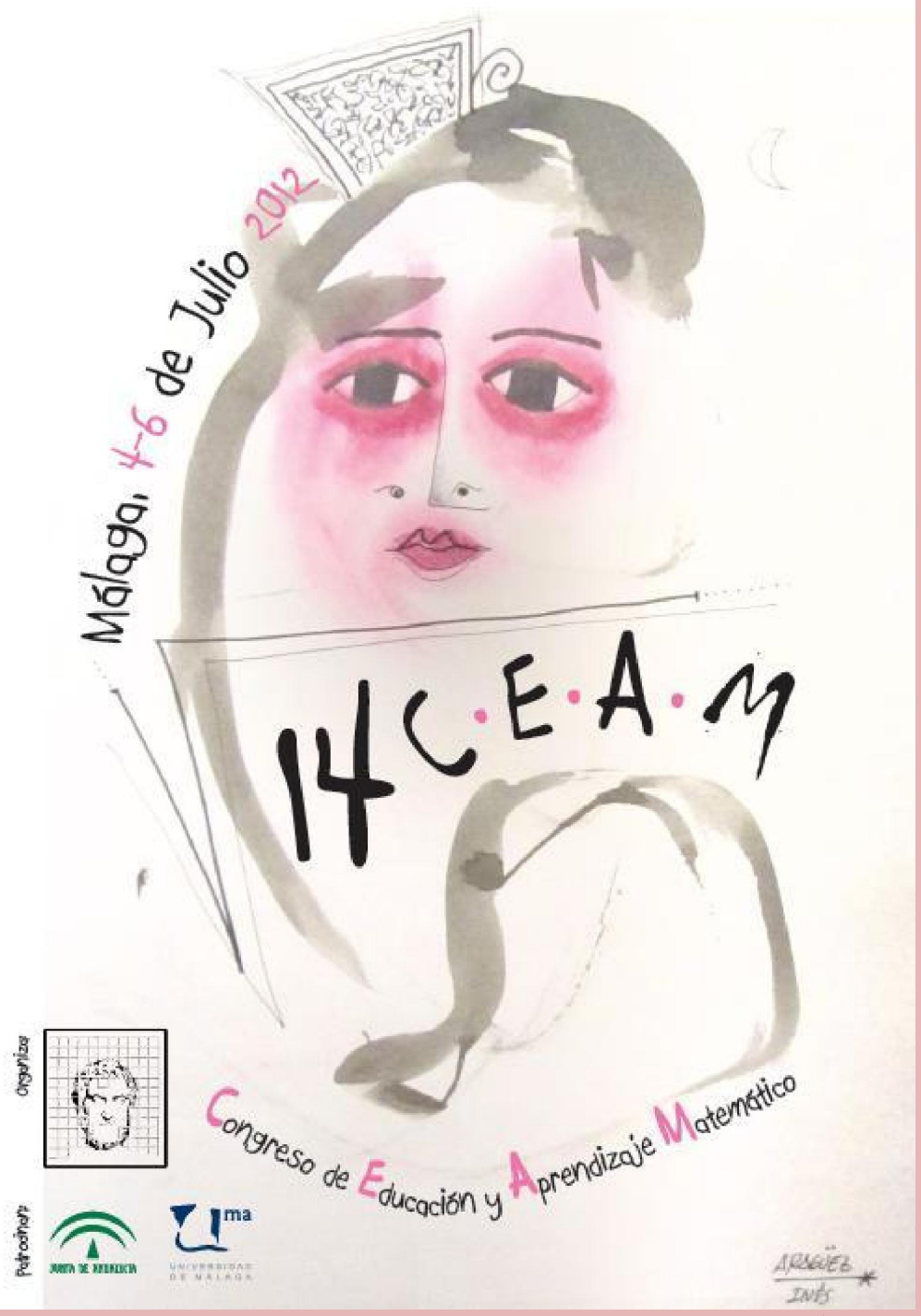



Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES

# ACTAS

# DIVERSIDAD Y MATEMÁTICAS

**Editores: Francisco España Pérez y Mª Belén Sepúlveda Lucena**

**ISBN: 978-84-15641-03-2**

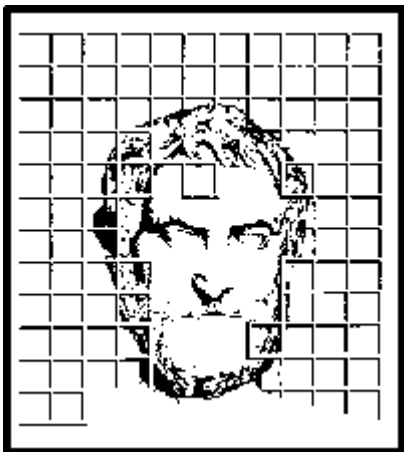
# ACTAS

**DEL**

# XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

## "DIVERSIDAD Y MATEMÁTICAS"

## Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES



Málaga, del 4 al 6 de Julio de 2012

Editan: Francisco España Pérez y Mª Belen Sepúlveda Lucena

ISBN: 978-84-15641-03-2

© Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES

http://thales.cica.es/xivceam

# ÍNDICE

**Presentación.** 3

**Comités**. 4

**Entidades, Organismos y Empresas Organizadoras o Colaboradoras.** 5

**Estadísticas.** 6

**Plano de espacios.** 8

**Cuadro horario general.** 9

**Distribución horaria de los talleres.** 10

**Distribución horaria de las comunicaciones y zocos.** 11

**Conferencias plenarias (por orden temporal).** 12

EXPERIMENTOS CON POMPAS DE JABÓN: UNA APROXIMACIÓN A LA GEOMETRÍA. 13

CUATRO CLAVES PARA EL ÉXITO EN LA CLASE DE MATEMATICAS. 14

EL APRENDIZAJE COOPERATIVO COMO MEDIDA DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y MEJORA DEL RENDIMIENTO PERSONAL. 16

LEYENDO MATEMÁTICAS. 16

PASEANDO ENTRE LA MATEMÁTICA RECREATIVA Y LA PROGRAMACIÓN RECREATIVA. 36

**Comunicaciones (por orden numérico)** 37

COM-01 UNA EXPERIENCIA DE PUESTA EN PRÁCTICA DE APRENDIZAJE COOPERATIVO EN EL AULA. 38

COM-02 LEEMOS DIBUJAMOS Y HACEMOS PROGRESIONES. 46

COM-03 INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA SOBRE LA PRESIÓN ARTERIAL. 51

COM-04 LAS SITUACIONES (DIDÁCTICAS) DE FORMACIÓN MATEMÁTICA O LAS COMPETENCIAS DEL SABER "ENSEÑADO". 58

COM-05 ESTUDIO DE INECUACIONES DE DOS VARIABLES. 68

COM-06 POESÍA VISUAL Y MATEMÁTICAS. 79

COM-07 DESARROLLO COLABORATIVO DE COMPETENCIAS EN LA ESCUELA TIC 2.0. 84

COM-08 USO DE LA PIZARRA DIGITAL INTERACTIVA EN EL PIV-040/11. 94

COM-09 MATEMÁTICA INFORMAL Y SENTIDO NUMÉRICO EN ESCOLARES DEL PRIMER CICLO DE PRIMARIA. 102

COM-10 LA CONSTRUCCIÓN DEL REPARTO EN EL AULA PREESCOLAR: UN PROBLEMA MATEMÁTICO Y LAS COMPETENCIAS DE RESOLUCIÓN. 109

COM-11 CINE Y MATEMÁTICAS. 117

COM-12 CÓMO ENSEÑAR MATEMÁTICA RECREATIVA EN PROFUNDIZA. 118

COM-13 COMPRENSIÓN DE FRECUENCIAS Y REPRESENTACIONES ASOCIADAS A LAS TABLAS DE CONTINGENCIA. 129

| | | |
|---|---|---|
| COM-14 | GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN UNA SERIE DE LIBROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA. | 139 |
| COM-15 | PATRONES, COMUNICACIÓN Y REFLEXIÓN EN MATEMÁTICAS. | 149 |
| COM-16 | INTERPOLACIÓN POLINÓMICA Y DIVISIÓN DE SECRETOS. | 160 |
| COM-17 | EL TABLÓN DE LAS MATES. | 166 |
| COM-18 | MATERIALES DIGITALES DE MATEMÁTICAS PARA SECUNDARIA. | 176 |
| COM-19 | ITINERARIO CURRICULAR PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS DE 3º DE ESO. | 186 |
| COM-20 | PROPUESTAS PARA EL DOCENTE DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA: MATEMÁTICAS Y CIENCIAS A TRAVÉS DE LA LITERATURA INFANTIL. | 196 |
| COM-21 | JUGANDO CON LA CICLOIDE. | 207 |
| COM-22 | CURVAS Y TRAYECTORIAS. | 217 |
| COM-23 | INVENTAR PROBLEMAS: UNA FORMA DE DESARROLLAR LAS COMPETENCIAS BÁSICAS. | 220 |
| COM-24 | EL INSTITUTO DE ESTADÍSTICA Y CARTOGRAFÍA DE ANDALUCÍA. | 227 |
| COM-25 | *FUNCIONES DE CRECIMIENTO - UNA EXPERIENCIA DE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE BASADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, CON GEOGEBRA.* | 237 |
| COM-26 | ANÁLISIS DE UNA EVALUACIÓN DIVERSA EN MATEMÁTICA EMPRESARIAL. | 247 |
| COM-27 | CONCEPCIONES PERSONALES DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE ALCANZABILIDAD Y REBASABILIDAD DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. | 257 |
| COM-28 | 1812: A VER QUÉ SE ME OCURRE. | 264 |
| **TALLERES (por orden numérico)** | | 271 |
| TA-01 | LA DISCOTECA DE LOS NÚMEROS. | 272 |
| TA-02 | DINÁMICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO. | 276 |
| TA-03 | COMPRENDIENDO LA CORRELACIÓN A PARTIR DE SUS REPRESENTACIONES. | 277 |
| TA-04 | ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA CON LA PLATAFORMA R-ESTADÍSTICA 2.0. | 283 |
| TA-05 | MODELIZANDO EL MUNDO. | 286 |
| TA-06 | UNA PROPUESTA: INCORPORAR ALGUNOS CONCEPTOS DE GRAFOS EN DISTINTOS NIVELES DE ESCOLARIDAD. | 291 |
| TA-07 | PIENSA UN NÚMERO. | 296 |
| TA-08 | LA CALCULADORA CIENTÍFICA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. | 302 |
| TA-09 | CÁLCULO SIMBÓLICO Y GRÁFICO CON CALCULADORA. | 305 |
| TA-10 | MODELOS Y PROBLEMAS CON LA CLASSPAD 330. | 320 |
| TA-11 | CREACIÓN DE ACTIVIDADES GEOGEBRA EN MOODLE. | 325 |
| TA-12 | GEOGEBRA EN EL BLOQUE DE ANÁLISIS. | 328 |
| TA-13 | GEOGEBRA Y LA DIVERSIDAD EN EL AULA. | 332 |
| TA-14 | CONSULTAS SENCILLAS Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN ESTADÍSTICA: SIMA. | 337 |

TA-15 MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA. 341
TA-16 MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS Y EL ÁLGEBRA. 342
TA-17 MARCAPÁGINAS MATEMÁTICO: PROPUESTAS PARA INCLUIR LA LECTURA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. 343
TA-18 INTRODUCCIÓN AL GEOGEBRA 3D. 350
TA-19 TALLER MATEMÁTICAS EN LA MAGIA. 360
**Zocos** (por orden numérico) 361
ZOC-01 MATEMÁTICAS RECREATIVAS. 362
ZOC-02 LA DISCOTECA DE LOS NÚMEROS. 364
ZOC-03 GEOMETRÍA FLEXIBLE CON POLIEDROS 3D. 368

# PRESENTACIÓN

*"No hago nada sin alegría"*
**Montaigne**

*"Un libro no debe requerir esfuerzo,*
*la felicidad no debe requerir un esfuerzo"*
**J.L. Borges**

*"Poner un libro en manos de un ignorante es*
*tan peligroso como poner una espada en las manos de un niño"*
**San Anselmo**

Prologar unas actas de un congreso no es tarea fácil. Inicio esta tarea con cierto temor a defraudar a propios y extraños pero sobre todo a aquellos que desde hace treinta y un años venimos apostando por todo lo que significa defender una enseñanza comprometida, dinámica, rigurosa y amena de las Matemáticas. Este comportamiento en colaboración en pro de la mejora de la enseñanza de las Matemáticas debe perdurar como espacio no cerrado de convivencia y realidad.

No olvidemos que las Pirámides de Gizhe, los Jardines de Babilonia, el Faro de Alejandría, la Muralla China, la Torre de Pisa, el Taj Mahal, el Coloso de Rodas; los versos de Federico García Lorca, Miguel Hernández, Rafael Alberti, Pablo Neruda, Rubén Darío y Antonio Machado, entre otros, pertenecen a nuestro modo habitual de observar y leer; y Pitágoras, Thales, Al-Jwarizmi, Leonardo da Vinci, Newton, Leibniz, Cauchy, Lagrange, Hilbert, Freudenthal,… presentes en nuestro quehacer profesional diario. Son historias marcadas por el tiempo y, a veces, denigradas por el hábito y también olvidadas en nichos obscuros de la memoria y parece que renacen en el ego humano necesario para añadir a nuestra voluntad de proseguir su trabajo, el trabajo de todos.

La historia, la filosofía, la geometría, la investigación educativa, el aprendizaje cooperativo, la atención a la diversidad, la mejora del rendimiento personal, el arte, la ciencia, la economía, la cultura, las Matemáticas en mayúsculas, la lectura en matemáticas, la matemática recreativa, los números, la estadística, la poesía, las modelización matemática, las representaciones gráficas, la calculadora científica, el cálculo científico, la programación dinámica, la enseñanza de las matemáticas, los recursos, la lectura en matemáticas, la interdisciplinariedad, la convivencia, el descubrimiento, la arquitectura, la cosmología, la formación matemática, las competencias en matemáticas, las ecuaciones, la comunicación, el cine y matemáticas, la matemática recreativa, los patrones, la reflexión en matemáticas, los polinomios, los materiales digitales, los itinerarios curriculares, el humanismo,… son temas que se han desarrollado del 4 al 6 de julio de 2012 en el XIV CEAM, por los autores que se citan en las páginas siguientes y que conforman una unión conjuntista de saberes con una visión particular del mundo de las matemáticas.

¡Han sido muchas horas de trabajo! El empeño que han puesto los autores de los trabajos con su presentación en el congreso y su recopilación por parte de

los compañeros de la SAEM Thales en Málaga en estas actas, deben servir como una herramienta de uso importante en el aula para aquellos que encuentren una motivación de su implantación, si lo desean, en clase.

Después de la elección como Presidente de la SAEM Thales, en la asamblea del 6 de julio en el marco del XIV CEAM, es un honor para mí pero sobre todo un deber abrir las actas con una reflexión que os invito a hacerla desde nuestro estatus-quo de profesor. La influencia cultural e ideológica en la masa ciudadana va induciendo a pensar de una determinada forma, de manera que determinados modelos sociales son considerados como deseables y correctos, y en consecuencia se convierten en una aspiración que todo ciudadano percibe como normal. Esta conformación social llega hasta tal punto que logra que aquellos individuos que se apartan del patrón de conducta políticamente correcto sean considerados como inadaptados y en pocas ocasiones marginados, ridiculizados e incluso perseguidos como consecuencia de su oposición a la corriente cultural dominante. En este caso las Matemáticas deben jugar un papel importante.

En la moderna sociedad del conocimiento y de la información, los medios de comunicación desempeñan el rol principal a la hora de difundir ideas y cultura. No solo la realidad cotidiana, ya sea política, cultural e histórica nos llega a través de la descripción que de ella hacen los medios, condicionando consecuentemente nuestra percepción de esa realidad, sino que los valores que defienden, explícita o implícitamente, son transmitidos al ciudadano, que acaba por aceptar y hacer suyos a base de recibir repetida y masivamente los mismos mensajes.

La SAEM Thales, desde la modestia, con las actividades que viene desarrollando desde 1981, pretende contribuir al desarrollo de la sociedad del conocimiento, en la que el uso de las Matemáticas como ciencia en colaboración permanente con las artes, otras ciencias, las humanidades y las tecnologías constituye un pilar básico solucionador de problemas y generador de conocimiento, bienestar y riqueza en una sociedad innovadora, creativa, culta, desarrollada y libre. Representa, nuestra Sociedad:

- La confluencia de diferentes personas que pertenecientes a todos los niveles educativos del mundo profesional de la docencia e investigación en Matemáticas se han unido por un deseo y afán común de impulsar y estimular la enseñanza de una asignatura que desde siempre ha estado considerada como "asignatura coco" para los estudiantes y ciudadanos en general.

- La contribución a la canalización de los problemas culturales, así como a la potenciación y avance con ilusión en el desarrollo de todo tipo de actividades científicas y/o tecnológicas, a fin de constituir una institución que pudiera aglutinar tales inquietudes y evolucionar en dichos ámbitos.

Convencidos de que esas propuestas nos ayudarán a conseguir los objetivos planteados, es necesario ejercitar, y si se me permite, ser ambiciosos para seguir impulsando todo tipo de eventos: jornadas, simposios, olimpiadas, seminarios, congresos, propuestas educativas,… que nos permita mirarnos con satisfacción y orgullo en ese espejo denominado EDUCACIÓN MATEMÁTICA y no ser nunca conformistas como algunos la consideran de ESTRUCTURA IMAGINARIA SIMBÓLICA de un determinado grupo humano.

Unas actas, estas actas, pretenden ser siempre la mejor expresión y el reflejo de una actitud abierta hacia el conocimiento y la cultura en Educación Matemática.

Gracias a todos los participantes y a las instituciones como las Consejerías de Educación, Economía, Innovación, Ciencia y Empleo, la Universidad de Málaga, el Centro del Profesorado del Profesorado de la provincia de Málaga, la Universidad de Córdoba, la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Málaga, Flamagas, SM y Tutor Mates, y a la propia SAEM Thales que siempre han creído en nuestro proyecto. Con esta obra se culmina un caminar de varios años de los socios participantes y organizadores. También quiero aprovechar la ocasión para recordar a los ausentes socios de nuestra sociedad: su MEMORIA es también un eslabón del porvenir.

Como dice Jorge Luís Borges: *"De los diversos instrumentos del hombre, el más asombroso es, sin duda, el libro. Lo demás son extensiones de su cuerpo. El microscopio, el telescopio, son extensiones de su vista; el teléfono es extensión de la voz; luego tenemos el arado y la espada, extensiones de su brazo. Pero el libro es otra cosa: el libro es una extensión de la memoria y de la imaginación".*
¡Qué así sea con estas actas!

Sixto Romero Sánchez
Presidente de la SAEM Thales
sixto@uhu.es

# COMITES

## COMITÉ DE PROGRAMA

Dña. Rosa Mª Arcos de Torres
D. Miguel de la Fuente Martos
D. Salvador Guerrero Hidalgo
D. José Fco. Miras Ruiz
D. Antonio Moreno Verdejo
Dña. Mª Eugenia Ruiz Ruiz
Dña. Mª Belén Sepúlveda Lucena

## COMITÉ ORGANIZADOR

Dña. Rosa Mª Arcos de Torres
D. Manuel Barbero Díaz
Dña. Ana Bueno Jiménez
D. José Antonio Cabrerizo Cabrerizo
Dña. Mª de la Luz Fernández Mena
Mª Begoña García Álvarez
D. Antonio García Arrabal
Dña. Inmaculada Gómez Jurado
D. Víctor González Díaz
D. Francisco González Ternero
D. Salvador Guerrero Hidalgo (Presidente)
Dña. Mª Teresa Lebrón Gallardo
D. Francisco López Fernández
Dña. Aurora Martínez Ortega
D. José Fco. Miras Ruiz
Dña. Inmaculada Ortega Guerrero
D. Luís Pérez Bernal
Dña. Dolores Pineda Narváez
D. Francisco Sánchez Rodríguez
Dña. Mª Belén Sepúlveda Lucena
Dña. Mercedes Siles Molina

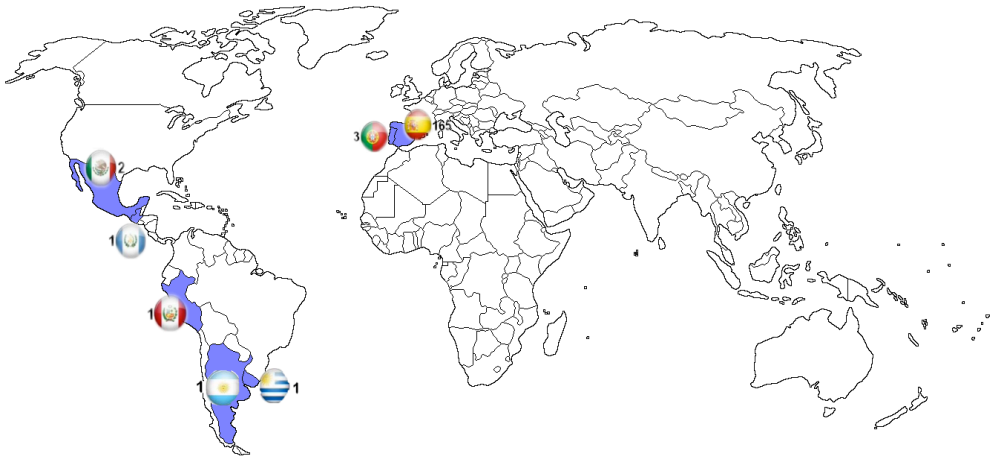
# ORGANIZA

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática THALES

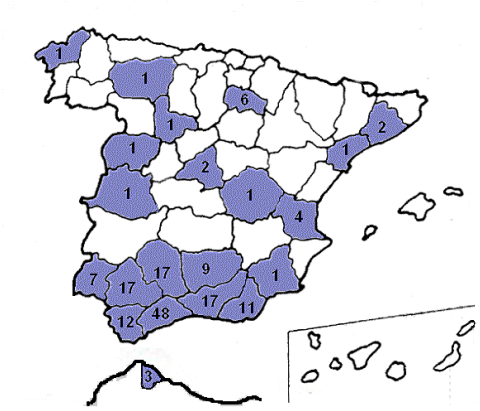
# COLABORAN

# ESTADÍSTICAS

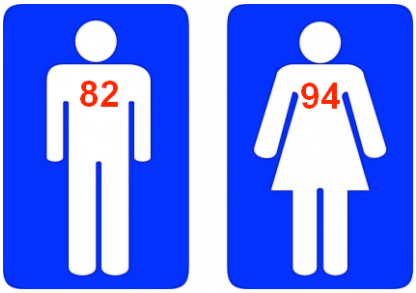
## Participantes por países




## Participantes por provincias españolas

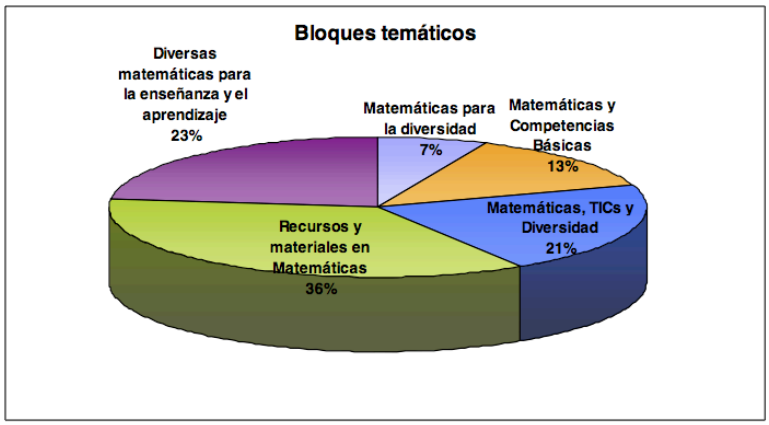



## Partcipantes por sexo

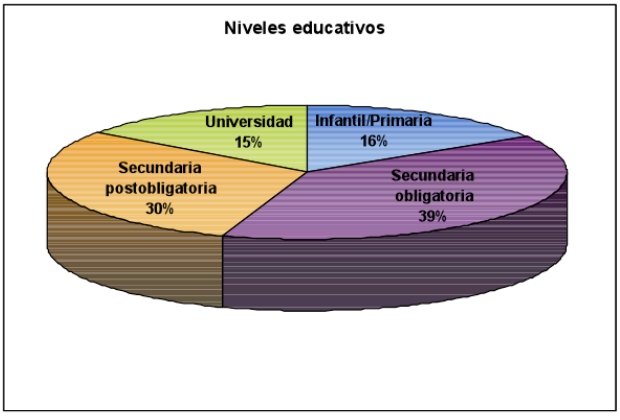


# Por tipo de trabajo, bloque temático y nivel educativo

| Bloque temático / Tipo de trabajo | Matemáticas para la diversidad | Matemáticas y Competencias Básicas | Matemáticas, TICs y Diversidad | Recursos y materiales en Matemáticas | Diversas matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Talleres | 2 | 2 | 7 | 7 | 4 | 22 |
| Comunicaciones | 1 | 6 | 6 | 12 | 10 | 35 |
| Zocos | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 4 |
| **Total Bloques asignados** (con multiplicidades) | 4 | 8 | 13 | 22 | 14 | |



