm y que, del resto, solo un 7% es compuesto sólido, contesta razonadamente ¿cuántos litros de líquido contiene cada sandía?

✓ **Solución:**

Si atendemos a lo que nos pide el problema tenemos:

- Nos pide los litros de líquido que contiene la sandía.
- Por lo tanto, habrá que saber que parte de la sandía es líquida.
- Entonces lo primero que haremos será hallar el volumen de la sandía.
- Pero teniendo en cuenta que para el cálculo de dicho volumen no podemos considerar la corteza.
- Por consiguiente, empezaremos calculando las dimensiones de la sandía sin corteza.

Con la información dada en el enunciado tendríamos:

$$\text{Largo} = 42 - 2 - 2 = 38 \text{ cm}$$

$$\text{Ancho} = 30 - 2 - 2 = 26 \text{ cm}$$

$$\text{Alto} = 27 - 2 - 2 = 23 \text{ cm}$$

Una vez conocidas las dimensiones de la sandía sin corteza pasamos a calcular su volumen:

$$V_{\text{sandía}} = V_{\text{ortopedro}} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$$

$$V_{\text{sandía}} = V_{\text{ortopedro}} = 38 \cdot 26 \cdot 23 = 22724 \text{ cm}^3$$

IMPORTANTE: Nos informan que solamente el 7% de la sandía es sólida, ¿cuál será la cantidad de líquido que contiene?

Si sólido solo es el 7%, el resto, es decir, el 93% es lo que corresponde a líquido:

$$93\% \text{ de } 22724 \text{ cm}^3 = 21133.32 \text{ cm}^3$$

Por último, habrá que calcular los litros de líquido que contiene y para ello únicamente tendremos que cambiar de unidades:

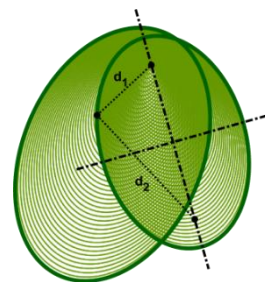
RECORDATORIO: 1 litro equivale a 1 dm³ o lo que es igual a 1000 cm³

Con lo cual obtendremos: $\frac{21133.32}{1000} = 21.1332 \text{ litros} \cong 21.13 \text{ litros}$

Solución: Cada sandía contiene aproximadamente 21.13 litros de líquido.

■ Problema nº 14

En una de las Olimpiadas de Matemáticas realizada hace años acudieron 300 alumnos. El objetivo al igual que este año era resolver correctamente los seis problemas propuestos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: 275 alumnos resolvieron el primer problema, 268 resolvieron el segundo, 252 el tercero, 246 el cuarto, 239 el quinto y por último 230 resolvieron el sexto.



Contesta de forma razonada cuál fue el número mínimo de olímpicos que resolvieron correctamente los seis problemas.

✓ **Solución:**

Para resolverlo, analizamos los datos que nos da el problema.

Del total de 300 alumnos:

- 275 resuelven correctamente el P1, luego lo tienen mal 25
- 268 resuelven correctamente el P2, luego lo tienen mal 32
- 252 resuelven correctamente el P3, luego lo tienen mal 48
- 246 resuelven correctamente el P4, luego lo tienen mal 54
- 239 resuelven correctamente el P5, luego lo tienen mal 61
- 230 resuelven correctamente el P6, luego lo tienen mal 70

Como nos piden el número mínimo de alumnos que resuelven correctamente todos los problemas, nos ponemos en el caso más desfavorable, y es que todos los alumnos fallan solo un problema, es decir, el total de alumnos que han fallado algún problema, como máximo es la suma de todos los que han fallado:

$$25 + 32 + 48 + 54 + 61 + 70 = 290$$

Luego el mínimo número de alumnos que tiene todos los problemas bien es:

$$300 - 290 = 10$$

Solución: 10 alumnos como mínimo tenían los 6 problemas bien.

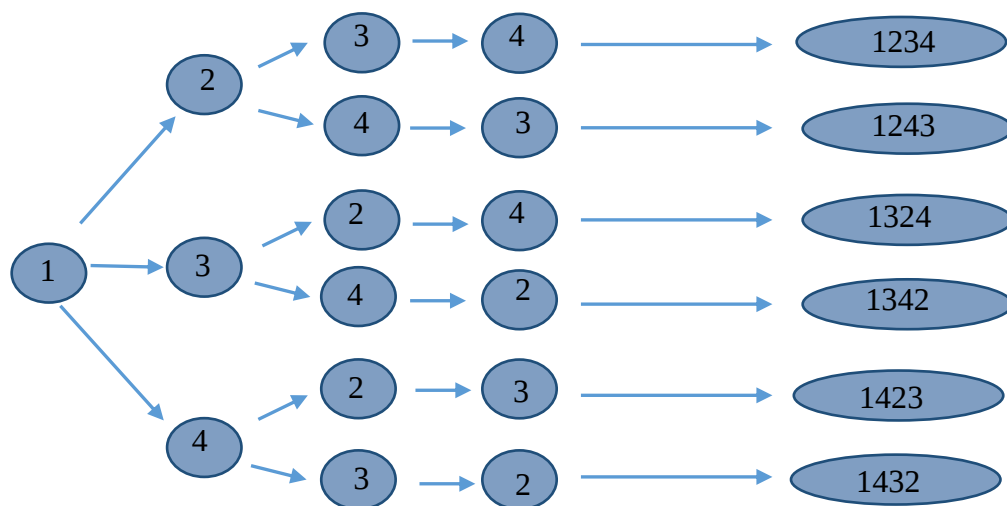
■ Problema nº 15

Indica de forma razonada cuánto valdría la suma de todos los números de cuatro cifras que se puedan formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4.

✓ **Solución:**

En primer lugar tenemos que tener claro que solo tenemos los dígitos 1, 2, 3 y 4, esto es, no se podrán repetir.