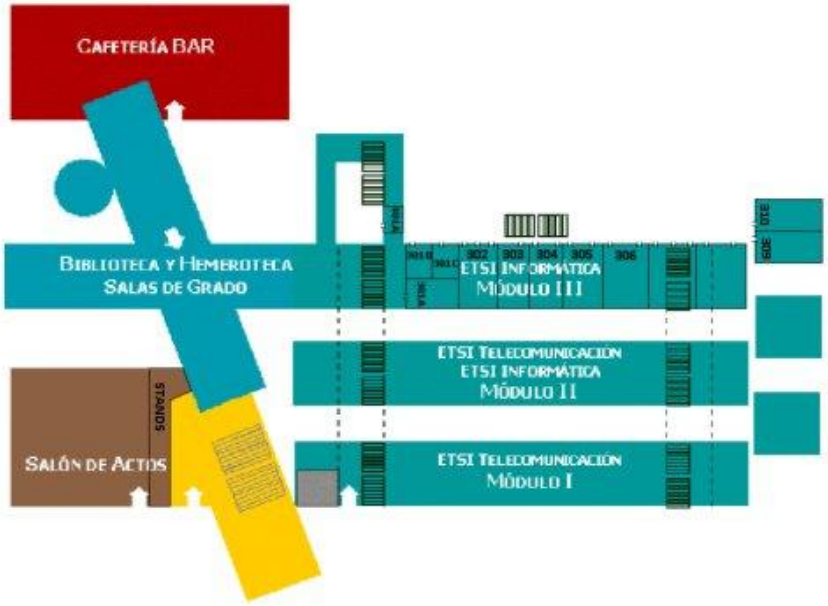

| Nivel Educativo / Tipo de trabajo | Infantil y Primaria | Secundaria Obligatoria | Secundaria Postobligatoria | Universidad | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|
| Talleres | 7 | 16 | 15 | 4 | 42 |
| Comunicaciones | 5 | 16 | 9 | 8 | 38 |
| Zocos | 2 | 2 | 2 | 1 | 7 |
| **Total Niveles educativos asignados** (con multiplicidades) | 14 | 34 | 26 | 13 | |



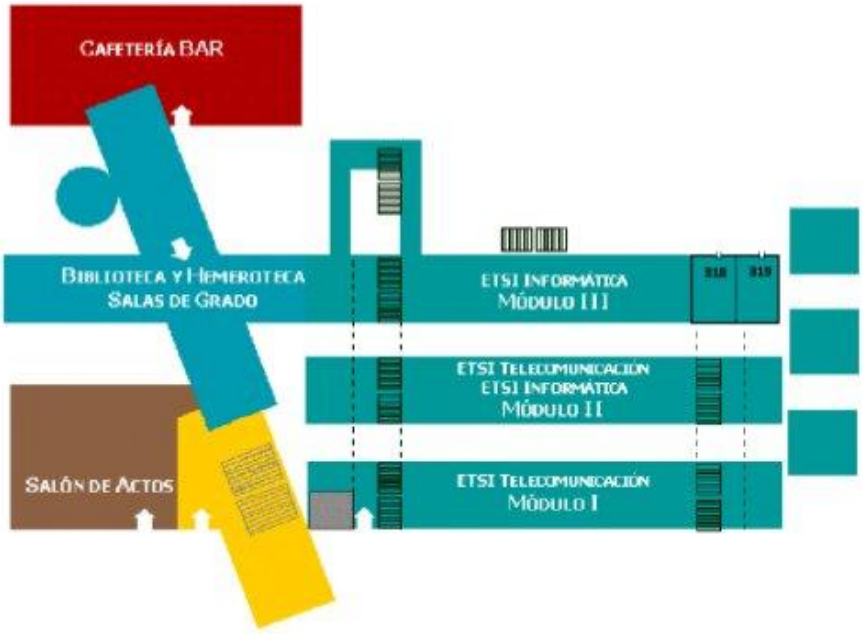
# ESPACIOS USADOS PARA EL CONGRESO

## EDIFICIO DE LA ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES E INFORMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MÁLAGA.

### Planta baja




### Primera planta



# CUADRO HORARIO GENERAL

| | Miércoles 4/7/2012 | Jueves 5/7/2012 | Viernes 6/7/2010 |
|---|---|---|---|
| 9:00 | | Talleres | |
| 9:30 | | | Asamblea SAEM Thales |
| 10:00 | Entrega de documentación | | |
| 10:30 | | | Conferencia plenaria **Marta Macho Stadler** |
| 11:00 | | DESCANSO | |
| 11:30 | | Conferencia plenaria ***Xavier Vilella*** | |
| 12:00 | Inauguración | | Entrega de premios CASIO |
| 12:30 | Conferencia Inaugural Rafael López Camino | | Presentación Pósteres y Zoco |
| 13:00 | | Comunicaciones | |
| 13:30 | | | |
| 14:00 | COMIDA | | |
| 16:00 | | | |
| 16:30 | Talleres | Comunicaciones | Talleres |
| 17:00 | | | |
| 17:30 | | Mesa Redonda | |
| 18:00 | | | |
| 18:30 | Talleres | | Conferencia de clausura ***Blas Ruiz Jiménez*** |
| 19:00 | | Conferencia plenaria ***Paloma Gavilán Bouzas*** | |
| 19:30 | | | |
| 20:00 | | | Clausura del congreso |
| 20:30 | Comunicaciones | | |
| 21:00 | | | |
| 21:30 | | Cena | |

# DISTRIBUCIÓN HORARIA DE LOS TALLERES

| AULA / Día | Hora | 302 | 303 | 304 | Laboratorio 319 | Laboratorio 318 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Miércoles 4/7/12 | 16:00 a 18:00 | TA-19 MATEMÁTICAS EN LA MAGIA (SyB) | TA-5 MODELIZANDO EL MUNDO (SyB) | TA-7 PIENSA UN NÚMERO (PyS) | TA-11 CREACIÓN DE ACTIVIDADES GEOGEBRA EN MOODLE (Todos) | |
| Miércoles 4/7/12 | 18:00 a 20:00 | TA-1 LA DISCOTECA DE LOS NÚMEROS (IyP) | TA-8 LA CALCULADORA CIENTÍFICA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS (S) | TA-17 MARCAPÁGICAS MATEMÁTICO: PROPUESTAS PARA INCLUIR LA LECTURA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS (PyS) | TA-12 GEOGEBRA EN EL BLOQUE DE ANÁLISIS (B) | TA-3 COMPRENDIENDO LA CORRELACIÓN A PARTIR DE SUS REPRESENTACIONES (SyB) |
| Jueves 5/7/12 | 9:00 a 11:00 | TA-15 MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA (P,SyB) | TA-10 MODELOS Y PROBLEMAS CON LA CLASSPAD 330 (SyB) | TA-6 UNA PROPUESTA: INCORPORAR ALGUNOS CONCEPTOS DE GRAFOS EN DISTINTOS NIVELES DE ESCOLARIDAD (SyU) | TA-13 GEOGEBRA Y LA DIVERSIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS (Todos) | ~~TA-4 ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA CON LA PLATAFORMA R-ESTADÍSTICA 2.0 (ByU)~~ |
| Viernes 6/7/12 | 16:00 a 18:00 | TA-2 DINÁMICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO (Todos) | TA-9 CÁLCULO SIMBÓLICO Y GRÁFICO CON LA CALCULADORA (SyB) | TA-16 MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS Y EL ÁLGEBRA (P,SyB) | TA-18 INTRODUCCIÓN A GEOGEBRA 3D (SyB) | TA-14 CONSULTAS SENCILLAS Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN ESTADÍSTICA: SIMA (SyB) |

**Descripción de las siglas usadas para los Niveles Educativos (que se indican entre paréntesis)**

**IyP**: Infantil y Primaria
**SyB**: Secundaria y Bachillerato
**S**: Secundaria
**B**: Bachillerato
**SyB**: Secundaria y Bachillerato
**SyU**: Secundaria y Universidad
**PyS**: Primaria y Secundaria
**ByU**: Bachillerato y Universidad
**T**: Todos los niveles
**P,SyB**: Primaria, Secundaria y Bachillerato

# DISTRIBUCIÓN HORARIA DE LAS COMUNICACIONES Y ZOCOS[1]

| AULA | | 302 | 303 | 304 | 305 | 309 | 310 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Día | Hora | | | | | | |
| Miércoles 4/7/12 | 20:00 a 20:30 | COM-27 CONCEPCIONES PERSONALES DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE ALCANZABILIDAD Y REBASABILIDAD DEL LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO (B) | | | | | |
| Jueves 5/7/12 | 13:00 a 13:30 | COM-2 LEEMOS, DIBUJAMOS Y HACEMOS PROGRESIONES (S) | COM-5 ESTUDIO DE INECUACIONES (S) | COM-3 INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA SOBRE LA PRESIÓN ARTERIAL (B) | COM-9 MATEMÁTICAS INFORMAL Y SENTIDO NUMÉRICO EN ESCOLARES (PyU) | COM-17 EL TABLÓN DE MATES (SyB) | COM-14 GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN UNA SERIE DE LIBROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA (PyU) |
| Jueves 5/7/12 | 13:30 a 14:00 | COM-21 JUGANDO CON LA CICLOIDE (S) | COM-19 ITINERARIO CURRICULAR PARA EL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS DE 3º DE ESO (S) | COM-1 UNA EXPERIENCIA DE PUESTA EN PRÁCTICA DE APRENDIZAJE COOPERATIVO EN EL AULA (SyB) | COM-4 LAS SITUACIONES (DIDÁCTICAS) DE FORMACIÓN MATEMÁTICA O LAS COMPETENCIAS DEL SABER "ENSEÑADO" (U) | COM-26 ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DIVERSA EN MATEMÁTICA EMPRESARIAL (U) | COM-24 EL INSTITUTO DE ESTADÍSTICA Y CARTOGRAFÍA DE ANDALUCÍA (S) |
| Jueves 5/7/12 | 16:00 a 16:30 | COM-7 DESARROLLO COLABORATIVO DE COMPETENCIAS EN LA ESCUELA TIC 2.0 (S) | COM-13 COMPRENSIÓN DE FRECUENCIAS Y REPRESENTACIONES ASOCIADAS A LAS TABLAS DE CONTINGENCIA (U) | COM-12 REFLEXIONES SOBRE CÓMO ENSEÑAR MATEMÁTICA RECREATIVA EN PROFUNDIZA (P) | COM-10 LA CONSTRUCCIÓN DEL REPARTO EN EL ALLA DE PREESCOLAR (IyU) | COM-28 1812: A VER QUÉ SE ME OCURRE (B) | COM-25 FUNCIONES DE CRECIMIENTO: UNA EXPERIENCIA DE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE BASADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA (SyB) |
| Jueves 5/7/12 | 16:30 a 17:00 | COM-8 USO DE LA PIZARRA DIGITAL INTERACTIVA EN EL PIV-040/11 (S) | COM-16 INTERPOLACIÓN POLINÓMICA Y LA DIVISIÓN DE SECRETOS (ByU) | COM-6 POESÍA VISUAL Y MATEMÁTICAS (SyB) | COM-15 PATRONES, COMUNICACIÓN Y REFLEXIÓN EN MATEMÁTICAS (S) | | |
| Viernes 6/7/12 | 13:00 a 14:00 | Los autores de los Zocos estarán en las zonas que se habilitarán para su presentación. | | | | COM-22 CURVAS Y TRAYECTORIAS (S) | COM-20 PROPUESTAS PARA EL DOCENTE DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA: MATEMÁTICAS Y CIENCIAS A TRAVÉS DE LA LITERATURA INFANTIL (IyU) |
| | | | | | | COM-23 INVENTAR PROBLEMAS: UNA FORMA DE DESARROLLAR LAS COMPETENCIAS BÁSICAS (S) | COM-11 CINE Y MATEMÁTICAS: ZAPEANDO LAS MATEAS (SyB) |

[1] La exposición de cada Comunicación contará con un máximo de 20 minutos, más otros 5 minutos de coloquio con los asistentes

# CONFERENCIAS PLENARIAS

En la web de las actas (http://thales.cica.es/xivceam/actas) se puede acceder a algunas de las presentaciones de diapositivas que usaron los conferenciantes.

# EXPERIMENTOS CON POMPAS DE JABÓN: UNA APROXIMACIÓN A LA GEOMETRÍA

**Rafael López Camino**
Catedrático de Geometría
Universidad de Granada

## RESUMEN

Las pompas de jabón producen formas naturales que visualmente son muy atractivas. Generalmente dichas formas son esféricas, como también ocurre cuando se introduce una gota de aceite en agua. Este hecho geométrico se explica por el principio físico de que cualquier sistema tiende a buscar un estado de menor energía. Fenómenos parecidos suceden cuando se introduce una estructura de alambre en una solución de agua con jabón y se retira posteriormente: se produce una película jabonosa que tiene la propiedad de tener área superficial mínima de entre todas las posibles superficies bordeadas por el mismo armazón de alambre.
Matemáticamente, las pompas y las películas de jabón forman parte de la familia de las superficies con curvatura media constante. Estas superficies constituyen un campo de interacción común para los matemáticos y físicos. A los primeros, les conducen a un gran número de métodos y problemas complejos y a los segundos les aportan información relevante ya que estas superficies son modelos de fenómenos de capilaridad y de interfaces a nivel microscópico.

Durante la conferencia se realizarán una serie de experimentos con pompas de jabón, poniendo el énfasis en los problemas matemáticos que se encuentran detrás de ellos. Con ello se quiere mostrar que, partiendo de un simple juego, las películas jabonosas constituyen para un profesor de matemáticas, un recurso didáctico que se puede incorporar en el aula y que permite motivar al alumno en el estudio de la geometría de las curvas y superficies.

# CUATRO CLAVES PARA EL ÉXITO EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

**Xavier Vilella Miró**
Profesor del IES Vilatzara de Mar
Formador de Profesores

## RESUMEN

No existe ningún aula que no sea diversa. No existe la homogeneidad. No existen recetas milagrosas para atender la diversidad, un hecho complejo que demanda soluciones complejas.

En cambio, existe mucha experiencia acumulada por parte del profesorado que analiza sus clases, evalúa la consecución de sus objetivos, intenta desarrollar competencia en su alumnado, contrasta sus opiniones con sus compañeros y compañeras, y con la investigación educativa, y toma decisiones respecto a enriquecer sus propuestas y acciones en el aula, y la gestión de la actividad del alumnado.

Mi experiencia, sumada a las investigaciones que he podido realizar en diferentes equipos de investigación educativa, y al aprendizaje que me ha supuesto la realización de actividades de formación del profesorado en unos 120 centros en los últimos 6 años (desde Infantil y Primaria, hasta la Universidad), me permiten proponer 4 claves para conseguir no solamente atender la diversidad sino también desarrollar las competencias del alumnado y aumentar el nivel.

Estas se refieren a: la propuesta de tareas que llevamos al aula, la gestión de la actividad que su puesta en marcha produce, la evaluación y la programación.

# EL APRENDIZAJE COOPERATIVO COMO MEDIDA DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y MEJORA DEL RENDIMIENTO PERSONAL

**Paloma Gavilán Bouzas,**
Universidad de Alcala ́(Madrid)
**Raquel Alario Gavilán,**
Escuela Municipal de Muśica de Cabanillas del Campo (Guadalajara)

## RESUMEN

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere una metodología activa que impulse tanto la autonomía de los estudiantes como su cooperación. El Aprendizaje Cooperativo se nos presenta como una alternativa a para conseguirlo y, además, poder atender a la diversidad dentro del aula. Como otras metodologías, ésta tiene también sus limitaciones y sus requisitos básicos para poder ser llevada al aula.

Presentamos los pilares en los que se basa el Aprendizaje Cooperativo y la forma en que este método de trabajo contribuye eficazmente al desarrollo de las competencias básicas de nuestros estudiantes; particularmente nos permite trabajar competencias que no tienen claramente asignadas un área curricular, como la competencia para aprender a aprender, la competencia en autonomía e iniciativa personal o la competencia social y ciudadana.

# LEYENDO MATEMÁTICAS

**Marta Macho Stadler**,
*Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea*

## RESUMEN.

En la formación de cualquier persona, las ciencias y las letras deben compartir espacio de manera incuestionable, sin antagonismos ni prejuicios. Comprender lo que se lee, saber a razonar, desarrollar la creatividad y adquirir un pensamiento crítico son objetivos esenciales en la enseñanza, y en esta tarea, las ciencias y las letras deben aportar conjuntamente sus especiales singularidades.

En esta conferencia propongo un viaje para demostrar que las ciencias y las letras armonizan: os invito a pasear desde las páginas de algunos textos literarios hasta conocidos problemas matemáticos. Pero, ¿es esto posible? Por supuesto, nuestro día a día está impregnado de matemáticas... la literatura no podía escapar de esta influencia.

**Nivel educativo**: Educación primaria y secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

¿Matemáticas? ¿Literatura? ¿Geometría? ¿Gramática? ¿Están tan alejadas las unas de las otras? Para ver que realmente no es así, vamos a leer algunas definiciones en el diccionario de la Real Academia Española (http://www.rae.es):

**Elipse** (del lat. *ellipsis,* y este del gr. □λλειψις).
f. *Geom.* Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos llamados focos es constante. Resulta de cortar un cono circular por un plano que encuentra a todas las generatrices del mismo lado del vértice (ver Figura 1).

**Elipsis** (Del lat. *ellipsis,* y este del gr. □λλειψις, falta).
f. *Gram.* Figura de construcción, que consiste en omitir en la oración una o más palabras, necesarias para la recta construcción gramatical, pero no para que resulte claro el sentido.
*Con estas y con otras leyes y estatutos nos conservamos y vivimos alegres; somos señores de los campos, de los sembrados, de la selvas, de los montes, de las fuentes, de los ríos; los montes nos ofrecen leña de balde; los árboles, frutos; las viñas, uvas.* Miguel de Cervantes

**Hipérbola** (del lat. *hyperbŏla,* y este del gr. □περβολ□).
f. *Geom.* Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Resulta de cortar un cono circular por un plano que encuentra a todas las generatrices a ambos lados del vértice (ver Figura 1).
**Hipérbole** (del lat. *hyperbŏle,* y este del gr. □περβολ□).

1. f. *Ret.* Figura que consiste en aumentar o disminuir excesivamente aquello de que se habla.
2. f. Exageración de una circunstancia, relato o noticia.

*Porque te miro y muero.* Mario Benedetti

**Parábola** (del lat. *parabŏla,* y este del gr. παραβολ□).
2. f. *Geom.* Lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta y de un punto fijos, que resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a una generatriz (ver Figura 1).
1. f. Narración de un suceso fingido, de que se deduce, por comparación o semejanza, una verdad importante o una enseñanza moral.

*Un cachorro, perdido en la selva, vio un tigre corriendo en su dirección. Comenzó a pensar rápido para salvarse, vio unos huesos en el suelo y comenzó a morderlos. Cuando el tigre estaba casi para atacarle, el cachorro dijo en alto: - ¡Ah, este tigre que acabo de comer estaba delicioso! El tigre, muerto de miedo, huyó mientras pensaba para sí: - ¡Menudo cachorro feroz! ¡Por poco me come también! Un mono que había visto todo, fue detrás del tigre y le contó cómo había sido engañado. El tigre se puso furioso... El cachorro vio que el tigre regresaba con el mono y pensó: - ¡Ah, mono traidor! ¿Y qué hago ahora? Se puso de espaldas al tigre y cuando éste llegó y estaba preparado para darle el primer zarpazo, el cachorro dijo: - ¡Será perezoso el mono! ¡Hace una hora que le mandé para que me trajese otro tigre y todavía no ha vuelto!*

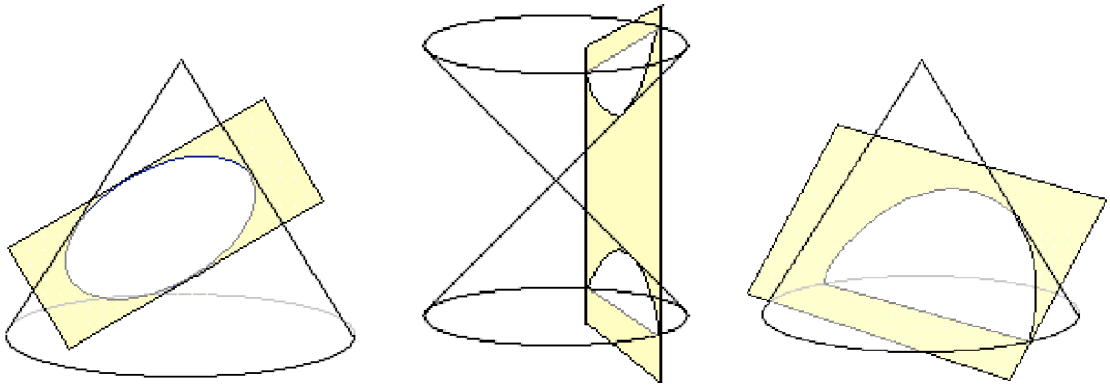


Figura 1. Las tres cónicas: elipse, hipérbola y parábola.

¡Qué sorpresa! ¡Cada cónica tiene una figura retórica que le corresponde de manera natural! Sigamos viendo otros ejemplos en los que las ciencias y las letras se mezclan...