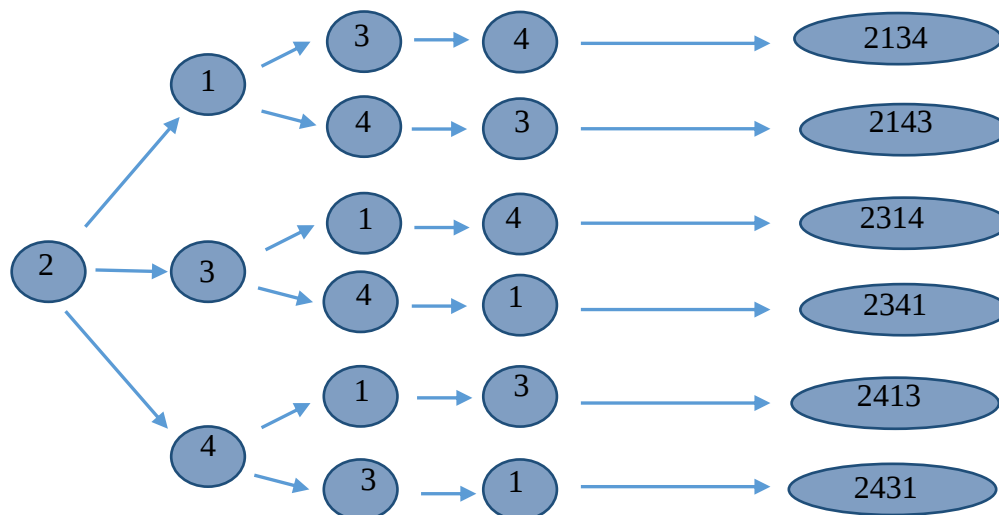
- a) Veamos las posibilidades que tendríamos si colocamos el dígito 1 en la primera posición.



En este caso la suma de los números de cuatro cifras que obtenemos son:

$$1234 + 1243 + 1324 + 1342 + 1423 + 1432 = 7998$$

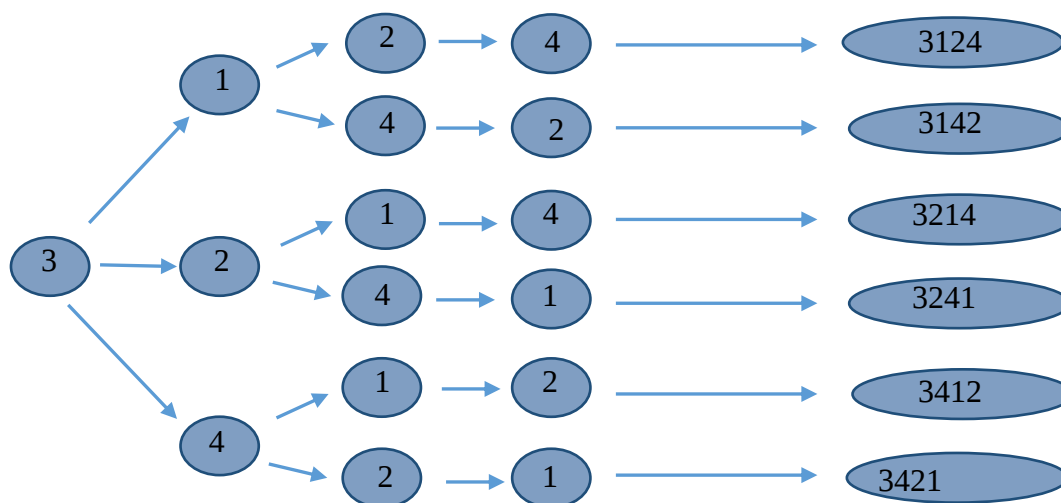
- b) Veamos las posibilidades que tendríamos si colocamos el dígito 2 en la primera posición



En este caso la suma de los números de cuatro cifras que obtenemos son:

$$2134 + 2143 + 2314 + 2341 + 2413 + 2431 = 13776$$

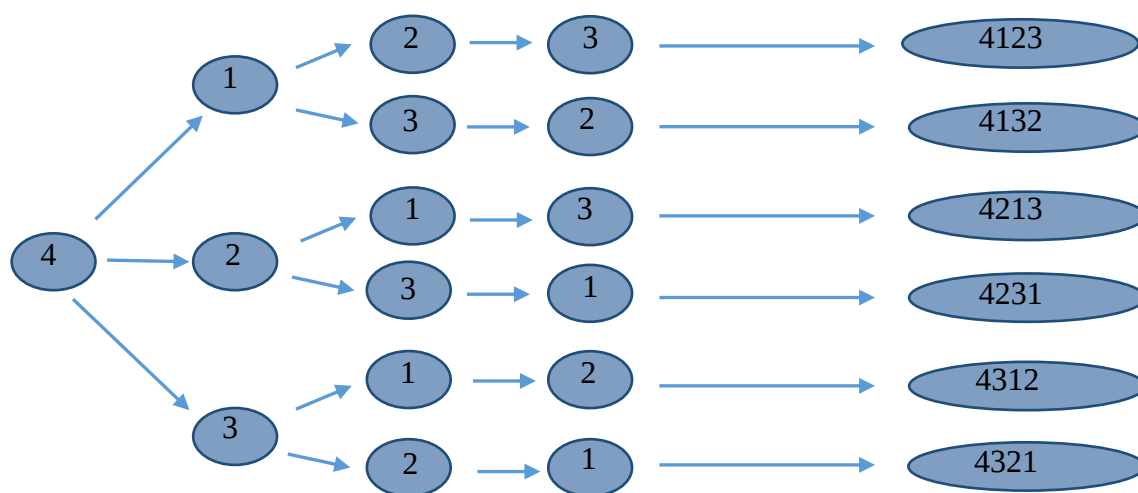
- c) Veamos las posibilidades que tendríamos si colocamos el dígito 3 en la primera posición.



En este caso la suma de los números de cuatro cifras que obtenemos son:

$$3124 + 3142 + 3214 + 3241 + 3412 + 3421 = 19554$$

- d) Y por último veamos las posibilidades que tendríamos si colocamos el dígito 4 en la primera posición.



En este caso la suma de los números de cuatro cifras que obtenemos son:

$$4123 + 4132 + 4213 + 4231 + 4312 + 4321 = 25332$$

Para llegar a la solución del problema lo único que tenemos que hacer es sumar todos los resultados obtenidos en los apartados a), b), c) y d).

$$7998 + 13776 + 19554 + 25332 = 66660$$

✓ Podemos calcularlo de otra forma:

Observamos que este desarrollo en la construcción de los números hace que estos 24 números estén ordenados de menor a mayor por lo tanto si nos fijamos en la suma del primero con el último da como resultado $1234 + 4321 = 5555$; lo mismo sucede con el segundo sumado con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente este proceso se repite con todos.

De este modo nos encontraríamos con doce parejas de números cuya suma es 5555.

Por lo tanto, otra forma de calcular la suma sería hacer $5555 \cdot 12 = 66660$.

Resumiendo, la suma de todos los números de cuatro cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 es 66660.

■ Problema nº 16

Encuentra el nº de 6 cifras $ABCDEF$ que cumple que:

$$ABCDEF \cdot 1 = ABCDEF$$

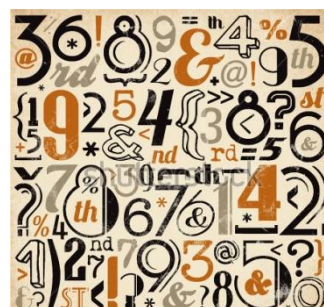
$$ABCDEF \cdot 3 = BCDEFA$$

$$ABCDEF \cdot 2 = CDEFAB$$

$$ABCDEF \cdot 6 = DEFABC$$

$$ABCDEF \cdot 4 = EFABCD$$

$$ABCDEF \cdot 5 = FABCDE$$



Debes de ir deduciendo cifra a cifra su valor y explicar cómo lo haces. (La primera cifra de un número nunca es cero y cada letra solo representa un valor).

✓ Solución:

La primera multiplicación la podemos obviar porque no aporta información. El resto de multiplicaciones quedaría:

$$\begin{array}{r} ABCDEF \quad ABCDEF \quad ABCDEF \quad ABCDEF \quad ABCDEF \\ \cdot \quad \quad 3 \quad \cdot \quad \quad 2 \quad \cdot \quad \quad 6 \quad \cdot \quad \quad 4 \quad \cdot \quad \quad 5 \\ \hline BCDEFA \quad CDEFAB \quad DEFABC \quad EFABCD \quad FABCDE \end{array}$$

De la tercera y la quinta multiplicación deducimos que $A = 1$ porque al multiplicar por 6 ó por 5 el resultado es de 6 cifras. Si $A > 1$, el resultado hubiese tenido 7 cifras.

Siendo $A = 1$ las multiplicaciones quedan de la forma:

$$\begin{array}{r} 1BCDEF \quad 1BCDEF \quad 1BCDEF \quad 1BCDEF \quad 1BCDEF \\ \cdot \quad \quad 3 \quad \cdot \quad \quad 2 \quad \cdot \quad \quad 6 \quad \cdot \quad \quad 4 \quad \cdot \quad \quad 5 \\ \hline BCDEF1 \quad CDEF1B \quad DEF1BC \quad EF1BCD \quad F1BCDE \end{array}$$

Viendo ahora la primera multiplicación deducimos que $F = 7$ pues es el único valor que al multiplicarlo por 3 da como resultado un número que acaba en 1:

$$\begin{array}{r} 1BCDE7 \quad 1BCDE7 \quad 1BCDE7 \quad 1BCDE7 \quad 1BCDE7 \\ \cdot \quad \quad 3 \quad \cdot \quad \quad 2 \quad \cdot \quad \quad 6 \quad \cdot \quad \quad 4 \quad \cdot \quad \quad 5 \\ \hline BCDE71 \quad CDE71B \quad DE71BC \quad E71BCD \quad 71BCDE \end{array}$$

Ahora podemos deducir números más rápidamente. De la segunda multiplicación deducimos que $B = 4$ (ya que $2 \cdot 7 = 14$), de la tercera que $C = 2$ (porque $6 \cdot 7 = 42$), de la cuarta que $D = 8$ ($4 \cdot 7 = 28$) y de la última que $E = 5$ ($5 \cdot 7 = 35$).

Las multiplicaciones quedarían:

$$\begin{array}{r} 142857 \ 142857 \ 142857 \ 142857 \ 142857 \\ \cdot \quad 3 \cdot \quad 2 \cdot \quad 6 \cdot \quad 4 \cdot \quad 5 \\ \hline 428571 \ 285714 \ 857142 \ 571428 \ 714285 \end{array}$$

Faltaría comprobar que las multiplicaciones son correctas, que efectivamente lo son.

Solución: Si $A = 1$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 8$, $E = 5$ y $F = 7$ el número buscado sería 142857.

■ Problema nº 17

El precio del viaje en un autobús urbano es de 60 céntimos de euro si se paga con el bonobús. Las recargas de saldo suelen ser de 5, 10 y 20 euros (no cargables simultáneamente ni divisibles, por ejemplo, no se aceptan recargas de 7 euros, ni recargas de 15, 25, 30, 35, 40, 45 euros, etc.).



Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

- Averigua la mínima cantidad de recargas del bonobús y la cuantía total más barata para tal cantidad de recargas que has de hacer para “limpiar” el bonobús, es decir, que el saldo sea 0 euros. ¿A cuántos viajes equivale la limpieza anterior?
- Si el precio del viaje puede tomar los siguientes valores: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 céntimos de euro, ¿para qué precios se limpia el bonobús al usarlo asiduamente con la cantidad mínima de recarga (5 euros)? y ¿cuántos viajes se realizaría con cada uno de estos precios?

✓ **Solución:**

Primera parte: Como el precio de un viaje en autobús es de 60 céntimos, tenemos que buscar los múltiplos de 60:

60, 120, 180, 240, 300 (que son 3 €)

Vemos que 5 viajes son 3 € y como queremos hacer el menor número de recargas y con la cuantía menor, el múltiplo de 3 más pequeño que podemos encontrar con las posibles recargas es 15: una recarga de 5€ y otra de 10€.

$$15 : 0.6 = 25$$

Con un total de 15 € podemos realizar hasta 25 viajes para que el bonobús quede “limpio”, es decir, sin saldo.

Solución: Con dos recargas, de 5 € y 10 € se pueden realizar 25 viajes y el bonobús quedará limpio.

Segunda parte: Entre todos los precios que puede tomar un viaje, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, y 90 céntimos de euro, buscamos los que son divisores de 500 (5 €), ya que el bonobús debe de quedar limpio.

$$500 : 10 = 50 \longrightarrow 50 \text{ viajes de 10 céntimos}$$

$$500 : 20 = 25 \longrightarrow 25 \text{ viajes de 20 céntimos}$$

$$500 : 30 = 16.66 \rightarrow \text{NO}$$

$$500 : 40 = 12.5 \rightarrow \text{NO}$$

$$500 : 50 = 10 \longrightarrow 10 \text{ viajes de 50 céntimos}$$

$$500 : 60 = 8.33 \rightarrow \text{NO}$$

$$500 : 70 = 7.14 \rightarrow \text{NO}$$

$$500 : 80 = 6.25 \rightarrow \text{NO}$$

$$500 : 90 = 5.55 \rightarrow \text{NO}$$

Resumiendo: Las posibles soluciones para que el bonobús, con una recarga de 5€ quede limpio son: 50 viajes de 10 céntimos, 25 viajes de 20 céntimos, 10 viajes de 50 céntimos.