## 2. MATEMÁTICA ¿LENGUAJE UNIVERSAL?

En *El planeta de los simios* de Pierre Boulle (1912-1994), el protagonista utiliza el teorema de Pitágoras y las cónicas para demostrar a la mona que es un ser inteligente:

*¿Cómo no se me había ocurrido utilizar este medio tan sencillo? Tratando de recordar mis estudios escolares, tracé sobre el carné la figura geométrica que ilustra el* ***teorema de Pitágoras****. No escogí este tema por casualidad. Recordé que, en mi juventud, había leído un libro sobre empresas del futuro en el que se*

*decía que un sabio había empleado este procedimiento para entrar en contacto con inteligencias de otros mundos.* […]

*Ahora era ella la que se mostraba ávida de establecer contacto. Di las gracias mentalmente a* ***Pitágoras*** *y me atreví un poco más por la* ***vía geométrica****. Sobre una hoja de carné dibujé lo mejor que supe las tres* ***cónicas*** *con sus ejes y sus focos; una* ***elipse****, una* ***parábola*** *y una* ***hipérbola****. Después, sobre la hoja de enfrente, dibujé un* ***cono de revolución****. Debo recordar que la intersección de un cuerpo de esta naturaleza con un plano es una de las tres cónicas que siguen el ángulo de intersección. Hice la figura en el caso de la elipse y, volviendo mi primer dibujo, indiqué con el dedo a la maravillada mona la curva correspondiente.*

La obra *Mario* de Marcel Pagnol (1895-1974) tiene lugar en Marsella (Francia). César es el dueño de un bar y ha enviado a su hijo Mario a estudiar a la capital. Con una paciencia infinita, César intenta explicar a su *torpe* hijo como preparar uno de sus combinados estrella:

CÉSAR: *Pones primero* ***un tercio*** *de curaçao. Pero ten cuidado: un* ***tercio pequeñito****. Bueno. Ahora* ***un tercio*** *de limón. Un poco más grande. Bueno. Ahora* ***un BUEN tercio*** *de Amer Picón. Mira el color. Fíjate que bonito es. Y al final,* ***un GRAN tercio*** *de agua. Ya está.*[…]

MARIO: *En un vaso, no hay más que tres tercios.*

CÉSAR: *Pero imbécil, ¡eso depende del* ***tamaño de los tercios****!*

¡Pobre César! ¿Para qué tanto estudio, si su hijo es incapaz de entender algo tan elemental? Si Mario hubiera ido a esta escuela de matemáticas descrita en *Los viajes de Gulliver* de Jonathan Swift (1667-1745), su formación sería mucho mejor:

*Fui a una* ***escuela de matemática****, donde el profesor instruía a sus discípulos siguiendo un método difícilmente imaginable entre nosotros en Europa. La* ***proposición*** *y la* ***demostración*** *parecían escritas claramente en una oblea fina con tinta hecha de un colorante cefálico. Esto tenía que tragárselo el estudiante con el estómago en ayunas y no comer nada sino pan y agua durante los tres días que seguían. Al digerir la oblea, el colorante se le subía al cerebro llevándose la proposición al mismo tiempo. Pero hasta ahora el resultado ha defraudado, ya por algún error de* ***dosis*** *o de composición, ya por la picardía de los mozalbetes, a quienes da tanto asco esa píldora que por lo general se escabullen subrepticiamente y la expulsan por arriba antes de que pueda hacer efecto; y tampoco se les ha persuadido todavía para que guarden una abstinencia tan larga como exige la receta.*

## 3. JUGANDO CON LA LÓGICA.

Comenzamos con una cita de *El Quijote* de Miguel de Cervantes (1547-1616): en el tiempo en el que Sancho fue gobernador de la ínsula Barataria, tuvo que resolver complicadas situaciones que le planteaban sus súbditos para que impartiera justicia; asombró a todos con las atinadas decisiones. Una de las más conocidas, es la siguiente paradoja:

*– Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo della, una horca y*

*una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma:* "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna"*.* […]

*Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que* iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. *Repararon los jueces en el juramento y dijeron:* "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre".

*Pídese a vuesa merced, señor gobernador, qué harán los jueces con tal hombre.*

Sancho, buen gobernador –y por lo tanto justo–, decide que dejarle pasar...

El teatro del absurdo proporciona deliciosas lecciones de lógica. En este fragmento de *El Rinoceronte* de Eugène Ionesco (1909-1994) vamos a ver una demostración –muy lógica– de que Sócrates era un gato. Con el símbolo [...] se indica en este caso que hay otras conversaciones mezcladas con ésta entre el Lógico y el Caballero:

EL LÓGICO*: ¡He aquí, pues, un* ***silogismo*** *ejemplar! El gato tiene cuatro patas. Isidoro y Fricot tienen cada uno cuatro patas. Ergo Isidoro y Fricot son gatos.*

EL CABALLERO: *Mi perro también tiene cuatro patas.*

L: *Entonces, es un gato.* […]

C (después de haber reflexionado largamente)*: Así, pues, lógicamente, mi perro sería un gato.*

L: *Lógicamente sí. Pero lo contrario también es verdad.* […]

C*: Es hermosa la* ***lógica****.*

L: *A condición de no abusar de ella.* [...] *Otro silogismo: todos los gatos son mortales. Sócrates es mortal. Ergo, Sócrates es un gato.*

C*: Y tiene cuatro patas. Es verdad. Yo tengo un gato que se llama Sócrates.*

L: *Ya lo ve usted… […]*

C*: ¿Sócrates, entonces, era un gato?*

L: *La* ***lógica*** *acaba de revelárnoslo. […] El gato Isidoro tiene cuatro patas.*

C: *¿Y usted como lo sabe?*

L: *Resulta de la* ***hipótesis****.* […]

C*: ¡Ah, por hipótesis!* […]

L: *Fricot también tiene cuatro patas. ¿Cuántas patas tendrán Fricot e Isidoro?*

C*: ¿Juntos o separados?* […]

L: *Juntos o separados, es según.* […]

C (después de haber reflexionado trabajosamente)*: Ocho, ocho patas.*

L: *La* ***lógica*** *lleva al* ***cálculo mental****.*

C: *Tiene muchas facetas.*

L: *¡La* ***lógica*** *no tiene límites!* […]

*Alicia en el País de las maravillas* de Lewis Carroll es un libro en el que la lógica está muy presente. Quiero traerla a estas páginas a través de *Alicia volátil* de Sofía Rhei (1978-):

*Alicia, ya adulta, y el reverendo Dodson, casi anciano, intercambian una serie de cartas, en las que lo que no está escrito es más importante que lo visible. La última de esas cartas, que no llega a ser enviada, sino que es deslizada por el reverendo por detrás del azogue de un espejo, provoca que la Alicia del pasado y la del presente se fundan en una sola, y reconstruyan el viaje a un país de las maravillas que no son sólo las de la mente, sino también las del laberinto del cuerpo.*

*Cada vez que Alicia tiene que escoger entre comer de un lado o de otro de la seta, o beberse un líquido con un letrero sospechoso, lo que está en juego no es su tamaño físico, sino su edad. El regreso al país de las maravillas es un paseo en el que la Alicia anciana dialoga con la que sólo es una niña, y la mujer con la adolescente. Todas se asombran de cosas diferentes.*

*Su mente ha ido cambiando a la medida de su cuerpo, de los encuentros que se han producido en su vida. El camino que Alicia está recorriendo es el de sus propias venas, entrando y saliendo de su corazón.*

Con ilustraciones de Sofía Rhei, Ignacio Vleming y Lewis Carroll, *Alicia Volátil* se revela en la contraportada como *poesía en tres dimensiones*, con precisas instrucciones de uso:

1: Abra el libro. Recorte y póngase las gafas.
2: Cierre uno de sus ojos. Lea un poema.
3: Cierre el ojo contrario. Vuelva a leer el mismo poema.
4: Abra los dos ojos. Lea el poema en su tercera dimensión.

En efecto, el libro contiene el material necesario para construir unas gafas 3D –el texto está escrito en azul y rojo– que una misma debe recortar y construir. 64 *Alicias* componen este libro, en el que las referencias científicas abundan: la biología, la física, las matemáticas, la química, dibujan las facetas y las singularidades de cada una de ellas.

*Alicia Moebius*
*Si a los adultos sólo les muestro una cara, siempre la misma,*
*me veré obligada a curvarme de maneras*
*cada vez más osadas, porque los adultos están por todas partes.*
*Desgarrada por lo que imagino que piensan,*
*por la torsión de las opiniones,*
*vuelvo a encontrarme, yo misma después del bucle,*
*y comprendo que ha sido necesario.*

## 4. ¡A CALCULAR!

En la escena XII del primer acto de *Don Juan Tenorio* de José Zorrilla (1817-1893) don Luis y don Juan apuestan sobre sus muertes en desafíos y sobre mujeres conquistadas:

DON LUIS: *Razón tenéis en verdad. Aquí está el mío: mirad, por una línea apartados traigo los nombres sentados para mayor claridad.*

DON JUAN*: Del mismo modo arregladas mis cuentas traigo en el mío: en dos líneas separadas los muertos en desafío y las mujeres burladas. Contad.*

L: *Contad.*
J: *Veinte y tres.*
L: *Son los muertos. A ver vos. ¡Por la cruz de San Andrés! Aquí sumo treinta y dos.*
J: *Son los muertos.*
L: *Matar es.*
J: *Nueve os llevo.*
L: *Me vencéis. Pasemos a las conquistas.*
J: *Sumo aquí cincuenta y seis.*
L: *Y yo sumo en vuestras listas setenta y dos.*
J: *Pues perdéis.*
L: *¡Es increíble, don Juan!*
J: *Si lo dudáis, apuntados los testigos ahí están, que si fueren preguntados os lo testificarán.*
L: *¡Oh! y vuestra lista es cabal.*
J: *Desde una princesa real a la hija de un pescador, ¡oh! ha recorrido mi amor toda la escala social. ¿Tenéis algo que tachar?*
L: *Sólo una os falta en justicia.*
J: *¿Me la podéis señalar?*
L: *Sí, por cierto, una novicia que esté para profesar.*
J: *¡Bah! pues yo os complaceré doblemente, porque os digo que a la novicia uniré la dama de algún amigo que para casarse esté.*
L: *¡Pardiez que sois atrevido!*
J: *Yo os lo apuesto si queréis.*
L: *Digo que acepto el partido. ¿Para darlo por perdido queréis veinte días?*
J: *Seis.*
L: *¡Por Dios que sois hombre extraño! ¿Cuántos días empleáis en cada mujer que amáis?*
J: *Partid los días del año entre las que ahí encontráis. Uno para enamorarlas, otro para conseguirlas, otro para abandonarlas, dos para sustituirlas, y una hora para olvidarlas. Pero, la verdad a hablaros, pedir más no se me antoja porque, pues vais a casaros, mañana pienso quitaros a doña Ana de Pantoja.*

Según sus cuentas, don Juan necesita 363 días (72 mujeres x 5 días = 360 y 72 mujeres x 1 hora = 3 días) al año para sus conquistas. ¿En que utiliza los dos días del año sobrantes? ¿Serán unas "merecidas" vacaciones amorosas?

En *Gulliver en Liliput,* Jonathan Swift (1667-1745) describe con detalle la manera en la que los liliputienses transportan a Gulliver:

*Estas gentes son excelentísimos **matemáticos**, y han llegado a una gran perfección en las artes mecánicas con el amparo y el estímulo del emperador, que es un famoso protector de la ciencia.* [...]

*Quinientos carpinteros e ingenieros se pusieron inmediatamente a la obra para disponer la mayor de las máquinas hasta entonces construida. Consistía en un tablero levantado tres pulgadas del suelo, de unos siete pies de largo y cuatro de ancho, y que se movía sobre veintidós ruedas. Los gritos que oí eran ocasionados por la llegada de esta máquina, que, según parece, emprendió la marcha cuatro horas después de haber pisado yo tierra. La colocaron paralela a mí; pero la principal dificultad era alzarme y colocarme en este vehículo. Ochenta vigas, de*

*un pie de alto cada una, fueron erigidas para este fin, y cuerdas muy fuertes, del grueso de bramantes, fueron sujetas con garfios a numerosas fajas con que los trabajadores me habían rodeado el cuello, las manos, el cuerpo y las piernas.* ***Novecientos*** *hombres de los más robustos tiraron de estas cuerdas por medio de poleas fijadas en las vigas, y así, en menos de tres horas, fui levantado, puesto sobre la máquina y en ella atado fuertemente. Todo esto me lo contaron, porque mientras se hizo esta operación yacía yo en profundo sueño, debido a la fuerza de aquel medicamento soporífero echado en el vino.*

¿Lo que cuenta Jonathan Swift es creíble? ¿Hacen falta realmente **900** liliputieneses para instalar a Gulliver en un carro situado a 3 pulgadas del suelo? ¿No harán falta más? Un liliputiense mide **6 pulgadas** (15 cm) y Gulliver unos **6 pies** (180 cm), es decir 12 veces más. Así, un liliputiense pesa $\mathbf{12^3}$ = 1.728 veces menos que un hombre –es una cuestión de volumen–. Swift habla de 900 liliputienses (más o menos la mitad de 1.728), cada uno debe desplazar el equivalente a dos veces él mismo, lo que parece posible para liliputienses fuertes ayudados por un sistema de cuerdas y poleas. Este cálculo se ratifica un poco más adelante en el texto al hablar de la comida de Gulliver:

*El lector puede tener el gusto de observar que en la última de las normas necesarias para recobrar la libertad, el Emperador estipula que se me conceda una cantidad de comida y bebida suficiente para mantener a* ***1.728*** *liliputienses. Algún tiempo después, habiendo preguntado a un amigo de la Corte cómo se las arreglaron para fijar una cifra tan concreta, me dijo que los* ***matemáticos*** *de su Majestad, tras medir la altura de mi cuerpo usando un cuadrante y descubrir que era más grande que el suyo en la proporción de doce a uno, concluyeron por la semejanza de sus cuerpos que el mío debía contener, al menos,* ***1.728*** *de los suyos y consecuentemente requeriría tanto alimento como se necesitaba para mantener el mismo número de liliputienses. Con esto puede el lector hacerse una idea del ingenio de aquella gente, así como de la prudente y escrupulosa administración de soberano tan grande.*

## 5. ¡GEOMETRÍA AL RESCATE!

En *La isla misteriosa* de Julio Verne (1828-1905) el teorema de Thales ayuda a realizar un cálculo complicado:

*La salida del sol, en un horizonte puro, anunció un día magnífico, uno de esos hermosos días otoñales con los que se despide la estación calurosa. Había que completar los elementos de las observaciones de la víspera, mediante la medición de la altitud de la meseta panorámica sobre el nivel del mar.*

*- ¿No va a necesitar un instrumento análogo al de ayer? –preguntó Harbert al ingeniero.*

*- No, hijo mío –respondió éste-. Vamos a proceder de otro modo y casi con la misma precisión.* […]

*Cyrus Smith se había provisto de una vara recta, de unos 3,60 metros de longitud. Esta longitud la había medido a partir de su propia estatura. Harbert llevaba una plomada que le había dado Cyrus Smith, consistente en una simple piedra atada con el extremo de una fibra flexible. Llegado a unos sesenta centímetros de la orilla de la playa y a unos ciento cincuenta metros de la muralla granítica, que se erguía perpendicularmente, Cyrus Smith clavó la vara en la arena, a unos sesenta centímetros de profundidad, y, tras sujetarla bien,*

*logró mantenerla perpendicular al plano del horizonte, gracias a la plomada. Hecho esto, se apartó a la distancia necesaria para que, tumbado sobre la arena, su mirada pusiera en línea el extremo de la vara y la cresta de la muralla. Después, señaló el punto con una estaca.*

*- Harbert, ¿conoces los principios elementales de la* ***geometría****?*

*- Un poco, señor Cyrus –respondió Harbert, que no quería comprometerse demasiado.*

*- ¿Recuerdas las propiedades de los* ***triángulos semejantes****?*

*- Sí –respondió Harbert–. Sus lados homólogos son proporcionales.*

*- Bien, hijo mío. Acabo de construir dos triángulos semejantes, ambos* ***rectángulos****. El primero, el más pequeño, tiene por lados la vara perpendicular y la línea entre la estaca y la base de la vara, y por* ***hipotenusa****, mi radio visual. El segundo, tiene por lado la muralla perpendicular cuya altura queremos medir y la distancia de su base a la vara, y por* ***hipotenusa****, también mi radio visual, que prolonga la del primer triángulo.*

*- ¡Ah, señor Cyrus, ya comprendo! –exclamó Harbert-. Al igual que la distancia de la estaca a la base de la muralla, la altura de la vara es proporcional a la altura de la muralla.*

*- Así es, Harbert, de modo que cuando hayamos medido las dos primeras distancias conociendo la altura de la vara, no tendremos más que hacer un cálculo de proporción para saber la altura de la muralla, sin tener que medirla directamente.*

En *La muy horrible vida del gran Gargantúa, padre de Pantagruel* de François Rabelais (1494-1553), Gargantúa funda la abadía de Thelema para su amigo el monje, *edificio que no tiene muros para evitar murmullos, envidias y conspiraciones*. La abadía está inscrita en un hexágono formado por seis torres:

*La construcción se realizó a base de* ***figuras hexagonales****, de modo que en cada ángulo se levantó una gran torre redonda de* ***sesenta pasos de diámetro****, siendo en grosor y aspecto iguales las unas a las otras. El río Loira corría del lado del septentrión y, al borde de su ribera, se asentaba una de las torres, llamada* ***Ártica****; en dirección al Oriente había otra, llamada de* ***Calaire****; la siguiente,* ***Anatolia****; la siguiente,* ***Mesembrina****; la siguiente,* ***Hesperia****; y la última,* ***Cryera****. Entre cada torre había un espacio de* ***trescientos doce pasos****.* [...] *Entre las torres, y en medio de cada cuerpo, había una escalera de caracol con sus rellanos, cuyos escalones eran: unos, de pórfido, otros, de piedra numídica, y otros de mármol veteado, teniendo* ***veintidós pies*** *de ancho cada uno;* [...]. *Desde la torre Ártica hasta Cryera se alineaban hermosas y grandes estanterías, con libros en griego, latín, hebreo, francés, toscano y español, situados en los distintos pisos según las lenguas. En el centro había otra maravillosa escalera de caracol, a la que se accedía por la parte exterior del edificio, atravesando un arco de* ***seis toesas*** *de ancho; estando construida con tal capacidad y* ***simetría*** *que podían subir por ella hasta el piso más alto seis caballeros, uno al lado del otro, armados con sus lanzas.* [...] *Los alojamientos de las damas iban desde la torre Ártica hasta la puerta Mesembrina, ocupando los hombres todo el resto.* [...]

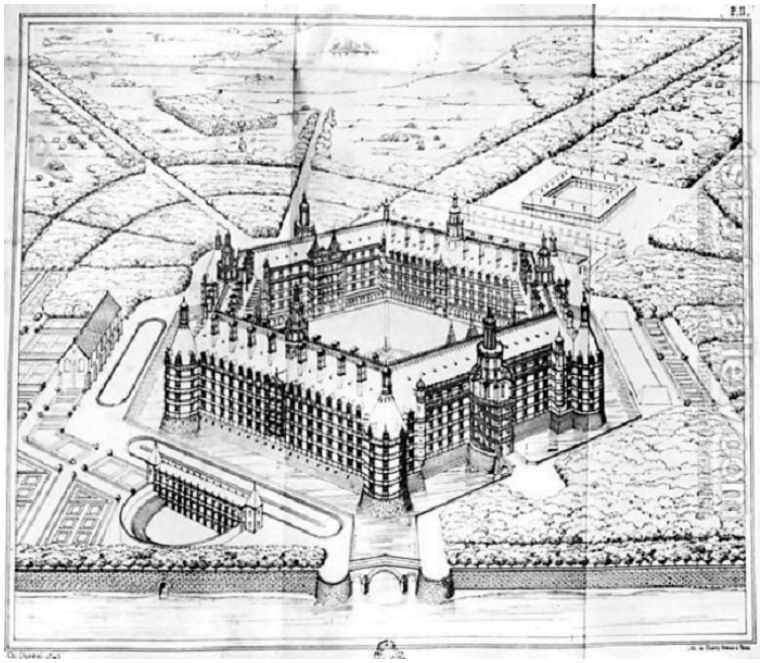


Figura 2. Reconstruction of Theleme Abbey, ilustración de « Rabelais et l'architecture de la Renaissance », Charles Lenormant.

¿Qué distancia separa –a vuelo de pájaro– la torre Ártica de la Mesembrina? La distancia **AB** (ver Figura 3 para las notaciones) es la suma del radio de la torre Ártica, de la distancia entre ambas torres y del radio de la torre Calaire, es decir, **372** pasos (30 + 312 + 30 pasos). Según el texto, todas las torres son similares y distan lo mismo entre dos consecutivas, con lo que el hexágono que forman es regular y se puede inscribir en un círculo de centro **O,** de radio **OA** de longitud **AB** –el lado de un hexágono regular coincide con el radio del círculo en el que está inscrito–. Así las torres Ártica y Mesembrina distan:

**684** pasos = **744** (diámetro del círculo) – **2 x 30** pasos (radio de cada torre).

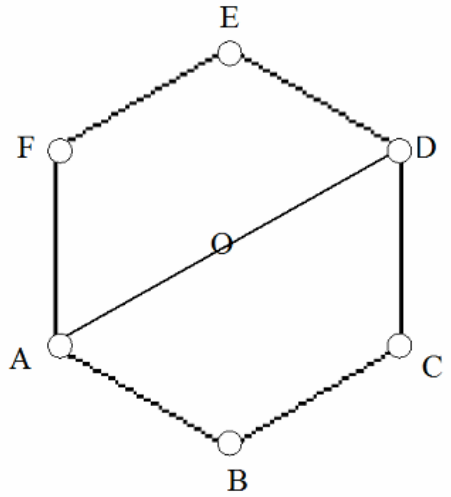



Figura 3. La situación de las torres : **A** es la torre Ártica, **B** Calaire, **C** Anatolia, **D** Mesembrina, **E** Hesperia y **F** Cryera.

.

En *El ritual de Musgrave* de Arthur Conan Doyle (1859-1930), Sherlock Holmes se enfrenta a un caso escondido tras un misterioso ritual:

*Me entregó este mismo papel que tengo aquí, Watson, y tal es el extraño catecismo al que cada Musgrave había de someterse al hacerse cargo de la propiedad. Voy a leerle las preguntas y respuestas tal como aparecen aquí:*

*¿De quién era?*
*Del que se ha marchado.*
*¿Quién la tendrá?*
*El que vendrá.*
*¿Dónde estaba el sol?*
*Sobre el roble.*
*¿Dónde estaba la sombra?*
*Bajo el olmo.*
*¿Con qué pasos se medía?*
*Al norte por diez y por diez, al este por cinco y por cinco, al sur por dos y por dos, al oeste por uno y por uno, y por debajo.*
*¿Qué daremos por ella?*
*Todo lo que poseemos.*
*¿Por qué deberíamos darlo?*
*Para responder a la confianza.*

*El original no lleva fecha, pero corresponde a mediados del siglo diecisiete –observó Musgrave–. Temo, sin embargo, que en poco puede ayudarte esto a resolver el misterio.* […] *Fue perfectamente obvio para mí, al leer el Ritual de los Musgrave, que las medidas habían de referirse sin duda a algún punto al que aludía el resto del documento, y que si podíamos encontrar ese punto estaríamos en buen camino para saber cuál era aquel secreto que los antiguos Musgrave habían juzgado necesario enmascarar de un modo tan curioso y peculiar. Para comenzar se nos daban dos guías: un roble y un olmo. En cuanto al roble, no podía haber la menor duda. Directamente ante la casa, a la izquierda del camino que llevaba a la misma, se alzaba un patriarca entre los robles, uno de los árboles más magníficos que yo haya visto jamás.*

*- ¿Ya estaba aquí cuando se redactó vuestro Ritual? –pregunté al pasar delante de él.*

*- Según todas las probabilidades, ya lo estaba cuando se produjo la conquista normanda –me respondió–. Tiene una circunferencia de veintitrés pies.*

*Así quedaba asegurado uno de mis puntos de partida.*

*- ¿Tenéis algún olmo viejo? –inquirí.*

*- Antes había uno muy viejo, pero hace diez años cayó sobre él un rayo y sólo quedó el tocón.*

*- ¿Puedes enseñarme dónde estaba?*

*- Ya lo creo.*

*¿Y no hay más olmos?*

*- Viejos no, pero abundan las hayas.*

*- Me gustaría ver dónde crecía.*

*Habíamos llegado en un dog-cart, y mi cliente me condujo en seguida, sin entrar en la casa, a una cicatriz en la hierba que marcaba donde se había alzado el olmo. Estaba casi a mitad de camino entre el roble y la casa. Mi investigación parecía progresar.*

*- Supongo que es imposible averiguar qué altura tenía el olmo? –quise saber.*

*- Puedo decírtelo en seguida. Medía sesenta y cuatro pies.*

*- ¿Cómo lo sabes? –pregunté sorprendido.*

*- Cuando mi viejo profesor me planteaba un* ***problema de trigonometría****, siempre consistía en una medición de alturas. Cuando era un mozalbete calculé las de todos los árboles y edificios de la propiedad. Había sido un inesperado golpe de suerte y mis datos acudían a mí con mayor rapidez de la que yo hubiera podido esperar razonablemente.* […]

*Ésta era una excelente noticia, Watson, pues indicaba que me encontraba en el buen camino. Miré el sol. Estaba bajo en el cielo, y calculé que en menos de una hora se situaría exactamente sobre las ramas más altas del viejo roble, y se cumpliría entonces una condición mencionada en el Ritual. Y la sombra del olmo había de referirse al extremo distante de la sombra, pues de lo contrario se habría elegido como guía el tronco. Por consiguiente, había de averiguar dónde se encontraba el extremo distante de la sombra cuando el sol estuviera exactamente fuera del árbol.*

*– Esto debió de ser difícil, Holmes, dado que el olmo ya no estaba allí.* […]

*Pero al menos sabía que, si Brunton pudo hacerlo, yo también podría. Además, de hecho no había dificultad. Fui con Musgrave a su estudio y me confeccioné esta clavija, a la que até este largo cordel, con un nudo en cada yarda. Cogí después dos tramos de caña de pescar, que representaban exactamente seis pies, y volví con mi cliente allí donde había estado el olmo. El sol rozaba ya la copa del roble. Aseguré la caña de pescar en el suelo, marqué la dirección de la sombra y la medí. Su longitud era de nueve pies. Desde luego, el cálculo era ahora de lo más sencillo. Si una caña de seis pies proyectaba una sombra de nueve, un árbol de sesenta y cuatro pies proyectaría una de noventa y seis, y ambas tendrían la misma dirección. Medí la distancia, lo que me llevó casi hasta la pared de la casa, y fijé una clavija en aquel punto.*

Gracias al teorema de Thales, Holmes pudo seguir el resto de las indicaciones del ritual y descubrió en una cava secreta la antigua corona de los reyes de Inglaterra... junto al cadáver del mayordomo Brunton.