■ Problema nº 18

Teresa pasa cada verano una semana en El Rocío, la popular aldea de Huelva. Teresa es una enamorada de los caballos. Su padre lo sabe y, por ello, para su

cumpleaños, le ha regalado una preciosa yegua que han bautizado con el bonito nombre de “Marisma”.



En la aldea hay mucho pasto en verano, con lo cual, han preparado un cercado con forma de hexágono regular de ocho metros de lado para que “Marisma” pueda pastar tranquilamente en el terreno interior del cercado aprovechando el estupendo clima veraniego en la aldea.

Cada día de la semana, de lunes a viernes, “Marisma” será atada a uno de los postes, con una cuerda de cuatro metros de lado, en un vértice distinto del cercado y el sábado será atada a un poste situado en el centro del cercado, con la misma cuerda.

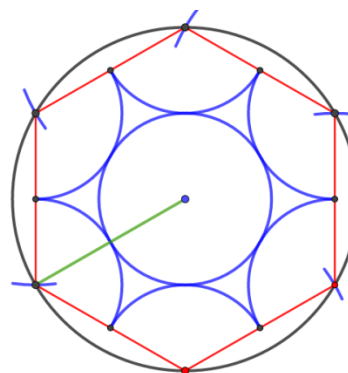
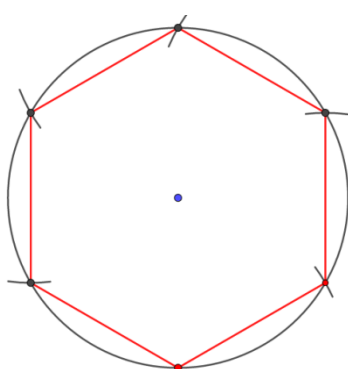
“Marisma” cada día come todo el pasto que tiene a su alcance. Teresa cree que no dejará ni un solo metro cuadrado del interior del cercado sin comer, pero su amiga Isabel cree que no lleva razón y que dejará superficie sin pastar.

¿Quién de las dos está equivocada? Realiza los cálculos pertinentes y, en caso de que Isabel lleve razón, calcula la superficie de pasto que deja sin comer “Marisma”.

Razona la respuesta.

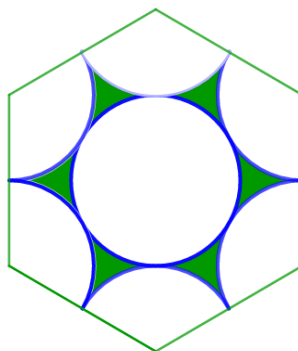
✓ Solución:

Podemos hacer una representación del cercado. Para ello trazamos una circunferencia de radio 8 m, y como en un hexágono regular el lado es igual al radio, trazaremos el hexágono inscrito en la circunferencia tomando como lado 8m.



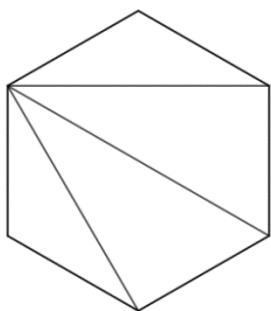
La superficie por la que pastará Marisma son sectores circulares de radio 4 m (la mitad del lado) de lunes a viernes y de un círculo de radio 4 m con centro el del hexágono el sábado.

En el dibujo podemos ver que Isabel tenía razón y que hay zonas a las que Marisma no puede llegar. Esto es debido a que el círculo central es tangente a los demás sectores circulares. El radio del hexágono (8 m) es la suma del radio de uno de los sectores (4 m) más el del círculo central (4 m también).

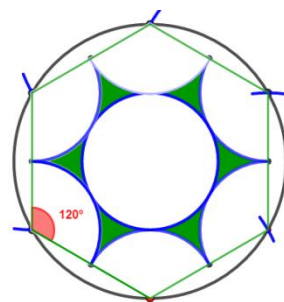


Para calcular la superficie de cercado que se queda sin pastar (en verde en el dibujo) tendremos que restar al área del hexágono la del círculo y la de los sectores circulares.

Para los sectores circulares habrá que calcular el ángulo de cada uno. O bien, con la fórmula para calcular el ángulo interior de un polígono regular $\left(\frac{(n-2) \cdot 180}{n}\right)$, donde n es el número de lados) o bien si no nos acordamos de dicha fórmula triangulando la figura, calculando la suma total de los ángulos de los triángulos formados y dividiendo entre el número de ángulos que tiene el polígono:



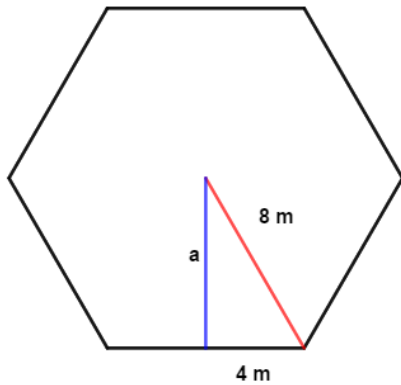
$$\text{Ángulo interior} = \frac{4 \cdot 180}{6} = 120^\circ$$



Como los sectores circulares son de 120°, cada tres sectores forman un círculo. Así, el área pedida es la del hexágono menos la de tres círculos de radio 4 m.

$$\text{Área del hexágono} = A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Para calcular la apotema utilizamos el teorema de Pitágoras:



$$8^2 = a^2 + 4^2$$

$$64 = a^2 + 16$$

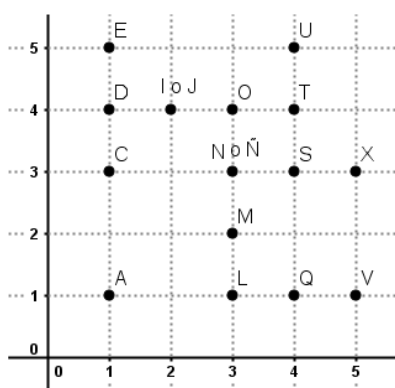
$$a^2 = 48$$

$$a = \sqrt{48} \cong 6.93 \text{ m}$$

- El área del hexágono queda: $A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{48 \cdot 6.93}{2} \cong 166.32 \text{ m}^2$
- El área de los tres círculos queda $A = 3 \cdot \pi \cdot R^2 \cong 150.796474 \dots \text{ m}^2 \cong 150.80 \text{ m}^2$
- El área que quedará sin pastar es: $166.32 - 150.80 \cong 15.52 \text{ m}^2$