## 6. DESCIFRANDO CÓDIGOS.

En *El escarabajo de oro*, Edgar Alan Poe (1809-1849) da una magnífica lección de criptografía a través de una historia de piratas:

*Y al llegar aquí, Legrand, habiendo calentado de nuevo el pergamino, lo sometió a mi examen. Los caracteres siguientes aparecían de manera toscamente trazada, en color rojo, entre la calavera y la cabra:*

**53++305))6*;4826)4+.)4+);806*:48+8¶60))85;1+(;:+*8+83(88)5*+;46(;88*96*';8)*+(;485);5*+2:*+(;4956*2(5*—4)8¶8*;4069285);)6+8)4++;1(+9;48081;8:+1;48+85;4)485+528806*81(+9;48;(88;4(+?34;48)4+;161;:188;+?;** […]

*- Y el caso—dijo Legrand—que la solución no resulta tan difícil como cabe imaginarla tras del primer examen apresurado de los caracteres. Estos caracteres, según pueden todos adivinarlo fácilmente forman una cifra, es decir, contienen un significado pero por lo que sabemos de Kidd, no podía suponerle capaz de construir una de las más abstrusas* ***criptografías****. Pensé, pues, lo primero, que ésta era de una clase sencilla, aunque tal, sin embargo, que*

*pareciese absolutamente indescifrable para la tosca inteligencia del marinero, sin la clave.*

*- ¿Y la resolvió usted, en verdad?*

*- Fácilmente; había yo resuelto otras diez mil veces más complicadas. Las circunstancias y cierta predisposición mental me han llevado a interesarme por tales acertijos, y es, en realidad, dudoso que el genio humano pueda crear un enigma de ese género que el mismo ingenio humano no resuelva con una aplicación adecuada.* […]

*- En general, no hay otro medio para conseguir la solución que ensayar (guiándose por las **probabilidades**) todas las lenguas que os sean conocidas, hasta encontrar la verdadera. Pero en la cifra de este caso toda dificultad quedaba resuelta por la firma. El retruécano sobre la palabra Kidd sólo es posible en lengua inglesa. Sin esa circunstancia hubiese yo comenzado mis ensayos por el español y el francés, por ser las lenguas en las cuales un pirata de mares españoles hubiera debido, con más naturalidad, escribir un secreto de ese género. Tal como se presentaba, presumí que el criptograma era inglés. Fíjese usted en que no hay espacios entre las palabras. Si los hubiese habido, la tarea habría sido fácil en comparación. En tal caso hubiera yo comenzado por hacer una colación y un análisis de las palabras cortas, y de haber encontrado, como es muy probable, una palabra de una sola letra (a o I-uno, yo, por ejemplo), habría estimado la solución asegurada. Pero como no había espacios allí, mi primera medida era averiguar las letras predominantes así como las que se encontraban con menor frecuencia. Las conté todas y formé la siguiente tabla:*

| | |
|---|---|
| El signo 8 | aparece 33 veces |
| — ; | — 26 — |
| — 4 | — 19 — |
| + — y) + | — 16 — |
| — * | — 13 — |
| — 5 | — 12 — |
| — 6 | — 11 — |
| — +1 | — 10 — |
| — 0 | — 8 — |
| — 9 y 2 | — 5 — |
| — : y 3 | — 4 — |
| — ? | — 3 — |
| — (signo pi) | — 2 — |
| — — y | — 1 vez |

*Ahora bien: la letra que se encuentra con mayor frecuencia en inglés es la **e**. Después, la serie es la siguiente: **a o y d h n r s t u y c f g l m w b k p q x z**. La **e** predomina de un modo tan notable, que es raro encontrar una frase sola de cierta longitud de la que no sea el carácter principal.* […]. *Puesto que nuestro signo predominante es el **8,** empezaremos por ajustarlo a la **e** del alfabeto*

*natural.* […] *Ahora, de todas las palabras de la lengua,* ***the*** *es la más usual; por tanto, debemos ver si no está repetida la combinación de tres signos, siendo el último de ellos el* ***8****.* […] *Podemos, pues, suponer que* ***;*** *representa* ***t****,* ***4*** *representa* ***h****, y* ***8*** *representa* ***e****, quedando este último así comprobado. Hemos dado ya un gran paso.* […]

*- Sería tiempo ya de disponer nuestra clave, conforme a lo descubierto, en forma de tabla, para evitar confusiones. Nos dará lo siguiente:*

| | | |
|---|---|---|
| 5 | representa | a |
| + | — | d |
| 8 | — | e |
| 3 | — | g |
| 4 | — | h |
| 6 | — | i |
| * | — | n |
| + + | — | o |
| ( | — | r |
| : | — | t |
| ? | — | u |

*- Tenemos así no menos de diez de las letras más importantes representadas, y es inútil buscar la solución con esos detalles. Ya le he dicho lo suficiente para convencerle de que cifras de ese género son de fácil solución, y para darle algún conocimiento de su desarrollo razonado. Pero tenga la seguridad de que la muestra que tenemos delante pertenece al tipo más sencillo de la criptografía. Sólo me queda darle la traducción entera de los signos escritos sobre el pergamino, ya descifrados. Hela aquí:*

A good glass in the Bishop's Hostel in the devil´s seat forty-one degrees and thirteen minutes northeast and by north main branch seventh, limb east side shoot from the left eye of the death's head a bee-line from the tree through the shot fifty feet out. [*Un buen vaso en la hostería del obispo en la silla del diablo cuarenta un grados y trece minutos Nordeste cuarto de Norte rama principal séptimo vástago, lado Este soltar desde el ojo izquierdo de la cabeza de muerto una línea de abeja desde el árbol a través de la bala cincuenta pies hacia fuera*.]

¿Qué significa este galimatías? No dejes de leer la historia si quieres saberlo... pero te adelanto que encuentran un tesoro y algo más.

## 7. TRABAJANDO CON FUNCIONES.

En *Guerra y Paz* de León Tolstoi (1828-1910) se demuestra matemáticamente que Napoleón es el diablo:

*Cierto hermano masón le había revelado la siguiente profecía, relativa a Napoleón, sacada del Apocalipsis de San Juan Evangelista. Dicha profecía se encuentra en el capítulo XIII, versículo 18 y dice así:* "Aquí está la sabiduría;

quien tenga inteligencia, cuente el número de las bestias, porque es un número de hombre y su número es seiscientos sesenta y seis". *Y en el mismo capítulo, el versículo 5 dice:* "Y se le dio una boca que profería palabras llenas de orgullo y de blasfemia; y se le confirió el poder de hacer la guerra durante 42 meses."

*Las letras del alfabeto francés, como los caracteres hebraicos, pueden expresarse por medio de cifras, y atribuyendo a las diez primeras letras el valor de las unidades y a las siguientes el de las decenas, ofrecen el significado siguiente:*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *g* | *h* | *i* | *k* | *l* | *m* | *n* | *o* | *p* | *q* | *r* | *s* | *t* | *u* | *v* | *w* | *x* | *y* | *z* |

*Escribiendo con este alfabeto en cifras las palabras* **l'empereur Napoléon***, la suma de los números correspondientes daba por resultado* ***666****, de lo que resultaba que Napoleón era la bestia de que hablaba el Apocalipsis. Además, al escribir con ese mismo alfabeto cifrado la palabra francesa* **quarante deux***, es decir, el límite de* ***42*** *meses asignados a la bestia para pronunciar sus palabras orgullosas y blasfemas, la suma de las cifras correspondientes a la palabra última era también* ***666****, de lo que se infería que el poder napoleónico terminaba en 1812, fecha en que el emperador cumplía los cuarenta y dos años.*

Tolstoi define una función φ: Alfabeto → Números naturales, dada por φ(a)=1, φ(b)=2, ..., φ(k)=10, φ(l)=20, ..., φ(y)=150 y φ(z)=160. Y reemplaza cada letra por el número que corresponde. Así ***Le empereur*** es:

**20+5+5+30+60+5+80+5+110+80 (=400)**,

y ***Napoléon*** es:

**40+1+60+50+20+5+50+40 (=266)**,

y la suma da 666… Y más aún ***quarante*** es:

**79+110+1+80+1+40+100+5 (=407)**

y ***deux*** es:

**4+5+110+140 (=259)**,

y la suma también da 666… no hay duda posible.

## 8. COMBINANDO, COMBINANDO.

Una sextina es un poema formado por seis estrofas de seis versos cada una de ellas, seguidas de un párrafo de tres versos. Cada línea pertenece a uno de los seis grupos de *rimas identidad* de acuerdo con el esquema*:*

**ABCDEF - FAEBDC - CFDABE - ECBFAD - DEACFB - BDFECA - ECA**

En términos matemáticos, se trata de una *permutación* **σ**, que se escribe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es una permutación de orden 6, es decir, cuando se hacen 6 iteraciones –y no antes– se reencuentran las palabras de rima en su forma original: en términos matemáticos, es $\boldsymbol{\sigma^6}$=Id (pero $\boldsymbol{\sigma^2}\neq$Id, $\boldsymbol{\sigma^3}\neq$Id, $\boldsymbol{\sigma^4}\neq$Id y $\boldsymbol{\sigma^5}\neq$Id).

La primera sextina de la historia de la literatura es *Lo ferm voler qu'el cor m'intra* del trovador Arnaut Daniel; como ejemplo de su gran belleza y dificultad, os dejo la *Sextina de mis muertos* de Ana Nuño (1957-):

*Ya no los cuento. O, mejor dicho, cuento*
*los años. Y van cinco. Uno tras otro,*
*disciplinados y llevando el paso,*
*desfilaron hasta hundirse del todo*
*en el reverso blando de las cosas,*
*donde se alivian de peso los huesos.*

*Cierro los ojos, pero veo el hueso*
*del recuerdo, no la carne. El descuento*
*final comienza entre indistintas cosas*
*(hierbas, como piedras, quietas), y el otro*
*saldo, el del pasado, cesa del todo:*
*sin apremio, el tiempo embarga tus pasos.*

*¡Y qué largo el tiempo entre paso y paso,*
*ahora que los tuyos quieren ser hueso!*
*En las calles, sobre los muros, todo*
*sigue igual : el tráfico inmóvil, el cuento*
*infantil de los graffiti, sin otro*
*alarde que el acopio de las cosas.*

*Y peor si he de sortear tus cosas*
*de madrugada, cuando oigo en mis pasos*
*los tuyos desde otra orilla. Desde otro*
*vacío que el de mi corazón, tus huesos*
*quieren volver al desorden, al cuento*
*de cada día, a vuelta a empezar todo.*

*Pero te detienes, lejos de todo.*
*Nada distrae tu ausencia, las cosas,*
*como el sueño o tu silla, eran un cuento*
*de antes de dormir, nada, ni los pasos*
*que doy sobre la hierba de tus huesos*
*en la mañana vacía, ni el otro*

*ramo, dejado siempre porqué otro,*
*qué otra, sobre tu cabeza, sobre todo*
*eso que fue tu cabeza, ni huesos*
*ahora, sólo una cosa entre cosas.*
*Nada te devolverá al tiempo, al paso*
*ligero de las horas, y tu cuento*

*es de otros ahora, de éste, de todos.*
*Pero sigo viendo el hueso, la cosa*
*sin nombre, un pasillo desierto de pasos.*

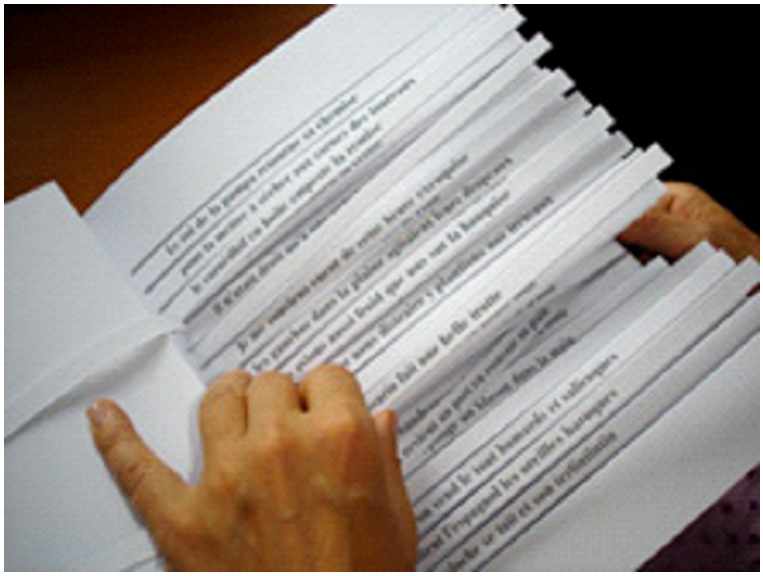


Figura 4. Cent mille milliards de poèmes.

En *Cent mille milliards de poèmes,* Raymond Queneau (1903-1976) elabora un texto a partir de 10 sonetos –dos cuartetos y dos tercetos, es decir 14 versos– que se imprimen sobre 10 páginas –uno por página–, que se recortan en 14 trozos, cada uno correspondiente a un verso (ver la Figura 4). De manera, que se puede hojear el libro y encontrarse leyendo el primer verso del séptimo poema, seguido del segundo verso del décimo, del tercero del primero, etc. Esto hace 100 mil millardos de poemas, porque hay 10 elecciones para el primer verso, 10 para el segundo y así hasta el 14, por lo tanto $10^{14}$ = 100 000 × $10^{9}$ (cien mil millardos = 100 billones de poemas) de posibilidades.

Queneau hace un cálculo del tiempo que se precisaría para leer todos los poemas posibles: 45 segundos para leer un poema, 15 para cambiar las tiras, 8 horas de lectura al día, 200 días de lectura al año… 1 millón de siglos de lectura… Como homenaje a este texto de Raymond Queneau en el cincuenta aniversario de su publicación, la editorial Demipage editó en 2011 el libro *Cien mil millones de poemas* –en el interior se explica la razón del título–: el escritor Jordi Doce creó el modelo de rima –un soneto en alejandrinos de 14 sílabas con cesura en medio, cada verso dividido por lo tanto en dos hemistiquios de siete sílabas–, y las y los demás sonetistas respetaron esa rima para crear los $10^{14}$ poemas.

## 9. GRANDES NÚMEROS, ENORMES…

En *La biblioteca de Babel* de Jorge Luis Borges (1899-1986) se puede leer:

*A cada uno de los muros de cada hexágono corresponden cinco anaqueles; cada anaquel encierra treinta y dos libros de formato uniforme; cada libro es de cuatrocientas diez páginas; cada página de cuarenta renglones; cada renglón de unas ochenta letras.* [...]

*La biblioteca es total y en sus anaqueles se registran todas las posibles combinaciones de los veintitantos símbolos ortográficos, o sea, todo lo que es dable expresar.* [...]

*Todo: la historia minuciosa del porvenir, las autobiografías de los arcángeles, el catálogo fiel de la biblioteca, miles y miles de catálogos falsos, la demostración*

*de la falacia de esos catálogos, el evangelio gnóstico de Basílides, el comentario de ese evangelio, el comentario del comentario, la relación verídica de tu muerte...*

Como bien dice Borges, la biblioteca es enorme, aunque no infinita: si todos los libros se limitan a 410 páginas, tenemos 410x40x80 = 1.312.000 caracteres por libro. Cada carácter puede tomar 25 valores, con lo que hay más de 251.312.000 libros diferentes. Escribir esta cantidad de libros requiere unas 1.834.100 cifras (aproximadamente 1.312.000 log(25)). Para haceros una idea de lo grande que es este número, $10^p$ se escribe con p+1 cifras…

En *El libro de arena* Borges habla sobre el infinito:

*Me pidió que buscara la primera hoja. Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada la mano. Era como si brotaran del libro.*

*- Ahora busque el final.*

*También fracasé; apenas logré balbucear con una voz que no era mía:*

*- Esto no puede ser.*

*Siempre en voz baja el vendedor de biblias me dijo:*

*- No puede ser, pero **es**. El número de páginas de este libro es **infinito**. Ninguna es la primera; ninguna, la última. No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número.*

## 10. DEFORMANDO CON CUIDADO.

Si se toma una tira de papel y se pegan dos extremos opuestos, se obtiene un *cilindro*, es decir, una superficie que tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados.

Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una *banda de Möbius,* que posee un solo borde y una única cara. La banda de Möbius es además *no orientable*: dibuja por ejemplo una flecha sobre la banda, y muévela a lo largo de su única cara… observa que cuando regresas al punto de partida, ¡la flecha ha cambiado de sentido!

El *Poema sobre banda de Möbius* de Luc Étienne (1908-1984) se construye del modo siguiente: en la primera cara de una banda de papel rectangular –por ejemplo 10 veces más larga que ancha, para manipularla mejor– se escribe la mitad de la poesía de una persona muy trabajadora:

*Trabajar, trabajar sin cesar,*
*para mi es obligación*
*no puedo flaquear*
*pues amo mi profesión…*

Se gira esta tira de papel sobre su lado más largo –es esencial–, y se escribe la segunda mitad del poema:

*Es realmente un tostón*

*perder el tiempo,*
*y grande es mi sufrimiento,*
*cuando estoy de vacación.*

Se pega la tira para obtener una banda de Möbius: tenemos un poema sobre una única cara –no ya sobre dos– y su sentido es totalmente diferente:

*Trabajar, trabajar sin cesar, es realmente un tostón*
*para mi es obligación perder el tiempo*
*no puedo flaquear y grande es mi sufrimiento,*
*pues amo mi profesión… cuando estoy de vacación.*

Ahora tenemos una poesía de una persona un poco perezosa... estaba claro ¡la banda de Möbius es no orientable!... ¡cambia el sentido de cualquier objeto que viva sobre ella!

Algo parecido sucede con a canción *Serenata mariachi* de Les Luthiers: Bernardo y Porfirio se disputan a su amada María Lucrecia y cantan a turnos. Empieza Bernardo:

*Siento que me atan a ti*
*tu sonrisa y esos dientes*
*el perfil de tu nariz*
*y tus pechos inocentes*

Sigue Porfirio:

*Tus adorados cabellos,*
*oscuros, desordenados*
*clara imagen de un anzuelo*
*que yo mordí fascinado*

En su disputa por llamar la atención de María Lucrecia, comienzan a interrumpirse cantando cada verso por turnos... el resultado es el mismo que si hubieran escrito su canción sobre una banda de Möbius, con resultados fatales para ambos:

*Siento que me atan a ti tus adorados cabellos,*
*tu sonrisa y esos dientes oscuros, desordenados*
*El perfil de tu nariz clara imagen de un anzuelo*
*y tus pechos inocentes que yo mordí fascinado*.

## 11. POÉTICO BINARIO.

Jacques Roubaud (1932-) escribió este precioso *Poema binario* en homenaje a su amigo Pierre Lusson:

@ 13. 4

La Vie : sonnet.

à Pierre Lusson

000000 0000 01
011010 111 001
101011 101 001
110011 0011 01

000101 0001 01
010101 011 001
010101 011 001
010101 0001 01

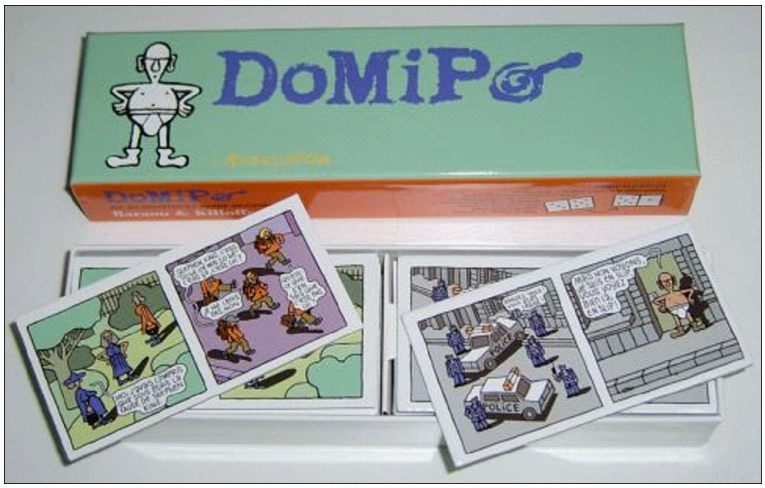
01 01 01 0010 11
01 01 01 01 01 11
001 001 010 101

000 1 0 1 001 00 0
0 0 0 0 0 11 0 0 0 0 101
0 0 0 0 01 0 0 0 0 0 00

@14, Jacques Roubaud, compositeur de mathématique et de poésie.

## 12. AZAR Y PROBABILIDAD.

*DoMiPo* es el título de un tebeo-dominó de la guionista Anne Baraou en colaboración con el dibujante Patrice Killoffer (L'Association, 2009).




Es un juego de dominó normal, pero las fichas con números se han sustituido por otras con las viñetas de un tebeo. El juego contiene 28 fichas impresas por el anverso-reverso, de 11cm x 5cm. En cada ficha aparecen entre 0 y 6 personajes y –como en el dominó clásico– los jugadores y jugadoras deben unir sólo los lados que contienen al mismo número de personas, es decir, fichas con dibujos iguales. Al final de una partida resultará una larga cinta, que será de hecho una historia diferente dependiendo de la suerte y de las elecciones realizadas.

*Coquetèle* de Anne Baraou y Vicent Sardon es también un cómic de lectura aleatoria. Para crear las historias, deben tirarse los tres dados y aparece la aventura en cuestión ante nuestros ojos.




## REFERENCIAS.

GACHE, B. (2004). *Escrituras nómades. Del libro perdido al hipertexto*, Limbo.

GONZÁLEZ FERNÁNDEZ, F. (2012). *Esperando a Gödel. Literatura y Matemáticas*, Nivola.

MARTINEZ, G. (2003). *Borges y la matemática*, Eudeba.