Solución: Teresa está equivocada y se queda sin pastar 15.52 m^2

▪ Problema nº 19



Sagrario quiere mandar un mensaje cifrado a su amiga Carmen, y para ello dispone las 16 letras del alfabeto que tiene pensado usar en el 1º cuadrante de unos ejes de coordenadas (como se



observa en la figura) y reemplaza cada una de ellas por el par ordenado (x,y); donde x e y representan, respectivamente, la coordenada horizontal del eje X y la vertical del eje Y.

Así, por ejemplo, el par correspondiente a la letra L es (3,1).

De forma razonada ayuda a Carmen a descifrar el mensaje enviado por Sagrario.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55

PARA RESOLVERLO LE MANDA COMO AYUDALAS SIGUIENTES PISTAS SOBRE LAS POSICIONES DE LAS LETRAS EN EL MENSAJE CIFRADO

- 1) $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$ Corresponde a la misma letra, cuyas coordenadas, al multiplicarlas, nos dan un divisor de 111.
- 2) $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al sumarlas dan el menor número primo posible.
- 3) $3 = 14 = 15 = 34 = 55$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale 12.
- 4) $37 = 51$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al sumarlas sale la parte entera del número 2π .
- 5) $7 = 23 = 28 = 46 = 47$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale el exponente de la factorización del número 32.
- 6) $16 = 38 = 44 = 52$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas, en ese orden, son números consecutivos y su suma es 7.
- 7) $17 = 19 = 24 = 42$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale un cuadrado perfecto impar menor que 16.

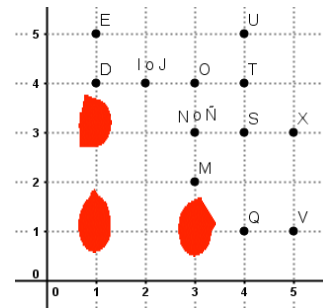
- 8) $11 = 22 = 26 = 50$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas están formadas por dos números pares consecutivos.
- 9) $6 = 10 = 32 = 45$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas son iguales y las más grandes representadas en el diagrama.

✓ Solución:

Comenzamos analizando las pistas una a una y colocando las letras en la posición correcta:

Pista 1: $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$ Corresponde a la misma letra, cuyas coordenadas, al multiplicarlas, nos dan un divisor de 111.

El 111 tiene estos divisores: 1, 3, 37 y 111. Como el 37 y el 111 no se obtienen del producto de ningún par de coordenadas que vienen en los ejes, que usa Sagrario, los descartamos, por lo que nos quedan el 1 y el 3, que se corresponden con las siguientes letras:



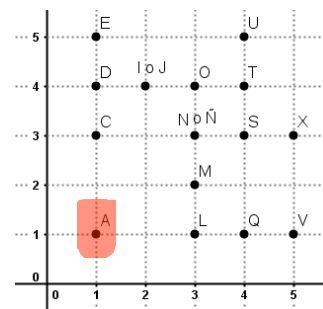
$$(1,1) = A, (1,3) = C, (3,1) = L$$

Pista 1: $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$
 $(1,1) = A \quad (1,3) = C \quad (3,1) = L$

Seguimos analizando el resto de las pistas para decidir cuál es la opción correcta.

Pista 2: $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al sumarlas dan el menor número primo posible.

El menor número primo posible es el 2, el cual solo se puede obtener al sumar $x=1$ con $y=1$, que corresponde con la letra **A**.



Colocamos esta letra en sus respectivos números, y la descartamos de la pista 1.

Pista 1: $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$
 ~~$(1,1) = A$~~ $(1,3) = C$ $(3,1) = L$

Pista 2: $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$
 $(1,1) = A$

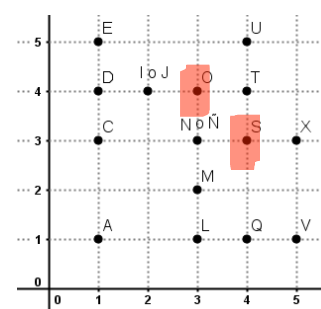
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A			A				A				A							A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
						A			A			A		A			

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
		A													A	

Pista 3: $3 = 14 = 15 = 34 = 55$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale 12.

De nuevo tenemos dos opciones $3 \cdot 4$ y $4 \cdot 3$, que se corresponden con una **O** y una **S**, respectivamente. Seguimos analizando las siguientes pistas para poder descartar una de ellas.



Pista 1: $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$
 ~~$(1,1) = A$~~ $(1,3) = C$ $(3,1) = L$

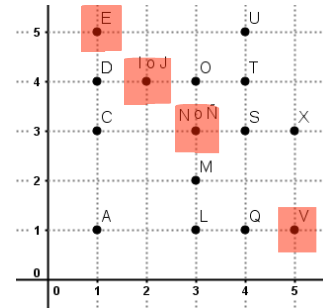
Pista 2: $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$
 $(1,1) = A$

Pista 3: $3 = 14 = 15 = 34 = 55$
 $(3,4) = O$ $(4,3) = S$

Pista 4: 37 = 51 Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al sumarlás sale la parte entera del número 2π .

$$2\pi = 2 \cdot 3.14... = 6.28... \rightarrow \text{La parte entera es 6.}$$

Si observamos la gráfica se puede comprobar que hay varias posibilidades:



$$(5,1) = V, \quad (1,5) = E, \quad (3,3) = N \text{ o } \tilde{N}, \quad (2,4) = I \text{ o } J$$

Pista 1: 12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53

$$(1,1) = A$$

$$(1,3) = C$$

$$(3,1) = L$$

Pista 2: 2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54

$$(1,1) = A$$

Pista 3: 3 = 14 = 15 = 34 = 55

$$(3,4) = O$$

$$(4,3) = S$$

Pista 4: 37 = 51

$$(5,1) = V$$

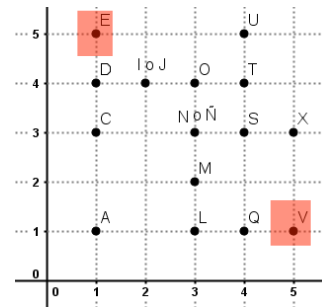
$$(1,5) = E$$

$$(3,3) = N \text{ o } \tilde{N}$$

$$(2,4) = I \text{ o } J$$

Pista 5: 7 = 23 = 28 = 46 = 47 Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale el exponente de la factorización del número 32.