ODIFREDDI, P. (2007). *Juegos matemáticos ocultos en la literatura*, Octaedro.

SERRA, M. (2000). *Verbalia: juegos de palabras y esfuerzos de ingenio literario*, Península.

VARIOS (2011). *noetas*. *Primera antología de poesía con matemáticas.* Amargord.

Sección de *Literatura y Matemáticas* en el portal Divulgamat (http://www.divulgamat.net).

Transparencias: http://www.ehu.es/~mtwmastm/CEAM_Malaga2012.pdf

# PASEANDO ENTRE LA MATEMÁTICA RECREATIVA Y LA PROGRAMACIÓN RECREATIVA

**Blas Ruiz Jiménez**
Profesor de la Universidad de Málaga.
Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación

## RESUMEN

La Programación Recreativa (PR) motiva el estudio de la programación de computadores a través de problemas lúdicos, similares a los de la Matemática Recreativa (MR), lo que lleva a veces a identificar ambos campos. Sin embargo los métodos de una y otras pueden ser muy diferentes. El objetivo de la PR es escribir programas, mientras que en la MR podemos ayudarnos de éstos para enunciar conjeturas sobre la solución.

Desde una visión educativa son muy interesantes aquellos problemas que motivan de forma natural el estudio elemental de resultados notables de la teoría de números, entendiendo por elemental cuando sólo es necesario para la comprensión del resultado un conocimiento básico del álgebra. Exponemos en esta conferencia dos problemas que ilustran la interacción entre MR y PR: uno, un puzzle lógico; y el otro un problema aritmético-combinatorio.

# COMUNICACIONES

# UNA EXPERIENCIA DE PUESTA EN PRÁCTICA DE APRENDIZAJE COOPERATIVO EN EL AULA.

**José Manuel Fernández Rodríguez**,
*I.E.S. "El Almijar", Cómpeta (Málaga)*
**Encarnación López Fernández**,
*I.E.S. "Vega de Mar" San Pedro de Alcántara (Málaga)*

## RESUMEN.

En esta comunicación se quiere presentar la experiencia desarrollada por los autores con alumnos y alumnas de 4º de E.S.O. La dinámica de trabajo elegida ha sido el trabajo en grupo bajo la filosofía del trabajo cooperativo y la tutoría entre iguales, dos líneas metodológicas que pretenden aprovechar el capital humano presente en nuestro alumnado para la mejora del ambiente de trabajo en clase y en consecuencia del rendimiento escolar. Se presentarán los materiales utilizados así como la forma en la que se han utilizado. Sinceramente pensamos que aunque sea una experiencia manifiestamente mejorable nos ha servido para comenzar a trabajar de otra forma en clase.

**Nivel educativo**: Secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Hay que tener en cuenta que cualquier solución puede acarrear nuevos problemas, tenemos más recursos que nunca y en la mayoría de los casos no estamos preparados para utilizarlos de forma adecuada. Por otro lado el uso de ordenadores en las aulas genera diversos tipos de conflictos intrínsecos al uso de sistemas abiertos de trabajo, como puede ser que el tiempo se utilice para lo que se ha destinado o que el alumnado esté más pendiente de cómo esquivar el control del profesor que de adquirir los contenidos que se están trabajando. En las aulas que tienen instalados ordenadores de forma fija, se ha impuesto unas barreras estructurales que dificultan y en muchas casos impiden llevar a la práctica de técnicas de trabajo que, a la vez que favorecen la socialización de nuestro alumnado, aumentan el rendimiento del mismo.

No pretendemos con esto renegar de todos los avances que se ponen a nuestro alcance, sino de reflexionar sobre su uso racional.

Somos dos compañeros de centros con realidades totalmente diferentes. Uno está destinado en un centro pequeño (diez unidades) donde sólo se imparte E.S.O., que es centro TIC (cinco aulas con ordenadores fijos y dos carritos de portátiles). El otro está destinado en un centro donde se imparte E.S.O, bachillerato y un ciclo formativo de grado medio. Todas las aulas están dotadas de un ordenador en la mesa del profesor y un proyector. Además, disponemos de 6 aulas con pizarra digital. Ya que ambos impartimos clase en 4º Op. B, decidimos empezar a preparar material que aprovechase las ventajas que nos ofrecen las

TICs combinándolas con el trabajo en grupo, y de este modo poder favorecer la socialización de nuestro alumnado.

El empezar por 4º E.S.O. Opc. B no tenía otro sentido que el de ejercer de red de seguridad ya que nuestra experiencia en esta forma de trabajar era prácticamente nula. El tema elegido fue el estudio de las funciones y la forma de trabajar el trabajo cooperativo y la tutoría entre iguales.

Hace ya tres cursos de eso y este año hemos ampliado los contenidos tratados incluyendo además fracciones algebraicas, semejanza de triángulos y trigonometría.

La herramienta utilizada para el tema de funciones ha sido la calculadora ClassPad 330. Las actividades no se han diseñado pensando en alguna característica especial de este modelo de calculadora y se pueden adaptar a otras herramientas y soportes físicos, hemos optado por esta opción ya que era la que más se prestaba al esquema que teníamos de dinámica de trabajo para el alumnado.

En el trabajo con fracciones algebraicas no se ha utilizado otro material distinto al habitual del aula y para semejanza y trigonometría se les ha pedido a los alumnos que construyan su propio material.

# 2. JUSTIFICACIÓN.

Solemos ser reacios a trabajar en grupo ya que suele pasar que "uno hace el trabajo y los demás miran y después se aprovechan de ello" o bien porque en realidad no conseguimos que se trabaje en grupo, aunque así estén dispuestos en clase, ya que se reparten el trabajo para posteriormente realizar un pegado de trabajos individuales algunas veces inconexos.

Debemos pues, centrar nuestros esfuerzos en cuidar el diseño del proceso desde la selección y formación de grupos hasta la evaluación de los contenidos tratados y del proceso seguido.

## 2.1. FORMACIÓN DE LOS GRUPOS.

El principio básico en la formación es la heterogeneidad en los componentes del grupo y la homogeneidad entre los grupos. Agrupar a alumnos de similar capacidad y/o intereses sólo redunda en el aumento de las diferencias persistentes en ellos ya que, haciendo un símil ecuestre, si pones los mejores caballos a triar de un mismo carro serán siempre los que lleguen antes y más lejos, y así etapa tras etapa aumentarán las diferencias respecto a los otros tiros. La heterogeneidad dentro de los grupos favorece las relaciones en el grupo clase, separa a los grupos preexistentes con influencia negativa en el trabajo del aula, multiplica las oportunidades de enseñanza-aprendizaje ya que cada componente de un grupo puede ejercer el doble rol de profesor-alumno varias veces en cada sesión.

## 2.2. DISTRIBUCIÓN DEL ALUMNADO. LOS EQUIPOS DE BASE.

Para asegurar la heterogeneidad de los grupos hemos clasificado al alumnado en tres pre-grupos. En el primer pre-grupo, que contendrá aproximadamente un cuarto del alumnado, se encontrarán los alumnos y alumnas más capaces en todos los sentidos (académicos o no). En el segundo, que también contendrá a otro cuarto de la clase, estará formado por los alumnos con más dificultades del grupo

clase. Los otros dos cuartos, alumnado considerado medio, formaran el tercer pre-grupo. Los grupos de trabajo se formarán tomando un alumno o alumna de cada uno de los dos primeros pre-grupos y dos más del tercero. De esta forma tendremos grupos de trabajo heterogéneos de cuatro miembros y que reproducen, en cierto modo, las características del grupo-clase. Evidentemente si los pre-grupos tuvieran una proporción distinta, debida a otras características del grupo-clase, la composición y número de componentes de los grupos de trabajo deberá reflejar ese cambio. En la terminología del trabajo cooperativo los grupos formados de esta forma reciben el nombre de *grupos base*.

**Nota:** Aunque la metodología del trabajo cooperativo establece un reparto de roles entre los distintos miembros del grupo hemos optado por dejar libertad de organización y gestión a los grupos. A cambio hemos reforzado la supervisión del trabajo y hemos realizado entrevistas personales con los miembros de los distintos grupos. Con grupos de otros niveles y características si será necesario ser más rígidos en la aplicación de esta estrategia.

## 2.3. METODOLOGÍA.

Se ha tratado de ensayar estrategias basadas en la filosofía de la escuela inclusiva. Sensibilizar al alumnado y hacer crecer en él la vivencia de los valores implícitos a la inclusión así como la satisfacción por vivir estos valores.

Se ha utilizado como principio metodológico básico el aprendizaje cooperativo, que considera que

"*Ser capaz de realizar habilidades técnicas como leer, hablar, escuchar, escribir, calcular y resolver problemas es algo valioso pero poco útil si la persona no puede aplicar estas habilidades en una interacción cooperativa con las otras personas en el trabajo, en la familia y en los entornos comunitarios.*" (Johnson y Johnson, 1997,).

De esta forma el trabajo en equipo cobra sentido como contenido y no sólo como un recurso para el aprendizaje de contenidos de otras áreas.

Teniendo en cuenta que los recursos materiales, temporales y humanos son limitados hemos intentado dar más importancia al alumnado en el proceso de enseñanza aprendizaje utilizando parte de las posibilidades de la **tutoría entre iguales**, que se sustenta en la colaboración que un alumno dispensa a un compañero de clase que ha formulado una demanda de ayuda y en la que hemos confiado para mejorar el rendimiento individual y del grupo clase.

Nota: Aunque esta estrategia tiene una organización propia que es más aplicable en agrupaciones de dos alumnos, hemos creído conveniente potenciarla en el trabajo en grupo de forma que cada miembro del grupo tuviera tres alumnos o alumnas y cuatro profesores o profesoras.

La estructura de aprendizaje utilizada en el día a día ha sido "**Cabezas numeradas"** y teóricamente es así:

- **Objetivo**: Conseguir que todo el grupo asuma los mismos objetivos y que todos conozcan en igual media los aprendizajes concretos y sencillos que se quieran aprender.
- **Descripción**: Después de trabajar sobre un tema concreto, una pregunta, un problema, una operación, el equipo llega a una respuesta y debe trabajar para que *todos* los miembros del mismo tengan la capacidad de explicar correctamente la

respuesta. Cada miembro del grupo está numerado y al azar se saca un número que debe explicar a todo el grupo-clase la respuesta de clase. Si lo consigue adecuadamente la recompensa es para todo el equipo. *Hemos cambiado la explicación a la clase por la elaboración de una ficha individual que se recoge sólo al alumnado seleccionado.*

- **Aplicaciones**: Es ideal para preguntas cortas en que tengan que investigar las respuestas. Resolución de problemas. Lectura comprensiva de un texto complejo.
- **Variaciones**: Hacer recompensas especiales para alumnado con NEE. (no es el caso)
- **Nivel**: Todos
- **Tipo de actividad**: Construir equipo (Teambuilding) Evaluación cooperativa.
- **Principios básicos que trabaja**: Interdependencia positiva y responsabilidad individual.

# 3. 3. PUESTA EN PRÁCTICA.

Las reglas básicas para la dinámica de grupo han sido las siguientes:

- Se les reparte a cada grupo las fichas para que comiencen a trabajar y vayan respondiendo a las preguntas.
- Cualquier alumno del grupo puede plantear una duda al profesor, con la condición de que ningún miembro del grupo sea capaz de responderla o aun siendo capaz de responderla no sea capaz de hacerse entender por sus compañeros.
- A cada grupo se le responderá sólo una cuestión por turno.
- El orden en el que se atiende a los grupos es inalterable.
- Cada alumno se numerará del 1 al 4 y escribirá en su ficha el número que tenga, no pudiendo coincidir con el número de otro compañero de grupo, antes de comenzar a trabajar con cada ficha.
- La evaluación del trabajo del grupo en cada ficha se realizará a través de la corrección del trabajo de uno de sus componentes, elegido al azar y de la ficha.

La calificación de la ficha supondrá un 25% de la nota del tema.

## 3.1. PAPEL DEL PROFESOR.

- Prepara las fichas.
- Dinamiza y controla el trabajo de los grupos.
- Compensa los posibles desfases en el ritmo de aprendizaje de los distintos grupos.
- Puede realizar una atención más individualizada sin que el resto del grupo clase quede inactivo. Este es el principal beneficio que vemos en el papel del profesor, que puede atender mejor la **diversidad** que se encuentra en el aula.
- Hace aclaraciones generales.
- Califica las fichas y/o trabajos.

## 3.2. MATERIAL.

El material utilizado ha sido:

- Libro de texto.
- Fichas de actividades, dos por grupo.

- Fichas de control, una por alumno.
- 14 calculadoras ClassPad 330, dos por grupo.
- Teodolitos de elaboración propia.
- Material diverso para poder realizar las mediciones (cinta métrica, mesa espejo, escuadra de metal, nivel...)

## 3.3. FICHAS.

A continuación damos una muestra de las actividades que se han preparado en las fichas, de las fichas de evaluación y del control final.

**Actividad1**

- Representa las funciones $y = x^2, y = 2x^2, y = 4x^2, y = 10x^2$ en un mismo sistema de referencia (para diferenciarlas utiliza distintos tipo de trazos). Responde a las siguientes cuestiones:
- ¿Tienen algún punto en común? ¿Tiene ese punto alguna característica especial?
- Fíjate en las distintas parábolas que tienes representadas. ¿Podrías explicar cómo influye el coeficiente "a" en la forma de la parábola?
- Determina el dominio de definición y el recorrido de cada una de ellas puedes ayudarte del comando **trazo** del menú **análisis**.
- ¿En qué se diferencian las gráficas? Relaciona dichas diferencias con el valor de "a".

**Actividad 2**

Representa las funciones $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = \frac{1}{10}x^2, \ y = -2x^2$ en un mismo sistema de referencia. Responde a las mismas cuestiones de la actividad anterior.

**Actividad 3**

- Representa las funciones $y = x^2, y = x^2 + 3, y = x^2 - 5$, en un mismo sistema de referencia. ¿Tienen el mismo vértice? , ¿Cuales son las coordenadas de los vértices?, ¿Por qué crees que ocurre esto?
- ¿Piensas que ocurrirá lo mismos si en lugar de hacer la transformación anterior $y = x^2$ lo hacemos con cualquier otra función? Razona tu respuesta.

**Actividad 4**

Dadas las funciones $y = x^2 + 7, y = 2x^2 + 3, y = -3x^2 + 4, y = -3x^2 - 4$ determina el vértice sin representarlas.

**Actividad 5**

Representa las funciones $y = x^2, y = (x-1)^2, y = (x-3)^2, \ y = (x+2)^2$ en un mismo sistema de referencia. Responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuales son las coordenadas de los vértices?
- ¿Tiene alguna relación con las coordenadas de los vértices la cantidad que estamos sumando a la x? Justifica la respuesta.

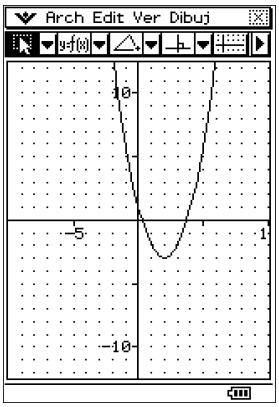
**Actividad 6**

Dadas las coordenadas de los siguientes puntos: (0,-1), (-1,0), (0,3), (3,0), (4,5). Escribe la expresión analítica de una función cuadrática que tenga como vértice a cada uno de ellos.

A continuación se detalla una ficha de las utilizadas en clase para el estudio de funciones y la correspondiente ficha de evaluación. Después se incluye la ficha utilizada para el trabajo de semejanza con la correspondiente ficha de evaluación.

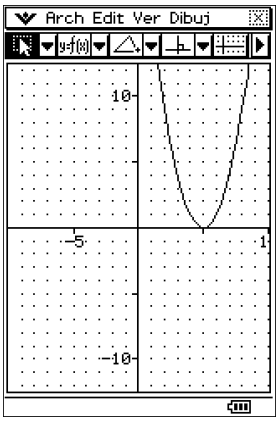
*Ficha 1: Funciones cuadráticas*

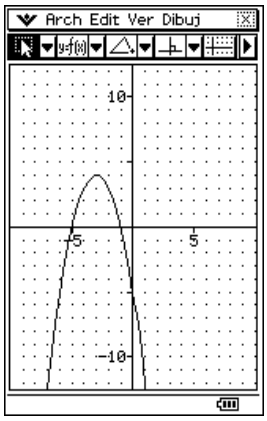
1.- Identifica la expresión analítica correspondiente a la gráfica siguiente:



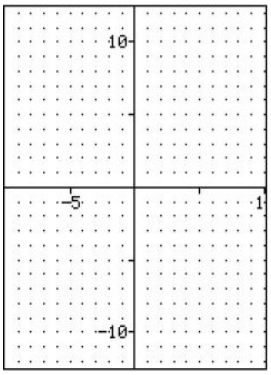

a) $y = (x+2)^2 - 3$ b) $y = (x-2)^2 - 3$
c) $y = (x+3)^2 - 2$ d) $y = (x+4)^2 - 2$

2.- Escribe la expresión analítica de las gráficas siguientes:




3.-Representa la función: $y = -x^2 + 5$




a) Escribe la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice. ¿Encuentras alguna relación entre las coordenadas del vértice y el eje se simetría?

b) Calcula las coordenadas de los puntos de corte si lo hay.

Número de grupo:
Nombre del alumno/a:

A continuación te planteamos unos problemas que deberéis de resolver en grupo. Debéis complementar cada uno de vosotros/as la ficha que se os ha entregado, indicando las herramientas, materiales y el procedimiento que vais a emplear. En cada problema tenéis que copiar (sólo página, nº y solución) un ejercicio que se ajuste a la resolución que vais a emplear (de los ejercicios trabajados en el aula). En la resolución de cada problema debes utilizar una estrategia diferente, elige la más adecuada a cada problema, si se repite alguna sólo puntúa la mitad. Mañana viernes vamos a proceder a la medición real, tenéis que tener todo pensado para que la práctica sea ágil. Si creéis que vais a necesitar algún material extra (palo, escuadra, cinta métrica,…) traerlo vosotros, porque aunque el centro disponga de algunas unidades no sabemos si habrá para todos (sólo se va a utilizar un teodolito por grupo).

1.- ¿Cuál es la altura del alero del tejado del pabellón del Ayuntamiento respecto de la pista polideportiva del Instituto?



2.- Calcula la altura del edificio del instituto que contiene el taller de tecnología.





3.- Calcula la altura de la zona superior de la grada desde la que se accede al distribuidor del instituto.



4.- Desde la zona anterior calcula la longitud de la pista polideportiva del centro.

La calificación de la práctica tendrá en cuenta, entre otros aspectos, la planificación del trabajo y la distribución del mismo entre los miembros del grupo. La distribución de los roles de cada miembro del grupo debe variar de un problema a otro.

| | |
|---|---|
| Nombre del alumno/a: | Nº dentro del grupo |
| | Problema nº: |
| | Calificación: |

1.- Problema hecho en clase. (Página, nº y solución)
2.-Pasos que se van a seguir y responsables.
3.- Materiales y herramientas que se van a utilizar y cómo se van a utilizar.
4.- Esquema del problema y tabla de recogida de datos.

# REFERENCIAS.

PUJOLÀS MASET, P. (2003)"El Aprendizaje Cooperativo: Algunas Ideas Básicas" Universidad de Vic.

CAÑO DELGADO, M. (2010)"Redes de Convivencia" Proyecto Socio comunitario de los IES de El Puerto de Santa María.

# LEEMOS DIBUJAMOS Y HACEMOS PROGRESIONES

**Paloma Pascual Albarrán**,
*I.E.S. Guadalpeña, Arcos de la Frontera (Cádiz)*

## RESUMEN.

En esta comunicación voy a contar una experiencia de aula, en la que se combinan la lectura de textos, con las progresiones aritméticas y con el uso de Geogebra. Lo que se trabajan son los números poligonales, con una primera introducción a ellos por medio de la lectura y del visionado de un vídeo, para luego pasar a su construcción con Geogebra y por último se trabajan como progresiones y se demuestran algunas igualdades entre números triangulares, cuadrados, etc.

**Nivel educativo**: Para 3º y 4º de E.S.O.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En los últimos años he trabajado los números poligonales en Estalmat, pero siempre quería llevarlos a mi aula del instituto. Pensaba que mi alumnado no podía realizar la misma actividad en un tiempo razonable. Siempre el factor tiempo está en nuestra contra.

Este año se daban circunstancias que me han hecho replantearme llevar al aula los número poligonales, en 3º de eso.

Al principio de curso cuando al hacer la programación anual en el departamento se acordó dar este curso las progresiones pensé, este año van los números poligonales, luego al ver el nivel de mi alumnado fui desistiendo de ello, pero cuando vi las posibilidades que tenía con Geogebra decidí que lo intentaba.

No tenía muy claro hasta el último momento si dejarlo como una actividad voluntaria o de trabajo de clase. Finalmente opté por una mezcla de ambas cosas.

Esta comunicación trata de explicar mi experiencia en el intento de unir la lectura de textos matemáticos con el currículum y con el uso de las nuevas tecnologías.

## 2. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

Cuando decidí llevar a mi clase de 3º de eso Los Número Poligonales, me asaltaron muchas dudas:

- ¿Serán capaces de dibujarlos?
- ¿Entenderán las relaciones que aparecen?
- ¿Perderé mucho tiempo y no sacaré nada en claro?
- ¿Funcionarán los medios técnicos, todos los días?

Pensé mucho, si explicar en clase las progresiones, y una vez entendidas abordar la actividad o hacer la actividad sin explicaciones previas, que es como la hago en Estalmat. Al final, en función de las capacidades medias de mi alumnado y del tiempo del que podía disponer, decidí que iba a explicar las sucesiones aritméticas en clase y luego propondría la actividad.

Dediqué tres clases a explicar y deducir los conceptos básicos de las progresiones aritméticas y trabajé ejercicios tipo: hallar términos generales a la vista de la sucesión, o conociendo dos términos no seguidos, hallar términos a partir del término general y a hallar la suma de los n primeros términos.

En una siguiente sesión leímos en clase el capítulo LA QUITA NOCHE, del DIABLO DE LOS NÚMEROS. Después leímos otros fragmentos de, LA FÓRMULA PREFERIDA DEL PROFESOR y de A VUELTAS CON LOS NÚMEROS, todos ellos hacen referencia a los números poligonales. Para finalizar visionamos un vídeo de Antonio Pérez en el que habla de estos números.

http://www.youtube.com/watch?v=_uW-GcXtfAY&feature=related

Al término de la lectura y con ayuda de Geogebra construimos los cuatro primeros números triangulares y cuadrados.

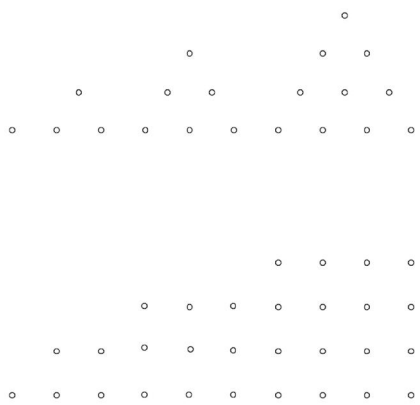


Figura 1 números triangulares y cuadrados construidos con Geogebra

A la vista de las construcciones rellenamos una tabla con los valores de los cuatro primeros números triangulares y cuadrados. En esta ocasión fui yo quien dibujó y relleno la tabla. Todo el archivo lo subí a la página del IES para que en su casa pudieran acceder a él y hacer el trabajo pedido.

Como trabajo para su casa tenían que dibujar, con Geogebra los 4 primeros números pentagonales, hexagonales, etc y completar las filas correspondientes de la tabla.