La factorización de $32 = 2^5$, por lo que el exponente es el 5. Tenemos 2 posibles letras:



$$(5,1) = V \quad (1,5) = E$$

Pista 1: 12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53

$$(1,1) = A$$

$$(1,3) = C$$

$$(3,1) = L$$

Pista 2: 2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54

$$(1,1) = A$$

Pista 3: 3 = 14 = 15 = 34 = 55

$$(3,4) = O$$

$$(4,3) = S$$

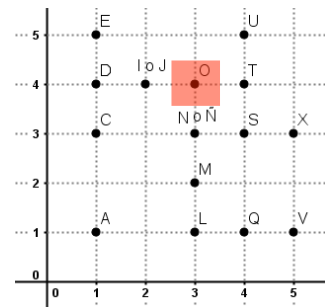
Pista 4: $37 = 51$
 $(5,1) = V$ $(1,5) = E$ $(3,3) = No \tilde{N}$ $(2,4) = IoJ$

Pista 5: $7 = 23 = 28 = 46 = 47$
 $(5,1) = V$ $(1,5) = E$

Pista 6: $16 = 38 = 44 = 52$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas, en ese orden, son números consecutivos y su suma es 7.

La única opción posible es el $3 + 4 = 7$, ya que deben ser números consecutivos, por lo que se trata de la letra **O**.

Esta pista nos descarta una de las posibles soluciones de la pista 3.



Pista 1: $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$
 ~~$(1,1) = A$~~ $(1,3) = C$ $(3,1) = L$

Pista 2: $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$
 $(1,1) = A$

Pista 3: $3 = 14 = 15 = 34 = 55$
 ~~$(3,4) = O$~~ $(4,3) = S$

Pista 4: $37 = 51$
 $(5,1) = V$ $(1,5) = E$ $(3,3) = No \tilde{N}$ $(2,4) = IoJ$

Pista 5: $7 = 23 = 28 = 46 = 47$
 $(5,1) = V$ $(1,5) = E$

Pista 6: $16 = 38 = 44 = 52$
 $(3,4) = O$

Colocamos las letras **O** y **S** en el mensaje secreto.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	S		A				A				A	S	S	O				A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
						A			A			A	S	A			O

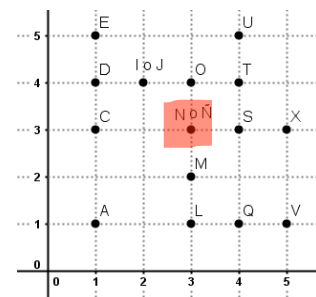
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
		A			O								O		A	S

Pista 7: $17 = 19 = 24 = 42$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas al multiplicarlas sale un cuadrado perfecto impar menor que 16.

Los cuadrados perfectos menores de 16 son: 1, 4 y 9.

Impares son el 1 y el 9, y el 1, que se corresponde con la letra A, ya estaba seleccionado en pistas anteriores, por lo que nos queda el 9, que se corresponde con $3 \cdot 3$.

Con lo que tenemos $(3,3) = N \text{ o } \tilde{N}$ y descartamos estas letras de la pista 4.



Pista 1: $12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53$

~~$(1,1) = A$~~

$(1,3) = C$

$(3,1) = L$

Pista 2: $2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54$

$(1,1) = A$

Pista 3: $3 = 14 = 15 = 34 = 55$

~~$(3,4) = O$~~

$(4,3) = S$

Pista 4: $37 = 51$

$(5,1) = V$

$(1,5) = E$

~~$(3,3) = N \text{ o } \tilde{N}$~~

$(2,4) = I \text{ o } J$

Pista 5: $7 = 23 = 28 = 46 = 47$

$(5,1) = V$

$(1,5) = E$

Pista 6: $16 = 38 = 44 = 52$

$(3,4) = O$

Pista 7: $17 = 19 = 24 = 42$

$(3,3) = N \text{ o } \tilde{N}$

Colocamos la **N** en el mensaje, y una vez que tenga sentido, podemos cambiarla por la Ñ en las palabras que sea necesario:

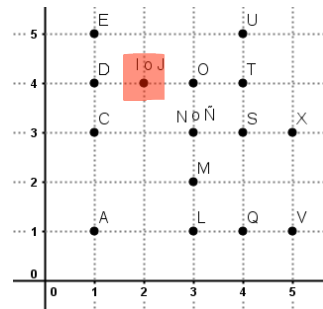
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	S		A				A				A	S	S	O	N		N	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
			N			A			A			A	S	A			O

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
		A	N		O								O		A	S

Pista 8: 11 = 22 = 26 = 50 Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas están formadas por dos números pares consecutivos.

Observando los ejes de coordenadas vemos que los únicos números pares consecutivos posibles son el 2 y el 4, luego las posibles letras son **I o J**.



Con lo que tenemos (2,4) = **I o J** y descartamos estas letras de la pista 4.

<u>Pista 1:</u> 12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53 (1,1) = A (1,3) = C (3,1) = L	
<u>Pista 2:</u> 2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54 (1,1) = A	
<u>Pista 3:</u> 3 = 14 = 15 = 34 = 55 (3,4) = O (4,3) = S	
<u>Pista 4:</u> 37 = 51 (5,1) = V (1,5) = E (3,3) = N o Ñ (2,4) = I o J	
<u>Pista 5:</u> 7 = 23 = 28 = 46 = 47	

$(5,1) = V$	$(1,5) = E$
Pista 6: $16 = 38 = 44 = 52$ $(3,4) = O$	
Pista 7: $17 = 19 = 24 = 42$ $(3,3) = No \tilde{N}$	
Pista 8: $11 = 22 = 26 = 50$ $(2,4) = IoJ$	

Colocamos la **I** en el mensaje secreto, aunque luego podemos cambiarla por la **J** en las palabras que sea necesario para que el mensaje secreto tenga sentido:

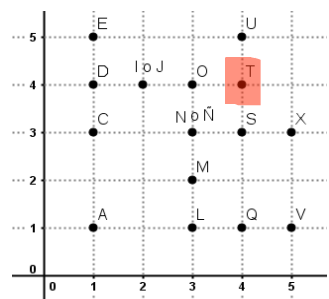
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	S		A				A		I		A	S	S	O	N		N	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
	I		N			I	A			A			A	S	A		O

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
		A	N		O						I		O		A	S

Pista 9: $6 = 10 = 32 = 45$ Corresponde a la misma letra cuyas coordenadas son iguales y las más grandes representadas en el diagrama.

Como las coordenadas deben ser iguales y las más grandes representadas, no pueden ser otras que el par $(4,4)$, que se corresponde con la **T**.



Colocamos la **T** en el mensaje y leemos detenidamente hasta encontrar sentido al mismo y colocar el resto de las letras.

La primera letra del mensaje debe ser una **L**, por lo que la podemos descartar de la pista 1 y colocamos la **C**.

La posición 23 se corresponde con una **E**, coloco las restantes **E**, según la pista 5, y la descarto de la pista 4, por lo que también podemos colocar la **V**.

Pista 1: 12 = 21 = 25 = 31 = 39 = 53 (1,1) = A (1,3) = C (3,1) = L
Pista 2: 2 = 5 = 9 = 13 = 20 = 27 = 30 = 33 = 35 = 41 = 54 (1,1) = A
Pista 3: 3 = 14 = 15 = 34 = 55 (3,4) = O (4,3) = S
Pista 4: 37 = 51 (5,1) = V (1,5) = E (3,3) = No Ñ (2,4) = loJ
Pista 5: 7 = 23 = 28 = 46 = 47 (5,1) = V (1,5) = E
Pista 6: 16 = 38 = 44 = 52 (3,4) = O
Pista 7: 17 = 19 = 24 = 42 (3,3) = No Ñ
Pista 8: 11 = 22 = 26 = 50 (2,4) = loJ
Pista 9: 6 = 10 = 32 = 45 (4,4) = T

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
L	A	S		A	T	E		A	T	I	C	A	S	S	O	N		N	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
C	I	E	N	C	I	A	E		A	C	T	A	S	A		V	O

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
C		A	N		O	T	E	E			I	V	O	C	A	S

Hecho todo esto, ya podemos fácilmente terminar de descifrar el mensaje. Para ello colocamos el resto de las letras aún sin usar, que aparecen en los ejes de coordenadas, en las casillas que están vacías de tal modo que el mensaje resultante tenga sentido:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
L	A	S	M	A	T	E	M	A	T	I	C	A	S	S	O	N	U	N	A

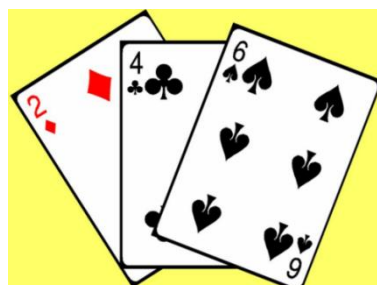
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
C	I	E	N	C	I	A	E	X	A	C	T	A	S	A	L	V	O

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
C	U	A	N	D	O	T	E	E	Q	U	I	V	O	C	A	S

Solución: “LASMATEMATICAS SON UNA CIENCIA EXACTA, SALVO CUANDO TE EQUIVOCAS”

■ **Problema nº 20**

Debemos colocar las 20 cartas que tenemos, que son del 1 al 10 de corazones y del 1 al 10 de tréboles de forma que al tenerlas boca abajo, la primera carta al voltearla debe ser el As de corazones, la siguiente la pasamos debajo del mazo sin mirarla y volteamos la siguiente, que debe ser el dos de corazones, la siguiente la pasamos debajo del mazo sin mirarla y volteamos la siguiente que debe ser el tres de



corazones y así hasta que se acabe volteando todas las cartas, que deberán ir apareciendo en el siguiente orden:

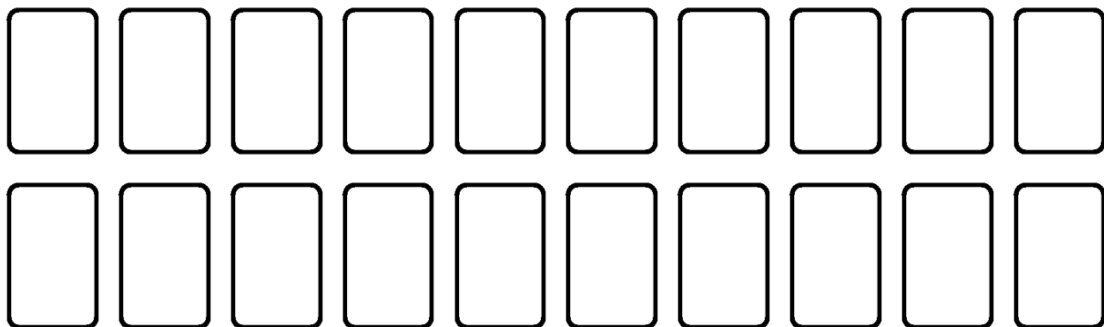
1♥ – 2♥ – 3♥ – 4♥ – 5♥ – 6♥ – 7♥ – 8♥ – 9♥ – 10♥

1♣ – 2♣ – 3♣ – 4♣ – 5♣ – 6♣ – 7♣ – 8♣ – 9♣ – 10♣

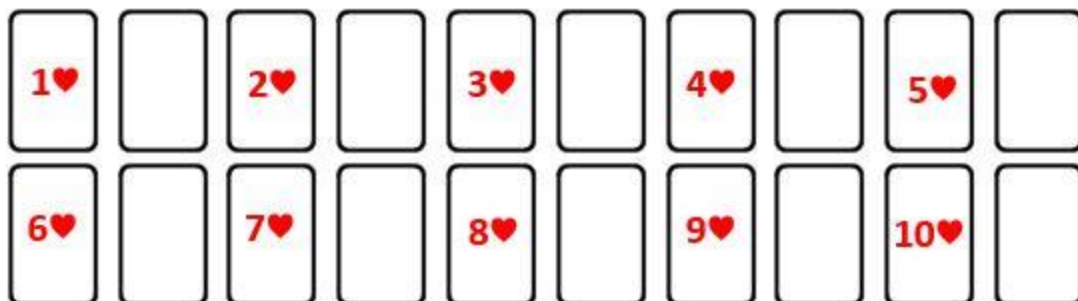
✓ **Solución:**

La solución no es única, pero teniendo en cuenta que vamos a tener que alternar, la colocación de las diez primeras cartas de corazones, serán fáciles de colocar, porque entre cada una de las cartas de corazones tendrá que ir una carta de trébol.