En la siguiente clase se suponía que el alumnado debía de traer rellena la tabla después de haber hecho los dibujos, como os podéis imaginar eso no ocurrió, pero no me sorprendió, es lo que suele pasar habitualmente en mi instituto. Pero algunas alumnas y algún alumno si lo traían hecho. A partir de los datos que ese alumnado traía fuimos rellenando la tabla. Usé como ayuda una aplicación del

proyecto gauss que va dibujando los números poligonales, les resultó muy atractiva esta construcción.

Según íbamos poniendo números y a medida que yo insistía en que se fijasen en los números que iban apareciendo, se fueron entusiasmando al ver como aparecían progresiones aritméticas, como las que habíamos estudiado en clase, y como además la diferencia en cada una de ellas era el número triangular de orden anterior.

Descubrir esas relaciones les motivó mucho. Era momento de poner por escrito todo eso y entonces pasamos a las actividades propiamente dichas. Les entregué unas actividades, (figura 2), que se pusieron a hacer en clase.

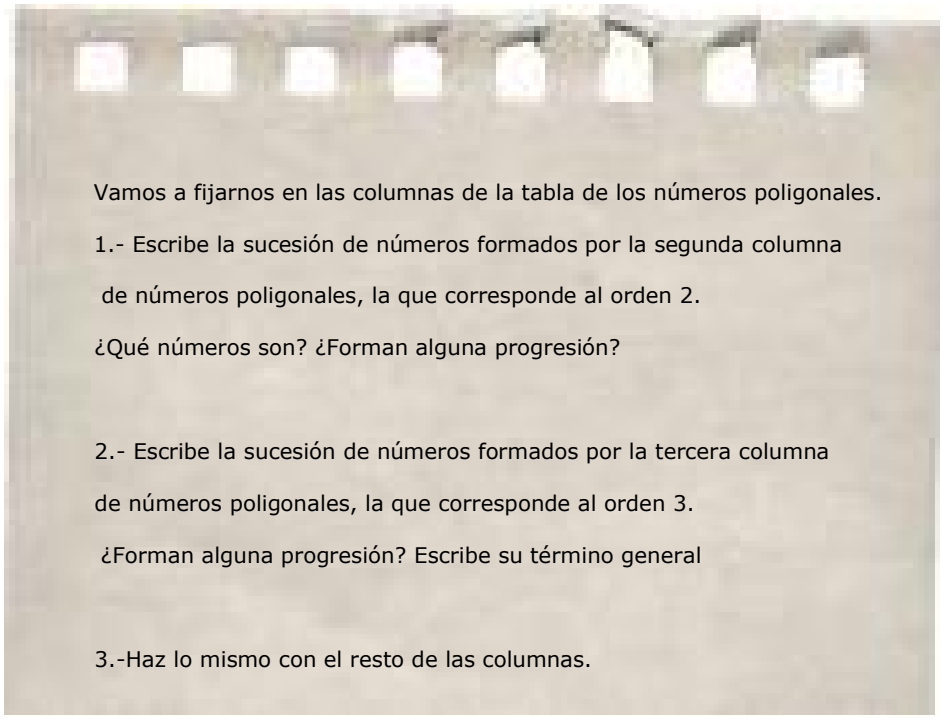


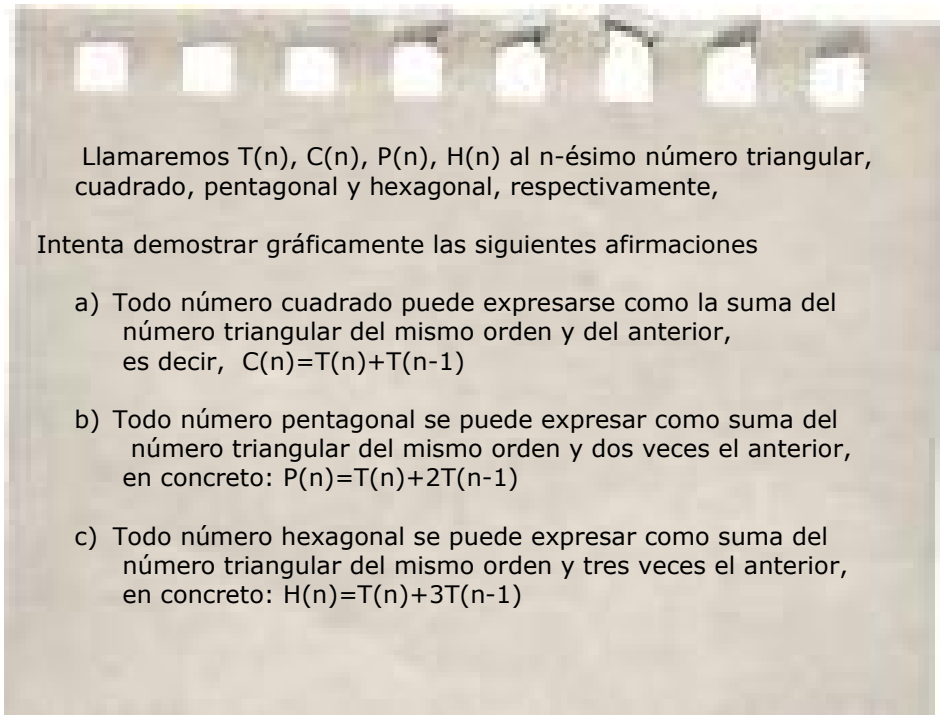

Figura 2 parte de la hoja de trabajo de números poligonales

La mayor parte del alumnado cuando empezó a hacer las actividades se sentía contento porque sabía como se hacía y estaba aplicando los conceptos que días anteriores habíamos explicado en clase. No lo terminaron y clase y lo tenían como tarea para la clase siguiente.

La parte más complicada venía cuando había que estudiar las filas de la tabla, es decir los números triangulares, cuadrados, etc. Aunque en las lecturas anteriores se explicaba como se obtenían los números triangulares y que eran la suma de los n-primeros números naturales, les costaba mucho identificar que cada término era la suma de los n términos de una progresión.

Creo que ese fue el momento más difícil de toda la actividad, una vez superado y entendido, como todos los demás eran parecidos las actividades fueron fluyendo mejor. Tengo que reconocer que no todo el alumnado lo entendió, lo copiaron pero no lo entendieron.

Dediqué otra sesión a encontrar relaciones gráficas entre los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales; esa actividad la hicimos en geogebra sobre los dibujos que habían construido ellos y ellas. Les resultó muy entretenida y más fácil que las otras. En la figura 3 están algunas de estas actividades.


Llamaremos T(n), C(n), P(n), H(n) al n-ésimo número triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal, respectivamente,

Intenta demostrar gráficamente las siguientes afirmaciones

a) Todo número cuadrado puede expresarse como la suma del número triangular del mismo orden y del anterior, es decir, C(n)=T(n)+T(n-1)

b) Todo número pentagonal se puede expresar como suma del número triangular del mismo orden y dos veces el anterior, en concreto: P(n)=T(n)+2T(n-1)

c) Todo número hexagonal se puede expresar como suma del número triangular del mismo orden y tres veces el anterior, en concreto: H(n)=T(n)+3T(n-1)

Figura 3 parte de la hoja de trabajo de números poligonales

Cuando estuvieron realizando esta actividad, que la organicé en grupos, fueron descubriendo herramientas de Geogebra que no conocían. Les surgieron algunas dificultades que fui subsanando sobre la marcha. Les dije que podían usar la aplicación de Gauss que usamos en la construcción. Les ayudó mucho ver que las primeras demostraciones que tenían que hacer les venían indicadas.

## 3. CONCLUSIONES.

Ya puedo contestarme a las preguntas que me hacía antes de iniciar la actividad y que me preocupaban:

- ¿Serán capaces de dibujarlo? Si claro que fueron capaces
- ¿Entenderán las relaciones que aparecen? No todo el alumnado, pero gran parte si.
- ¿Perderé mucho tiempo y no sacaré nada en claro? Tiempo dediqué, pero no lo perdí y en claro sacamos algunas cosas.

- ¿Funcionarán los medios técnicos, todos los días? No, siempre falla algo, eso es seguro. El sonido del vídeo, el cañón, etc, creo que cada día me falló algo, pero para algo está la imaginación instantánea.

Estoy muy contenta con el resultado y pienso que en años sucesivos la seguiré llevando al aula, con sus modificaciones, pero básicamente igual. Tengo claro que explicaré primero un poco la teoría, como en esta ocasión y luego haremos la actividad.

## REFERENCIAS.

HANS MAGNUS ENZENSBERGER. *El Diablo de los Números.*

YOGO OGAWA. *La Fórmula Preferida del Profesor.*

HJOSÉ CHAMOSO, WILLIAM RAWSON. A Vueltas con los Números.

http://www.youtube.com/watch?v=_uW-GcXtfAY&feature=related

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra/pautas/numeros_figurados/actividad.html

# INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA SOBRE LA PRESIÓN ARTERIAL

**Miguel Hernández Portillo**,
*I.E.S. Victoria Kent, Marbella (Málaga)*

## RESUMEN.

Las materias de carácter científico contribuyen al desarrollo de la competencia matemática. La realización de una experiencia de investigación en el aula que investiga el efecto del consumo de una conocida bebida energética sobre la presión arterial se ha basado en el estudio estadístico de los datos experimentales obtenidos. En esta experiencia se utiliza la Estadística Descriptiva para organizar y analizar los datos, y los procedimientos de la Estadística Inferencial para aceptar o rechazar la hipótesis que es objetivo de la investigación. Los datos se comparan con los ofrecidos por la Organización Mundial de la Salud para la población española.

**Nivel educativo**: Bachillerato.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Las ciencias tienen que usar el lenguaje matemático a la hora de estudiar los fenómenos naturales y acuden a las matemáticas para expresar datos e ideas. La vinculación del lenguaje científico y del matemático es fácil de apreciar en la vida cotidiana ya que constantemente hacemos uso de información numérica o interpretamos representaciones gráficas que visualizan las relaciones entre los valores de diferentes variables. Sin embargo, los procesos de categorización o de cuantificación o la realización de ejercicios numéricos no son un fin en sí mismo. Son unas herramientas que no sustituyen ni a los fenómenos naturales ni a la resolución de situaciones problemáticas, sino que ayudan a identificarlas, analizar sus causas y consecuencias y a sacar algunas conclusiones. Las materias de carácter científico contribuyen de forma clara al desarrollo de la competencia matemática. (PRO, 2012).

Las actividades de carácter científico estimulan la curiosidad, ayudan a relacionar conocimientos con otras materias y permiten efectuar nuevos aprendizajes. Un experimento basado en el estudio del efecto de una bebida energética sobre la presión arterial pone en juego conocimientos de Matemáticas, Química y Ciencias de la Salud. El estudio estadístico determina qué se quiere estudiar y en qué población, cómo se va a obtener la información, ordena y tabula los datos recogidos, los representa gráficamente y calcula los parámetros estadísticos que resumen la información obtenida en el experimento.

## 2. INVESTIGACIÓN SOBRE LA PRESIÓN ARTERIAL.

Las bebidas energéticas son bebidas refrescantes que incluyen como principales ingredientes cafeína, taurina, glucuronolactona, vitaminas B y

azúcares. El nivel de consumo de estas bebidas ha crecido enormemente en los últimos años debido a los efectos que se les atribuyen.

Desde la comercialización de la bebida Red Bull® se han sucedido artículos científicos que advierten que la ingestión de la bebida refrescante provoca un aumento de la presión arterial (Bichler, Swenson & Harris, 2006; Seifert, Schaechter, Hershorin & Lipshultz, 2011), que refuerza los efectos que se le atribuyen a la bebida.

## 2.1. Objetivo de la investigación.

El objetivo de la investigación es comprobar si la bebida energética produce un aumento de presión arterial, mediante un método experimental diferente al utilizado por Bischler y colaboradores. Vamos a realizar un estudio para obtener la presión arterial poblacional media a partir de muestras de hombres y de mujeres, y esos datos los compararemos con un valor significativo de la presión arterial para la población española en ambos grupos obtenidos en un estudio de la Organización Mundial de la Salud.

Nuestra investigación trata de validar o rechazar la siguiente hipótesis: "Si bebes la bebida energética entonces te aumenta la presión arterial (sistólica o máxima)", para lo cual se va a realizar un estudio de Estadística Descriptiva e Inferencial.

## 2.2. Metodología empleada.

La medida de la presión arterial sistólica se ha realizado en alumnos voluntarios mayores de 15 años a los que se les ha informado del desarrollo del experimento y han expresado su consentimiento por escrito para participar en el estudio experimental, según establece la normativa internacional vigente en materia de experimentación con seres humanos (Declaración de Helsinki de la Asociación Médica Mundial, 1964).

Para realizar la recogida de datos, el participante llegó en ayunas al instituto, reposó durante 15 minutos y se le tomó la primera medida de presión arterial. Si la presión arterial sistólica (máxima), en esas condiciones, superase los 140 mm de mercurio el participante será descartado de la experiencia. A continuación tomó la bebida (una lata de Red Bull® de 250 ml fría) que se abrió delante del participante, y transcurrida media hora y una hora desde la ingestión de la bebida se le tomó la presión arterial. Durante la experiencia el participante permaneció sentado, en silencio y sin cruzar las piernas. Las medidas de presión arterial se realizaron con un tensiómetro digital "Tensoval".

Hemos medido la presión arterial a un grupo de 5 mujeres y a otro de 5 hombres (muestras $N_1$) lo que nos ha permitido obtener la media y la desviación típica de la presión arterial sistólica para ambos grupos. Los datos que superaban 1.5 veces el intervalo intercuartílico se han considerado como datos atípicos (método de Tukey).

La distribución t de Student permite la estimación de intervalos de confianza para la media aritmética en muestras de pequeño tamaño. La siguiente ecuación permite calcular el valor medio poblacional de la presión arterial con una desviación típica desconocida:

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{t s}{\sqrt{N}}$$

donde $\mu$ es el valor verdadero, $\bar{x}$ la presión arterial media de la muestra, t

es el valor de la t de Student, s la desviación típica calculada a partir de los datos y N el tamaño de la muestra.

A partir de esta ecuación hemos calculado el número de individuos que deben formar las muestras de hombres y mujeres (muestras $N_2$) que permiten determinar la media poblacional de la presión arterial con un grado de confianza y un error relativo fijado por el experimentador (Hartman, 2000):

$$\varepsilon \bar{x} = \frac{ts}{\sqrt{N}}$$

donde $\varepsilon$ es el error relativo que fija el experimentador.

La t de Student depende del tamaño de la muestra por lo que el cálculo de $N_2$ se obtuvo mediante un método iterativo de la ecuación:

$$N_2 = t^2 s^2 / \varepsilon^2 \bar{x}^2$$

considerando como valor inicial de t el valor para $N=\infty$ y los valores de la media y la desviación típica de la muestra $N_1$.

$N_2$ da el número mínimo de individuos a los que hay que tomar la presión arterial para que los datos contengan con un grado de confianza determinado por el experimentador la media poblacional de la presión arterial.

Los datos de la media poblacional de la presión arterial obtenidos para mujeres y hombres en nuestra investigación y los de la media poblacional para ambos grupos proporcionados por la Organización Mundial de la Salud (Ono T., Guthold R. y Strong K., 2010) nos van a permitir realizar un contraste de hipótesis para validar o rechazar la hipótesis de partida.

La formulación del contraste de hipótesis contiene las siguientes etapas:

1. Formulación de la hipótesis nula y alternativa:

   Hipótesis nula $H_o$: $\mu \leq \mu_o$

   Hipótesis alternativa $H_1$: $\mu > \mu_o$

con $\mu_o$ = 115.9 mmHg para las mujeres y $\mu_o$ =121.6 mmHg para los hombres, según los datos del estudio de la O.M.S., siendo $\mu$ la media de la presión arterial de la muestra $N_2$ una hora después de haber ingerido la bebida energética.

2. Establecer el tamaño de la muestra y fijar el nivel de significación ($\alpha$ = 0.05).

3. Elegir el estadístico de contraste y su distribución.

4. Formular la regla de decisión: Siendo X el estadístico de contraste, si $X \leq t$ (para los grados de libertad correspondientes al tamaño de la muestra para una distribución de t de Student unidireccional de cola derecha) se acepta la hipótesis nula, y si X>t se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa.

5. Cálculo del estadístico de contraste para la muestra estudiada.

$$X = \frac{\mu - \mu_o}{\sigma/\sqrt{N}}$$

6. Aplicar la regla de decisión: aceptación o rechazo de la hipótesis nula, e interpretación de resultados.

## 2.3. RESULTADOS OBTENIDOS.

La medida de la presión arterial inicial en condiciones basales para una muestra de 5 mujeres (muestra $N_1$) obtuvo un valor medio de presión arterial 107 mmHg y desviación típica de 8 mmHg. A partir de estos datos se realizó el método iterativo de la ecuación $N_2 = t^2 s^2 / \varepsilon^2 \bar{x}^2$ descrito en la Tabla 1 para obtener el tamaño mínimo de la muestra $N_2$:

| t | s | $\varepsilon$ | $\bar{x}$ | N | $N_{aprox}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.96 | 8 | 0.05 | 107 | 8.58982968 | 9 |
| 2.306 | 8 | 0.05 | 107 | 11.8902508 | 12 |
| 2.201 | 8 | 0.05 | 107 | 10.8320959 | 11 |
| 2.2281 | 8 | 0.05 | 107 | 11.1004802 | 11 |
| 2.2281 | 8 | 0.05 | 107 | 11.1004802 | 11 |

Tabla 1. Iteración para el cálculo de $N_2$.

El número mínimo de datos para obtener una media de la presión arterial fiable es 11. En la práctica se tomaron medidas de una nueva muestra de tamaño algo mayor (N=13) obteniendo los resultados descritos en la Figura 1:

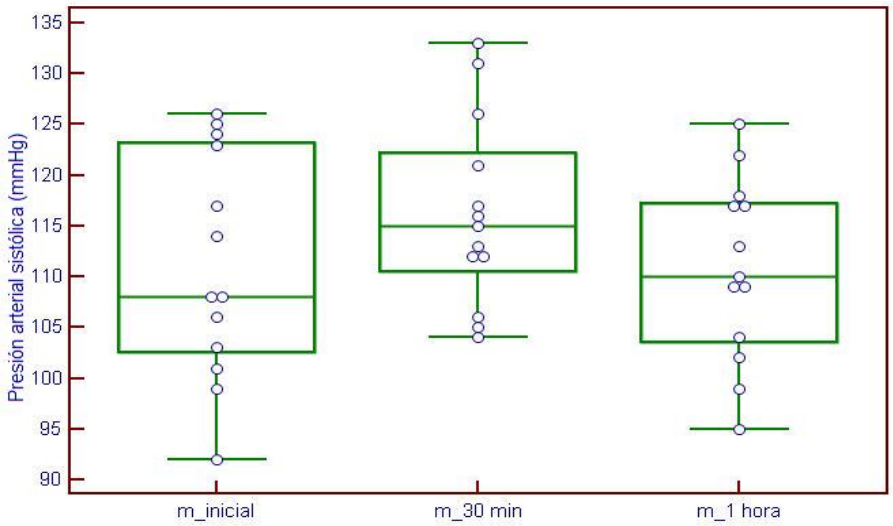



Figura 1. Gráficas de cajas y bigotes de la variación de la presión arterial con la ingestión de la bebida energética (mujeres N=13).

Los parámetros estadísticos de esta muestra se recogen en la Tabla 2, con los datos de media aritmética, desviación típica y mediana de los datos recogidos al inicio, y a los 30 minutos y a la hora de haber consumido la bebida energética:

| Muestra | N (individuos) | $\bar{x}$ (mmHg) | s (mmHg) | Med (mmHg) |
|---|---|---|---|---|
| inicial | 13 | 110 | $1.0 \cdot 10^1$ | 108 |
| 30 min | 13 | 120 | $1.0 \cdot 10^1$ | 115 |
| 1 hora | 13 | 110 | $1.0 \cdot 10^1$ | 110 |

Tabla 2. Parámetros estadísticos de la muestra $N_2$ (13 mujeres).

Los resultados obtenidos añadiendo a la muestra $N_2$ los datos obtenidos en la muestra $N_1$ se representan en la Figura 2:

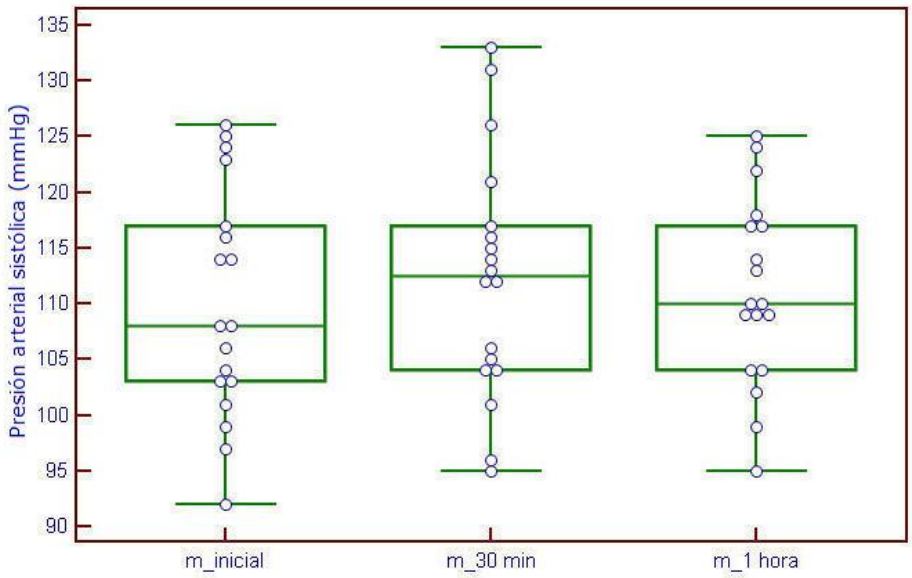



Figura 2. Gráficas de cajas y bigotes de la variación de la presión arterial con la ingestión de la bebida energética de la muestra ampliada (mujeres N=18).

Los parámetros estadísticos de esta muestra ampliada (los datos de la muestra $N_1 + N_2$) se recogen en la Tabla 3:

| Muestra | N (individuos) | $\bar{x}$ (mmHg) | s (mmHg) | Med (mmHg) |
|---|---|---|---|---|
| inicial | 18 | 110 | $1.0 \cdot 10^1$ | 108 |
| 30 min | 18 | 110 | $1.0 \cdot 10^1$ | 113 |
| 1 hora | 18 | 110 | $1.0 \cdot 10^1$ | 110 |

Tabla 3: Parámetros estadísticos de la muestra ampliada (18 mujeres).

El cálculo del estadístico de contraste se realiza con el valor de la media transcurrida una hora de la ingestión de la bebida (110 mmHg) y un valor significativo proporcionado por la Organización Mundial de la Salud. Este valor para la población femenina mayor de 15 años es 115.9 mmHg.

# 3. CONCLUSIONES.

El gráfico de cajas y bigotes de la muestra de 13 individuos en la muestra inicial indica que el rango intercuartílico es de 22 mmHg, mientras que el rango intercuartílico, después de una hora de la ingestión, ha bajado a 15 mmHg (Figura 1).

La comparación entre las medias aritméticas de la presión arterial y medianas al inicio y después de 1 hora, indica que después de 1 hora de la ingestión no se ha producido variación de la presión arterial mientras que la mediana ha aumentado 2 mmHg (Tabla 2).

La muestra ampliada a 18 individuos muestra un rango intercuartílico de 14 mmHg en las medidas iniciales, y en las medidas tomadas después de una hora el rango intercuartílico es de 13 mmHg (Figura 2).

En la muestra ampliada a 18 individuos la media ha permanecido invariable después de transcurrida una hora del consumo mientras que la mediana ha aumentado 2 mmHg (Tabla 3).

La bondad del ajuste de los datos a una distribución normal se comprobó realizando el test de D'Agostino-Pearson para las dos muestras de 13 y 18 mujeres, utilizando el programa MedCalc® para Windows versión 12.2.1.

El estadístico de contraste obtenido para la muestras de 13 individuos tiene un valor de -2.127 y, mediante un contraste unidireccional, se comparó con el valor de la t de Student cuyo valor es 1.78. El p-valor o nivel de significación empírico del contraste de hipótesis es 0.9726 para el test. La hipótesis nula no puede rechazarse para el 95% de confianza, puesto que solo se podría rechazar si el p-valor fuese menor o igual que el nivel de significación fijado por el experimentador.

En la Figura 3 se ha representado la región de aceptación y la de rechazo en la gráfica de distribución para la muestra de 18 individuos:

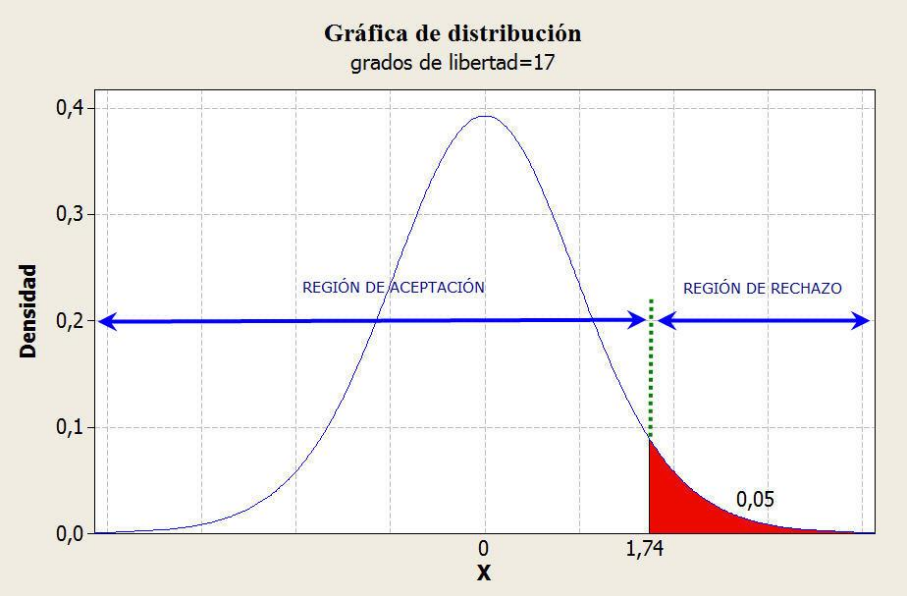



Figura 3. Distribución t de Student para una muestra de 18 individuos.

El estadístico de contraste para la muestra de 18 individuos es -2.503. El p-valor que corresponde al estadístico -2.503 es 0.9886. La hipótesis nula no puede rechazarse para el 95% de nivel de confianza, por lo que la ingestión de la bebida energética no afecta a la presión arterial.

## REFERENCIAS.

BICHLER, A., SWENSON, A., & HARRIS, M. (2006). *A combination of caffeine and taurine has no effect on short term memory but induces changes in heart rate and mean arterial blood pressure.* Amino Acids, Volume 31, Number 4, 471-476. Recuperado el 15 de Octubre de 2011, de Amino Acids: http://www.springerlink.com/content/h71888704m815284/

DECLARACIÓN DE HELSINKI DE LA ASOCIACIÓN MÉDICA MUNDIAL (1964). *Principios éticos para las investigaciones médicas en seres humanos.* http://www.wma.net/es/30publications/10policies/b3/17c_es.pdf

HARTMAN, J. A. (2000). *An In-Class Experiment to Illustrate the Importance of Sampling Techniques and Statistical Analysis of Data to Quantitative Analysis Students*. Journal of Chemical Education , Vol. 77 No. 8 1017-1018.

ONO T., GUTHOLD R. & STRONG K. (2010). World Health Organization, https://apps.who.int/infobase/indicators.aspx

PRO, A. (2012). *¿Desarrollar competencias matemáticas en las clases de ciencias?* Alambique. Didáctica de las Ciencias Experimentales, núm. 70, pp. 54-65.

SEIFERT, S. M., SCHAECHTER, J. L., HERSHORIN, E. R., & LIPSHULTZ, S. E. (2011). *Health effects of energy drinks on children, adolescents and young adults*. Pediatrics, Vol. 127 No 3 pp. 511-528. Recuperado el 17 de Octubre de 2011, de http://pediatrics.aappublications.org/content/127/3/511.full.htm

# LAS SITUACIONES (DIDÁCTICAS) DE FORMACIÓN MATEMÁTICA O LAS COMPETENCIAS DEL SABER "ENSEÑADO"

**M. en C. Maricela Soto Quiñones**
Escuela Normal Manuel Avila Camacho, Zacatecas, México
**M. en E.B. Maricela Rodríguez Ramírez**
Escuela Normal Manuel Avila Camacho, Zacatecas, México
**M. en E. B. Claudia del Carmen Piña Robles**
Escuela Normal Manuel Avila Camacho, Zacatecas, México

## RESUMEN.

El aprendizaje del saber matemático debe prepararse para devenir en un saber enseñado por los profesores de matemáticas, en ese trayecto de formación se ponen en juego diversas competencias que parten de un conocimiento personal, un saber que se vive en las aulas incrustado en ciertas situaciones en las que se asume de manera natural su formalidad y convencionalidad.

El trabajo muestra las competencias que se ponen en juego en el saber enseñado que se desarrolla en la formación de profesores de matemáticas, las situaciones didácticas implementadas y los tipos de interacción suscitados entre maestro formador, profesor en formación y saber didáctico cuya fundamentación práctica se explicita bajo la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

**Nivel educativo**: Universidad

## 1. INTRODUCCIÓN.

A partir de 1960, en Francia, como en otros países, se habían externado ya cierta preocupación por el sistema educativo en general y por la enseñanza de las matemáticas en particular, la creciente importancia del conocimiento científico en el desarrollo de las sociedades y la estrecha relación entre dicho conocimiento y matemáticas eran dos elementos que se consideraban como parte importante del debate sobre la enseñanza de las matemáticas. Estas preocupaciones dieron como resultado la constitución del campo de la Didáctica de las Matemáticas.

En dicha constitución, uno de los teóricos que destaca por sus aportes es Guy Brousseau, quien postulaba la necesidad de indagar sobre los procesos pedagógicos que podrían conducir a la adquisición del conocimiento matemático, esta aseveración quedaría posteriormente acuñada en su teoría: la Teoría de las Situaciones Didácticas. Brousseau (2000) considera que, la búsqueda y creación de situaciones didácticas en la escuela primaria, la identificación y el análisis de las variantes de dichas situaciones, la puntualización de sus efectos en los estudiantes y la organización de su aprendizaje, constituyen el objeto de estudio

principal de la Didáctica de las Matemáticas y también el campo sobre el cual, la Teoría de las Situaciones Didácticas, ha generado conceptualizaciones y métodos de estudio. Desde esta postura, en las aulas se desarrolla un proceso de recontextualización y repersonalización del saber, es decir, se piensa que el conocimiento adquiere sentido para el alumno, sólo cuando lo relaciona con situaciones cotidianas de su acción y responde a las situaciones planteadas, sin embargo, también es preciso comprender que los saberes aplicados son también válidos para otras situaciones, por lo que adquieren un carácter universal.

A este proceso Brousseau (1997) le asigna una dualidad de acciones: 1) hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y, 2) transformar esa respuesta razonable en un hecho cognitivo extraordinario, identificado y reconocido desde el exterior. Dichas acciones permiten a un tiempo identificar las interacciones que docentes y alumnos juegan con el saber, a la vez que promueven la elaboración de situaciones didácticas ajustadas a un saber particular, con la finalidad de promover su construcción, evolución y funcionalidad. Por estas razones es que, en la línea de investigación brousseauniana, existe la necesidad de reflexionar sobre las condiciones de producción del conocimiento matemático en situación escolar, delineando una selección específica de los problemas y situaciones que se han de plantear a los estudiantes, por lo que se destaca como eje de análisis a la situación didáctica en tanto que constituye:

"Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución)." (Brousseau, en Ávila, 2001: 21)

Siguiendo el sentido de esta idea, puede decirse que en efecto, durante el proceso de formación docente, los profesores en formación producen y transforman su conocimiento a partir del despliegue de situaciones didácticas planteadas por el profesor formador, quien, con el objetivo de que los alumnos alcancen y comprendan ese saber sabio, debe "... organizar localmente el aprendizaje de conocimientos elementales considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto..." (Brousseau, 2000: 18), logrando con ello el desarrollo de compentencias didácticas.

Dicha consideración alude a la relación ternaria Maestro-Alumno-Saber, tríada célebre que es constitutiva del llamado sistema didáctico o como en el caso que aquí ocupa, sistema de formación. Un factor adicional a este sistema didáctico es el medio o situación problemática , éste lejos de designar una mera aplicación de saberes enseñados previamente, "...implica todo lo que actúa sobre el alumno o sobre aquello en que recae la acción del alumno..." (Brousseau, en Ávila, 2001: 21), es decir, el medio y/o la situación problemática (didáctica) se incluyen como un dispositivo o tarea específica que ha sido adaptada a los propósitos del objeto de enseñanza y precisando una intencionalidad didáctica que busca fundamentalmente transformar los saberes de los alumnos.

En la formación didáctica-matemática de los profesores, el medio se circunscribe a una diversidad de situaciones con las cuales se puede aprehender el saber didáctico. Por un lado los profesores en formación se enfrentan a

dispositivos que los hacen reconocer y construir conocimientos específicos de la disciplina de matemáticas y por el otro, participan en actividades de análisis sobre las concepciones de los alumnos de educación primaria, es decir los procedimientos, errores y representaciones implementados en la solución de tareas problemáticas. Además, se involucran en una dinámica de exploración de materiales de apoyo para el profesor como ficheros, libros de texto, avances programáticos y programas de estudio, lo que le permite edificar un saber determinado sobre enseñanza y aprendizaje matemáticos. En este sentido, la noción de medio, alude lo mismo a una cierta atmósfera creada para el aprendizaje y también a la serie de instrumentos o medios que se requieren para tal atmósfera.

En esta perspectiva se dice que, cuando el alumno se enfrenta al medio el profesor formador le devuelve la responsabilidad del aprendizaje, diluyendo la participación explicita en la enseñanza, esto es, en una situación didáctica cuyo planteamiento debe llevar a los alumnos a la producción de un saber específico –matemático, proposicional o procedimental-, la devolución significa que el alumno debe interactuar con el medio -sin ayuda del maestro-, producir una estrategia de resolución que le permita adquirir un saber, en este sentido, el medio y la situación problemática deben obligar al alumno a desplegar una acción que sea una prueba de saber, de competencia, esta obligación es del alumno porque él es el responsable de su propio aprendizaje.

La obligación del maestro es plantear una situación didáctica y estructurar un medio que incluya un contenido de saber y que de manera natural obligue al alumno a responder adecuadamente sólo si ha movilizado cognitivamente ese contenido de saber. Sin embargo, una buena situación didáctica no basta para generar aprendizajes, es necesario también establecer una interacción entre el maestro, el alumno y el saber que se caracterice por una cierta intencionalidad didáctica, en otras palabras, cada situación didáctica requiere de un contrato didáctico que conlleve al desarrollo de competencias.

Para que la aceptación de las reglas de interacción con cierta intencionalidad didáctica sea efectiva, se precisa la mediación de un contrato didáctico, esto es, se precisa de una aceptación de los derechos y obligaciones tanto del docente como de los alumnos. A esta aceptación implícita que, generalmente se da a través de los hábitos en la clase es a lo que Brousseau llama contrato didáctico. Esto permite puntualizar la estructuración de la situación didáctica en dos elementos íntimamente vinculados: una situación-problema, en la que el alumno se encuentra ligado con el saber –como sujeto epistémico- y un contrato didáctico, en el que se vincula con la intención de enseñanza –sujeto didáctico-. (Cfr. Ávila; 2001, 25). El contrato didáctico viene a puntualizar las pautas interactivas entre maestro, alumno y saber, especificando los roles que a cada uno competen para que la situación adquiera funcionamiento. Con estos argumentos, se manifiesta que:

"(En todas las situaciones didácticas) se establece una relación que determina explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente – lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato (...) lo que nos interesa de ese

contrato es la parte específica del contenido, es decir, el contrato didáctico." (Brousseau, en Ávila, 2001: 28)

Este planteamiento refleja la distribución de responsabilidades entre maestro y alumnos implicada en la formación de docentes, esto es, el concepto de contrato didáctico permite entender la interpretación que los estudiantes hacen de la situación escolar (derechos y obligaciones) a la que se enfrentan. Dicho contrato puede expresarse a través de las acciones y respuestas que ellos ofrecen cuando se enfrentan a situaciones en las que se incluyen saberes matemáticos y didácticos, para este trabajo se muestra una situación de clase bajo el contenido temático de la división de números naturales trabajada con profesores en formación de la licenciatura en Educación Primaria de la Escuela Normal Manuel Ávila Camacho de Zacatecas, México.

# 2. LAS SITUACIONES Y CONTRATOS DE FORMACIÓN.

La decisión de tomar un contrato basado en la transformación de saberes como referencia no es casual ya que, con ligeras modificaciones y sin explicitarse, estos contratos son también el referente principal para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y, la teoría de las situaciones didácticas es por otra parte, el sustento teórico de los programas de estudio en las Escuelas Normales . En otras palabras, es evidente, por la estructuración y las nociones contenidas en los cursos de formación de profesores, que la teoría de las situaciones didácticas es lo que conforma el cuerpo principal de eso que se ha dado en llamar el enfoque (para la enseñanza de las matemáticas) basado en la resolución de problemas.

En el sentido brousseauniano, la interacción que se establece entre un alumno, y su medio depende, como se ha mencionado, del tipo de tarea asignada y del propósito didáctico que se persigue, esto, en conjunto, viene a determinar la postura del docente, las relaciones inter-alumnos y los recursos de apoyo que se podrán implementar. En estos contratos se distinguen entonces varios tipos de interacciones o fases de una situación didáctica (Cfr. Brousseau, 2000: 19-20): de acción, formulación, validación e institucionalización. En este caso, durante el curso dirigido a los profesores en formación, se intentó seguir un contrato basado en la transformación de saberes, es por esta razón que, en lo que sigue, se intenta ilustrar la manera en la que se desarrolló.

## 2.1. LA FASE DE ACCIÓN.

En ésta, el alumno resuelve una situación problemática donde el docente determina o limita sus acciones mediante reglas o consignas. Se demanda el despliegue de estrategias que fungen como la mejor alternativa para dar solución al problema planteado. La situación acción lejos de limitarse a una manipulación ordenada del medio, debe permitir a los estudiantes juzgar los resultados de su acción, obligándolos a mejorar y adaptar su modelo conforme a la retroalimentación constante de la situación. En esta interacción el alumno manifiesta una comprensión instrumental de la situación haciendo diversas representaciones sobre el saber puesto en juego. En el siguiente fragmento de registro de una de las clases con los profesores en formación, se puede ver una situación de acción referida al saber matemático:

M: Les voy a entregar un problema y en la hoja de papel bond que les entregué van a anotar sus procedimientos. (El problema plantea un reparto de 20 chocolates entre 5 niños, se intenta que los alumnos identifiquen los significados de la división con números naturales).
A: ¿Vamos a hacerlo con multiplicaciones?
M: Como ustedes quieran, lo único es que no pueden usar la división
A: ¿Qué vamos a hacer en la hoja?
M: Vamos a anotar los procedimientos que hicieron para resolverlo, no el resultado, sólo el procedimiento (los alumnos comienzan en sus equipos a leer el problema)

El fragmento muestra una situación en la que los profesores en formación deben resolver un problema de división externando la resolución con una representación gráfica, las acciones emprendidas se efectúan bajo un parámetro o consigna preestablecida –no emplear la división- por lo que puede observarse un contrato de aplicación y control, es decir, los alumnos comprenden y relacionan el concepto de división para la resolución del problema pero ésta se controla con el uso de otros procedimientos.

## 2.2. LA FASE DE FORMULACIÓN.

Este tipo de interacción se caracteriza por manifestar un medio adidáctico , que se organiza de tal manera que obliga a los profesores en formación a externar sus saberes para elaborar formulaciones a través del lenguaje –oral o escrito-. En este sentido se manifiesta un saber implícito referido en un enunciado, propiedad o relación que permite dar cuenta de la comprensión intuitiva de la situación planteada. En la siguiente tarea sobre el conocimiento específico de enseñanza y de aprendizaje matemático es posible apreciar una situación de formulación:

8:50
A: Nosotros decimos que los niños tienen varios procedimientos para resolver el problema pero también hay errores que se pueden cometer, donde hay más es en el de cálculo y donde hay menos es el posicional y el de agrupamiento (Escribe):

Cálculo Estrategias
Posicional Comprensión
Procedimental Agrupamiento
M: Los demás tienen algún otro error?
A: Otro es cuando el resultado no corresponde con el problema (lo anotan)
M: Vayan viendo si hay otro error
A: Yo tengo otro el de no dominar la operación
A: Otro el de no identificar los sobrantes, abandono de procedimientos para llegar al resultado, error de acomodo
M: Vayan viendo si los tipos de errores se repiten
A: (Pasa y escribe) No domina la operación
M: Equipo de Gisela

A: El error de direccionalidad
A: Y el error de signo.
A: El de acomodo

Lo anterior muestra las formulaciones elaboradas por los alumnos sobre los tipos de errores que pueden tener los niños ante la resolución de un problema de división. Aunque sus afirmaciones aluden, aún sin saberlo, a los errores semántico y sintáctico señalados por Brousseau; los profesores en formación han diseñado una categorización derivada de las características propias de cada error, expresando sus conceptualizaciones a través del lenguaje y argumentaciones manifestadas, sin embargo también es visible que en esta primera situación no intentan probar o validar sus leyes o formulaciones. Durante esta situación es visible un contrato de ostensión en el que los estudiantes normalistas se acercan al medio para visualizar los conceptos, nociones y principios de los errores para aprenderlos e identificarlos en otras circunstancias semejantes, en las que tal vez ya sean capaces de nombrar su convencionalidad.

## 2.3. LA FASE DE VALIDACIÓN (O PRUEBA).

Estas interacciones explicitan las concepciones matemáticas, proposicionales o procedimentales de los alumnos, se organizan de manera que la relación alumno y medio a-didáctico exprese la justificación de aseveraciones, teoremas y demostraciones que han sido conformadas como tales. En estas situaciones el estudiante valida las acciones y argumentos expresados previamente, reflejando el razonamiento didáctico logrado y contribuyendo a la construcción paulatina de nuevos saberes, por este motivo se encuentra fuertemente vinculada y casi adherida a las situaciones de formulación.

El siguiente fragmento de clase presenta una ejemplificación de estas situaciones en las escuelas normales, en ésta los alumnos se enfrentaron inicialmente a una situación acción relacionada con el saber específico de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para ello resolvieron un problema tasativo con la consigna de emplear procedimientos informales.

As: Nosotros (pasa un alumno). Lo que hicimos fue (dibujo de agrupación)
A: primero pintamos todos los chocolates y luego los encerramos

XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX

A: ¿Cómo sabes que se les iba a repartir cinco? (...)
As: Porque el problema lo dice.
A: Maestra, pero aquí es un número exacto, ¿qué pasaría si sobrarían?
M: O Bien ¿qué harías si no se ajusta de chocolates?
As: Abres otra caja
M: ¿Pero si ya no tiene chocolates?
As: Eso es lo que sobraría (señalan el pizarrón)
As: Por eso, ¿porqué pintas 5 invitados si nada más ajustas para cuatro?

M: ¿Porque no lo dibujaron de otra manera? Esta pudiera ser una forma pero vean que esto es más complejo.
A: Por eso era más fácil de uno en uno
A: Ese está más fácil que el otro
M: A ver (el alumno pasa y dibuja en el pizarrón)

O O O O
O O O O
O O O O
O O O O
O O O O
1 2 3 4

A: Va entrando una persona y le dan sus 5 chocolates y así entra otra
A: Así sí, pero ellos (el equipo anterior) dibujaron otra persona
As: Y aquí tenemos el resultado (señala la parte inferior de su dibujo) y es más fácil que el otro.

Al momento de confrontar los resultados, uno de los equipos manifestó ciertas dificultades en la representación del procedimiento empleado, situación que se evidenció cuando el resto de los alumnos cuestionó las acciones desarrolladas, y el equipo trató de validar sus argumentos y representaciones. Haciendo uso de un contrato de mayéutica socrática el formador en conjunto con el resto del grupo, pretende llevar a conclusiones acertadas a los alumnos participantes (circunstancia que es aprovechada por el siguiente equipo para validar la pertinencia de sus acciones).

En esta situación sin embargo, el formador no instituye un conocimiento como tal, sino que se encarga de guiar la formulación bajo ciertas interrogantes, por lo que puede afirmarse que los tipos de interacciones pueden adquirir en un momento determinado un componente didáctico o un componente adidáctico que puntualiza directamente el rol del maestro en las actividades escolares.

En el primer caso, el formador interviene constantemente en las acciones de los alumnos, provocando la problematización, guiando la situación y estableciendo consignas, en oposición a esto, dentro del componente adidáctico el docente enfrenta a los alumnos con situaciones que deben resolver por sí mismos, indagando y definiendo la posible resolución; sobre este respecto es necesario aclarar que los problemas planteados deben guardar una serie de peculiaridades para que puedan inscribirse como un momento adidáctico, a saber:

- ”Que el problema implique al conocimiento nuevo como recurso óptimo de resolución.
- Que puedan generarse diferentes variantes del mismo problema a través de la modificación de ciertas variables.
- Que los alumnos puedan lograr ciertas aproximaciones a la solución en las primeras variantes del problema, con los conocimientos previos que poseen.

- Que las subsecuentes variantes los obliguen a abandonar sus estrategias de solución iniciales para buscar estrategias de solución que se aproximen al conocimiento deseado.
- Que todas las variantes de la situación permitan a los alumnos verificar por sí mismos (sin ayuda del maestro) si el procedimiento que siguieron los llevó o no a la solución del problema." (Dávila, 2002: 178)

La situación adidáctica encierra generalmente un grado de dificultad que supera al estado cognitivo de los alumnos, sin embargo ésta desaparece cuando luego de varios acercamientos se logra sistematizar una estrategia de resolución. Ambos componentes pueden desarrollarse sucesivamente, llevando al final a la adopción de una cuarta fase de interacción: la institucionalización.

Los tres tipos de interacciones mencionados hasta el momento se caracterizan mayormente como situaciones con carácter adidáctico, constituyéndose como un proceso adaptativo en el que los estudiantes logran nuevos equilibrios conceptuales para construir nuevos conocimientos referidos a los saberes en formación y la puesta en juego de competencias consolidadas. El cuarto tipo de interacción se reconoce concretamente como una situación de tipo didáctica, en función de que el docente le ofrece nuevamente a los alumnos los conceptos convencionales en tanto estatutos del saber.

## 2.3. LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER.

A decir de Brousseau "... en estas situaciones se fija convencional y explícitamente el estatuto cognitivo de un conocimiento o de un saber..." (en Ávila, 2001: 156). El maestro busca la correspondencia relacional entre las respuestas personales y empíricas (conocimientos) del alumno y el saber esperado escolarmente –el saber a enseñar- a través de esta correspondencia se hace una institucionalización de los conocimientos que inicialmente aparecieron como respuesta al medio. Durante dicha etapa reaparece explícitamente la figura del profesor al canonizar un saber determinado, ciertas teorías y definiciones, convenciones lingüísticas y gramaticales o procedimientos algorítmicos. Una situación de institucionalización enmarcada en el saber proposicional pudiera ser la siguiente:

9:05
M: Ayer trabajamos con los avances programáticos para ver cómo está planteada la división en los diferentes grados escolares. Podemos afirmar que el significado más trabajado es el de reparto (...) mientras que las estructura predominante sería a÷b=? Eso nos dice que es el profesor quien debe variar las estructuras.
Otra cosa es que desde 3º vemos el algoritmo oscuro y después en 5º o 6º se ve el algoritmo transparente, es decir, los algoritmos no llevan una secuencia rígida, a lo mejor son como (...) acá volvemos a lo no convencional, acuérdense lo veíamos al inicio del semestre (...) esa sería una conclusión. Bien la secuencia como tal estaría enfocada a las cifras, miren en 3º (...)
A: En 3º ¿cuántas?
M: Dos en el dividendo entre una
M: La división entonces es un concepto que se trabaja explícitamente los últimos 4 años de la escuela primaria.