Vamos a usar una plantilla para colocar las veinte cartas.



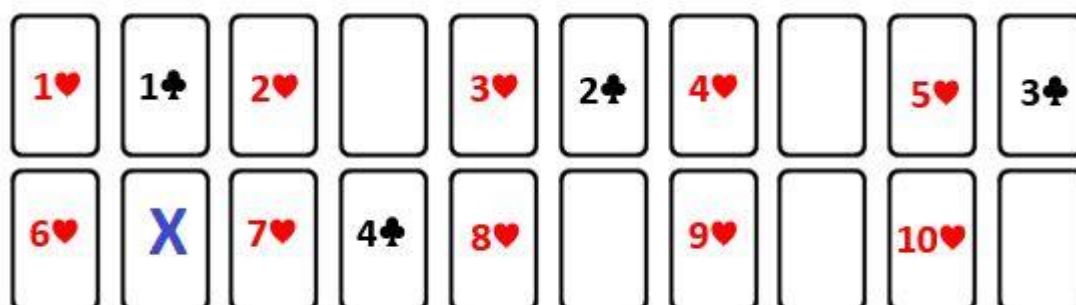
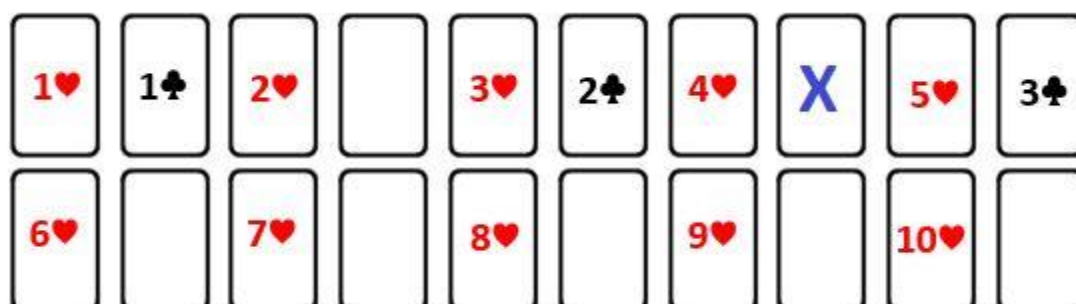
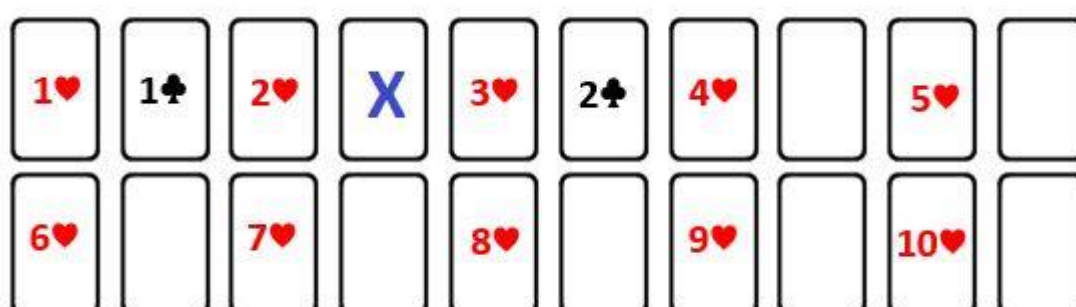
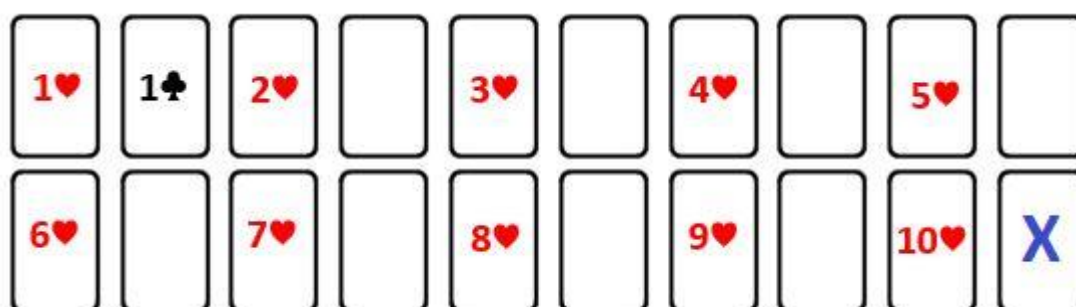
Comenzamos colocando las primeras diez cartas de corazones, que deberán ser ubicadas en cartas alternativas.



A continuación, respetando las cartas que ya están colocadas, iremos colocando los tréboles, teniendo en cuenta, al igual que antes, que debemos ir saltando una carta.

El salto de carta lo vamos a ir señalando con una cruz en la posición a saltar.

Esta es la secuencia:



1♥	1♣	2♥		3♥	2♣	4♥		5♥	3♣
6♥		7♥	4♣	8♥	X	9♥	5♣	10♥	

1♥	1♣	2♥	6♣	3♥	2♣	4♥		5♥	3♣
6♥		7♥	4♣	8♥		9♥	5♣	10♥	X

1♥	1♣	2♥	6♣	3♥	2♣	4♥	X	5♥	3♣
6♥	7♣	7♥	4♣	8♥		9♥	5♣	10♥	

1♥	1♣	2♥	6♣	3♥	2♣	4♥		5♥	3♣
6♥	7♣	7♥	4♣	8♥	X	9♥	5♣	10♥	8♣

1♥	1♣	2♥	6♣	3♥	2♣	4♥	X	5♥	3♣
6♥	7♣	7♥	4♣	8♥	9♣	9♥	5♣	10♥	8♣

Y finalmente colocamos el 10 de tréboles en el hueco que nos queda, que es la posición octava de las veinte cartas iniciales, siendo **la solución**:



No es la única forma de conseguir la solución, si colocamos el mazo en orden inverso y realizamos la operación, al contrario, es decir, tomando cartas en lugar de sacando cartas, y subiendo la última carta hacia arriba, las cartas finalmente quedarán ordenadas como en la solución.