El momento de institucionalización se observa después de que los estudiantes normalistas se han acercado constantemente a un saber determinado –en este caso el saber proposicional-, corresponde ahora al profesor formador dar a conocer la convencionalidad de esos saberes, no basta con limitar la enseñanza a la organización de tareas en situaciones adidácticas es necesario contemplar la perspectiva oficial de ese saber proposicional como objeto de enseñanza. La participación del formador se encuentra implicada en las tareas de enseñanza a través de diversas perspectivas, por un lado debe seleccionar, adecuar y organizar las situaciones, determinando los recursos y consignas correspondientes, cuestionar las acciones de los alumnos sin validarlas o invalidarlas, coordinar las situaciones de formulación y validación para llegar a conclusiones específicas y por último vincular el conocimiento adquirido con el objeto de conocimiento formalmente institucionalizado.

# 3. CONCLUSIONES.

Las negociaciones hechas con el currículo permitieron la elaboración de un curso diferente pero también derivado del propuesto oficialmente, sin embargo, el desarrollo del mismo se vio influenciado por la tradición formadora de los estudiantes, determinando límites y avances en cada una de las situaciones diseñadas.

Las situaciones de acción lograron la puesta en juego de los conocimientos previamente asimilados, iniciando el trabajo de evolución hacia conceptos más elaborados. En su mayoría las tareas se resolvieron favorablemente siguiendo las consignas preestablecidas, aunque algunas mostraron ciertas dificultades dada la complejidad de su esencia, tal es el caso de la explicación algorítmica y el diseño de problemas de división con significado y estructura diferente.

Las situaciones de formulación aparecieron un tanto forzadas, la naturaleza de las acciones desarrolladas hacían que los estudiantes pocas veces pudieran construir una ley para generalizar los hechos, no obstante hubo momentos en los que, ligadas a las situaciones de validación se observaban un tanto diluidas, sobre todo en el saber matemático cuando externaban la manera de resolver el problema planteado o explicaban el origen de cierto mecanismo algorítmico. En el resto de los saberes esta situación resultaba casi imperceptible puesto que las acciones obligaban una inmediata validación, por ejemplo al diseñar problemas de división que fueran diferentes entre sí, la presentación de los mismos permitía mostrar la razón de tal diferencia.

Durante la institucionalización, los alumnos aparentaron asimilar los conocimientos oficiales presentados luego de la fundamentación práctica que avalaba los planteamientos. Al igual que en el caso anterior y no obstante su complejidad, el saber matemático resultó ser el de mayor facilidad para ser institucionalizado, esto deriva posiblemente de la presencia que tiene este saber en los espacios escolarizados a diferencia de los saberes de corte didáctico. Además, estos últimos, dada la multiplicidad de factores que les subyace, no tienen la objetividad formalizada para generalizarse en la práctica.

Una deficiencia percibida en el desarrollo del curso fue el establecimiento de una doble institucionalización, que conjuntara el saber matemático con el resto

de los saberes, ya que por lo general éstos se institucionalizaron de manera particular. Además, la ausencia de una aplicación práctica de los saberes limitaba su completa asimilación. Cuando los alumnos acudieron a la escuela primara los contenidos de práctica eran diversificados y muy pocos tuvieron la oportunidad de confrontar los saberes de la división trabajados en la escuela normal.

La experiencia de trabajar con el fundamento teórico de las situaciones didácticas fue positiva al hacer matemáticas con un enfoque basado en la resolución de problemas, donde los alumnos construyeron su conocimiento matemático-didáctico, confrontando y validando formulaciones. Sin embargo, faltaría extender o ajustar el tiempo didáctico para las tareas que requerían más atención: como fue el caso del diseño de la secuencia didáctica de división para 3º o 4º y la implementación de un momento práctico de la división para todos los estudiantes en la escuela primaria.

Las situaciones didácticas permiten la puesta en práctica de competencias matemáticas para la resolución de situaciones problemáticas en la formación del profesorado pero también representan un elemento imprescincible para el desarrollo de compentencias didácticas.

## REFERENCIAS.

ÁVILA Storer, Alicia. (2001). *La Experiencia Matemática en la Educación Primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar*. Tesis doctoral, UNAM, México. 347 p.

BROUSSEAU, Guy. (1997) *"Los diferentes roles del maestro" en: Didáctica de las Matemáticas*. Aportes y reflexiones. Paidos, México, pp.65-94.

BROUSSEAU, Guy. (2000) *"Educación y Didáctica de las Matemáticas"* en: Educación Matemática. Vol. 12 No. 1 Abril, pp. 5-38

Dávila, Martha (2002) *Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estudio de conocimiento*. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV (Octubre).

# ESTUDIO DE INECUACIONES DE DOS VARIABLES

**Nora Gatica**,
*Universidad Nacional de San Luis (Argentina)*
**Alexander Maz Machado,**
*Universidad de Córdoba (España)*

## RESUMEN.

Diversas investigaciones muestran que los alumnos tienen grandes dificultades al realizar representaciones geométricas en las soluciones de una inecuación de dos variables. En el presente trabajo, mediante una clase realizada en la escuela secundaria, se investigó cómo este concepto, fue construido por los estudiantes y de cómo ellos realizaron los cambios de registros. Además fueron analizados los procedimientos y el contenido cognitivo de sus intercambios en situación de comunicación. Los alumnos encuentran recursos para lograr establecer que la solución está formada por un conjunto infinito de puntos. Ello depende de una buena elección del problema, de lograr que el alumno se haga cargo del mismo y de una intervención apropiada del profesor.

**Nivel educativo**: Secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las inecuaciones lineales, como parte integrantes de las Matemáticas, adquieren relevancia y significado a través de su aporte en la estructuración de los más disímiles temas. A modo enunciativo puede mencionarse su participación en álgebra, trigonometría, investigación de funciones, programación lineal, etc.

Sin embargo, es un tema que normalmente despierta poco interés en cuanto a su enseñanza, tanto de los profesores de la escuela secundaria como en la Universidad.

La importancia de este tema radica en que muchos fenómenos físicos y de otro tipo son modelizados mediante ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones, y por ello la solución de estos problemas se implica la solución de ecuaciones, inecuaciones y sus sistemas.

En el sistema educativo de la República Argentina, específicamente en segundo año del nivel secundario, se encuentra dentro del currículo el tema de las inecuaciones lineales con dos variables.

Los alumnos logran aprender a resolver inecuaciones, a través de procedimientos y de reglas previamente establecidas, pero no enlazan aspectos conceptuales, por lo que el desarrollo de este conocimiento es principalmente de carácter procedimental.

Su enseñanza se reduce a establecer algunas nociones acerca de este concepto y a su representación gráfica, pero en muchas ocasiones, debido a la

extensión de los planes de estudio, al momento de reducir algunos temas, los profesores eligen comprimirlo. La situación es más crítica aún en los casos en que prácticamente no se enseña.

Notamos así deficiencias en la comprensión de este concepto; si bien esta tarea no es nada fácil puesto que se encuentran grandes dificultades para hacer que los alumnos alcancen una comprensión satisfactoria en dicho campo. Esto da lugar a que los estudiantes tengan una idea muy limitada sobre el tema, lo cual repercute en materias posteriores (en la mayoría de los casos universitarias), pues en éstas, las inecuaciones que se utilizan requieren conversiones geométricas, algebraicas y de lenguaje natural, y articular las diferentes representaciones en estos tres registros.

Diversas investigaciones (Duval, 1998; Acuña, 1998; Tapia, 1998; Diez, 1995; Garrote, Hidalgo y Blanco, 2004; Alvarenga. 2006) dan cuenta de las dificultades de los alumnos para encontrar el intervalo correspondiente al conjunto solución de las inecuaciones. El estudio de Filloy (1999) nos muestra que existen dificultades intrínsecas en el aprendizaje del álgebra: errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operatoriamente con las expresiones algebraicas, errores de traducción cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje usual, interpretaciones erróneas del significado de expresiones algebraicas, imposibilidad de la utilización del álgebra para resolver problemas usuales, etc. Sin embargo, estos trabajos, no abordan las dificultades de los alumnos al momento de introducirlos en el tema.

El propósito del presente trabajo, surge como una respuesta a la problemática señalada anteriormente, considerando que la Didáctica de la Matemática juega un papel primordial en estas circunstancias. Desde este enfoque, nos interesa determinar cómo los estudiantes realizan la construcción de este concepto y qué relaciones establecen con conocimientos anteriores.

## 2. REGISTROS Y REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción como son los objetos físicos. Para ello son necesarias las representaciones. Entender un concepto significa tener una imagen del concepto (Pluvinage,1998).

Las representaciones y los sistemas de representación se han convertido en elementos importantes en el estudio de la comprensión en matemáticas y se han consolidado como herramienta útil a tal efecto. Duval (1993), analiza y enfatiza la importancia de la "representación" en matemáticas. Establece que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos.

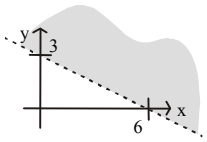
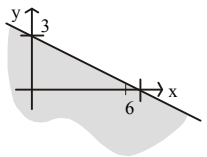
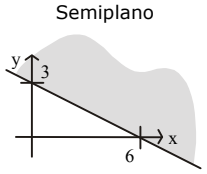
Este autor caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente. Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas:

1. La presencia de una representación identificable como una representación de un registro dado: enunciado de una frase, dibujo de una figura geométrica, escritura de una fórmula...Por ejemplo, en nuestro caso, $6x + 2y < 8$ representa una inecuación lineal con dos variables en el registro algebraico.

2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro. Por ejemplo, aplicando propiedades que se cumplen en las inecuaciones lineales, $6x + 2y < 8$ se puede transformar en $y < -3x + 4$ que representa la misma inecuación en el mismo registro.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida (el registro de la representación por convertir). Por ejemplo, expresar en el lenguaje natural el siguiente problema: *"Si el duplo de un número mas seis veces otro es menor que 8..."*, significa convertir en otro registro la inecuación planteada en el registro algebraico.

Duval considera asimismo, que la comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. Aunque la naturaleza y diversidad que desempeñan el papel de representación es un tema abierto (Font y otros, 2007)

Dada que los problemas que se les presentan a los alumnos en materias posteriores, requiere de la conversión entre los registros: lenguaje natural, simbólico, gráfico y tabular para poder resolverlos, investigamos cuales son las conversiones entre los registros de representación que los estudiantes necesitan efectuar al momento de estudiar el tema, los que se encuentran expuestos en la siguiente tabla:

| REGISTRO LENGUAJE NATURAL | REGISTRO SIMBÓLICO | REGISTRO GRÁFICO | REGISTRO TABULAR | |
|---|---|---|---|---|
| | | | A | B |
| La suma de un número mas la mitad de otro excede a tres | $y+(1/2)x>3$ | Semiplano abierto   | x \| y > <br> 0 \| 3 <br> 2 \| 2 | x \| y \| y+(1/2)x>3 <br> 0 \| 1 \| 1>3 F <br> 3 \| 4 \| 11/2>3 V |
| La suma de un número más la mitad de otro es a lo sumo tres | $y+(1/2)x \leq 3$ | Semiplano   | x \| y ≤ <br> 0 \| 3 <br> 2 \| 2 | x \| y \| Y+(1/2)X≤3 <br> 0 \| 1 \| 1≤3 V <br> 3 \| 4 \| 11/2≤3 F |
| La suma de un número más la mitad de otro es por lo menos tres | $y+(1/2)x \geq 3$ | Semiplano   | x \| y ≥ <br> 0 \| 3 <br> 2 \| 2 | x \| y \| y+1/2x≥3 <br> 0 \| 1 \| 1≥3 F <br> 3 \| 4 \| 11/2≥3 V |

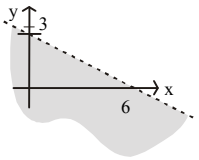
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| La suma de un número más la mitad de otro no excede a tres | y+(1/2)x <3 | Semiplano abierto   | x \| y <<br>0 \| 3<br>2 \| 2 | x \| y \| y+1/2x<3<br>0 \| 1 \| 1<3 V<br>3 \| 4 \| 11/2<3 F |

**TABLA 1:** Registros de representación del concepto inecuación de dos variables

# 3. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES

Godino y Batanero están desarrollando en diversas publicaciones un modelo teórico para la investigación en Didáctica de la Matemática que atiende a las tres dimensiones o facetas principales implicadas en la misma: las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional, las cuales son articuladas mediante una aproximación lingüística y semiótica. En los primeros trabajos publicados sobre esta problemática teórica proponen una noción de significado institucional y personal de los objetos matemáticos de carácter pragmático y antropológico (Godino y Batanero, 1994; 1998). La faceta cognitiva-semiótica es afrontada mediante la "teoría de las funciones semióticas" (Godino y Batanero, 1999), y la instruccional es esbozada en Godino (1999). Todos estos trabajos son recuperables en internet en la página web del grupo de investigación "Teoría y Métodos de Investigación en Didáctica de la Matemática" de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino

Este modelo teórico lo vamos a tener en cuenta como referente para el análisis y caracterización de elementos que pretendemos destacar en nuestra investigación, por lo que consideramos necesario describir brevemente las principales nociones que introducen.

Desde un punto de vista epistemológico, consideramos útil distinguir en los objetos matemáticos una doble dimensión: institucional y personal. En nuestro caso este modelo nos permitirá analizar el objeto "inecuaciones lineales con dos variables" y valorar el grado de acuerdo alcanzado entre este significado institucional pretendido y el personal adquirido por los alumnos.

De acuerdo con Godino y Batanero (1994), una práctica se considera significativa para una persona o una institución, si cumple una función para resolver el problema, para comunicar, validar o extender su solución. Una práctica significativa podría estar vinculada al análisis, en un problema determinado expresado en el registro del lenguaje natural, de resultados obtenidos que cumplen con una inecuación.

El objeto matemático (por ejemplo, el concepto de inecuación) se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos.

## 3.1. Elementos de los significados

En este enfoque teórico, a cada objeto matemático se asocia la entidad significado del objeto que se define como el sistema de prácticas (operatorias y discursivas) realizadas por el "agente" correspondiente para resolver y sistematizar la resolución de un campo de problemas específicos. En consonancia con los tipos de prácticas se considera útil tener en cuenta la siguiente

categorización de entidades primarias puestas en juego en la actividad matemática:

- Ostensivos: representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos), se incluyen en general, las entidades lingüísticas/notacionales. Por ejemplo, las notaciones de desigualdades ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$), tablas de valores x e y.
- Extensivos: entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones – problemas, aplicaciones). Como por ejemplo, cuando se busca un punto (el cual es un vértice del polígono convexo) que maximiza o minimiza la función objetivo.
- Actuativos: Modos de actuar ante situaciones o tareas (procedimientos, algoritmos, operaciones). Estos se ponen de manifiesto por ejemplo, por medio de los diversos procedimientos que se realizan cuando se efectúa una representación gráfica.
- Validativos: tipos de argumentaciones para validar proposiciones (demostraciones, comprobaciones, justificaciones)
- Intensivos: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones). Por ejemplo, propiedades que se cumplen en las inecuaciones, como son: sumando a ambos miembros de una inecuación un mismo número, el sentido de la desigualdad no se altera.

La importancia de la noción de significado que hemos descrito se debe a que de ella se deduce una teoría de la comprensión (Godino, 1996). La comprensión personal de un concepto es, en este modelo, la "captación" del significado de dicho concepto.

## 3.2. Funciones semióticas

En Godino y Batanero (1998), se concibe la noción de función semiótica como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo)
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir a lo que se refiere un interlocutor).
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido a la expresión.

Los cinco tipos de entidades primarias consideradas (ostensivas, extensivas, intensivas, actuativas y validativas) pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando, por tanto, diferentes tipos de tales funciones, algunas de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.) . Atendiendo al plano del contenido (significado) estos tipos se reducen a los siguientes:

- Ostensiva: cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un objeto ostensivo. Por ejemplo; el semiplano representa una inecuación lineal en dos variables.
- Extensiva: cuando el objeto final es una situación problema, como por ejemplo, en general, la descripción verbal o gráfica de una situación problema.

- Intensiva, cuando su contenido es un objeto intensivo. Por ejemplo, en la definición de un concepto: La inecuación lineal $ax + by + c < 0$ representa gráficamente un semiplano.
- Actuativa cuando su contenido es una acción del sujeto. En cualquier proceso de cálculo se establecen dependencias entre distintas partes de la secuencia que son de naturaleza actuativa.
- Validativa: cuando el contenido es una argumentación que valida una proposición.

# 4. ESTUDIOS PREVIOS

Con el objetivo de determinar las dificultades de los alumnos en el tema que nos ocupa, así como la modalidad de enseñanza instituida en los profesores, realizamos las siguientes exploraciones previas:

1. Entrevistas a profesores de la escuela secundaria con el propósito de detectar dificultades de comprensión verificadas en los alumnos y modo de enseñanza del tema.
2. Análisis de cuatro libros de texto de mayor circulación en nuestro país, ya que estos representan referencias importantes para los profesores, con el fin de establecer los distintos registros, prioritarios en los libros, en la enseñanza de las inecuaciones.
3. Observaciones de clases de profesores en el momento de introducir el tema.

**Las conclusiones fueron:**

1. El tiempo estipulado para el dictado del tema, prácticamente es mínimo. Inclusive manifestaron, en ocasiones, no dedicarle ninguna clase. No ocurre lo mismo con ecuaciones lineales con dos incógnitas donde tanto la ejercitación como el tiempo dedicado es extenso. Sobre la modalidad de enseñanza, manifestaron guiarse por las propuestas de los libros.
2. De la propuesta de los libros de textos (Camus, 1997; Englebert, y otros, 1995; Semino, y otros, 1997; Carione y otros, 2001) concluimos que las conversiones entre registros se reducen principalmente entre el registro algebraico y el registro gráfico. Es mínima la ejercitación del registro del lenguaje natural al algebraico.
3. Con el propósito de conocer las propuestas de enseñanza existentes, realizamos observaciones en clases introductorias al tema que nos ocupa. Los profesores al momento de introducir el tema, permanecen en la siguiente ruta lineal:
   - **Registro algebraico**: El profesor propone: *Vamos a encontrar el conjunto solución de la inecuación: $y < 2x + 1$.*
   - **Registro numérico**: El profesor reemplaza algunos puntos del plano en la inecuación propuesta, estableciendo con Verdadero o Falso, si cumple o no, con el signo de la desigualdad.
   - **Registro gráfico**: El profesor sombrea la zona del plano donde están ubicados los puntos con resultado Verdadero, estableciendo que esa región es el conjunto solución buscado.

Es decir, los profesores muestran cómo encontrar el conjunto solución de una inecuación lineal con dos variables, probando si cumple la desigualdad convenida con un punto del plano y extendiendo el conjunto solución a todo un semiplano.

Duval señala que el "instrumento" que posee el estudiante para enfrentar este tipo de problemas se reduce a una "regla de codificación" que no es suficiente para resolver la tarea, la cual establece:

- A un punto del plano le corresponde un par ordenado de números (una pareja de números).

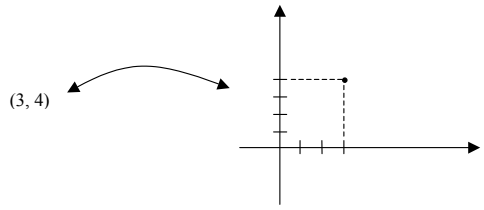



Figura 1**:** Regla de codificación

Esta regla de codificación no permite más que dos cosas: la lectura de una pareja de números sobre la gráfica a partir de un punto o la designación de un punto a partir de una pareja de números.

O sea que actúa como "verificador" de los puntos que cumplen la desigualdad. En efecto, por mas puntos que se localicen en una tarea de "sombreado" nunca podrá llevar a sombrear la zona completa sin una interpolación y aceptar la ley gestaltista de contigüidad...."*No se puede obtener la conversión mediante la aplicación de reglas de codificación*".

En la escuela secundaria, la solución de una inecuación lineal en dos variables, se considera únicamente en el plano coordenado, planteándose el problema de la siguiente manera: Encontrar en el plano una figura geométrica (un conjunto de puntos), tal que las coordenadas de cada uno de dichos puntos satisfaga la desigualdad dada.

De esta manera, los alumnos son capaces de resolver inecuaciones, a través de procedimientos y de reglas previamente establecidas, pero no relacionan este concepto con sus aplicaciones.

# 5. METODOLOGÍA

Nuestra investigación consiste en el estudio del "descubrimiento" que deben realizar los alumnos sabiendo que desde el punto de vista gráfico, el conjunto solución de una ecuación son los infinitos puntos ubicados sobre la recta, al concepto de que en el caso de una inecuación es uno de los semiplanos determinado por la recta.

Los descubrimientos que debe hacer el alumno entran en contradicción con la concepción bien arraigada, reforzada por las actividades anteriores, según la cual, el conjunto solución de una ecuación son los infinitos puntos ubicados sobre la recta.

Esta es una investigación que analiza principalmente variables cualitativas, cuyo enfoque es necesariamente descriptivo y exploratorio en el inicio de la investigación y pasando a un enfoque interpretativo y explicativo en la última fase.

Objetivos de la experiencia:

1. Identificar las estrategias y dificultades de los alumnos en la iniciación del estudio de las inecuaciones lineales en dos variables mediante una experiencia de enseñanza basada en un enfoque constructivista.

2. Analizar la comprensión de este conocimiento frente a una situación de enseñanza sobre construcción del concepto.

Las siguientes preguntas orientaron el presente trabajo de investigación:

- ¿La inecuación lineal en dos variables, como objeto matemático, aparecería para los alumnos como un conocimiento totalmente nuevo, desvinculado con sus conocimientos anteriores?
- ¿O por el contrario, incidiría en ellos, el conocer el conjunto solución de una inecuación lineal en una variable para obtener el conjunto solución de una inecuación lineal en dos variables?
- ¿Serían capaces los alumnos de obtener gráficamente el conjunto solución de una inecuación lineal de dos variables?

Para responder algunas de estas preguntas, elaboramos una situación, que fue puesta en escena con alumnos de 2do. Año (14 años) de la escuela secundaria, quienes desconocen totalmente el concepto inecuación lineal en dos variables.

Se diseñó una tarea, la cuál fue puesta en práctica con 25 alumnos, usándose a estos efectos, la observación de la clase y posteriores entrevistas clínicas a algunos de ellos. Se dividió la clase en 6 grupos, cada uno de los cuales fue controlado por un profesor. Se estableció la siguiente consigna:

*En la hoja Uds. tienen dibujada una recta de ecuación: $y = -1/2\ x + 3$. El trabajo de Uds. consistirá en encontrar gráficamente los puntos que satisfacen la relación escrita en la parte inferior de la hoja $y < -1/2\ x + 3$.*

La actividad que se solicitó fue una tarea de descubrimiento del conjunto solución, pero también una tarea de cambio de registro, sin tener ninguna referencia al respecto. El objetivo es que construyan este nuevo concepto a través de una regla de correspondencia: a una inecuación lineal en dos variables le corresponde un semiplano.

En este trabajo solo exponemos el análisis efectuado al grupo 1:

- Este grupo logró identificar el conjunto de puntos del plano que cumplen la inecuación propuesta, describiéndolo como el haz de rectas paralelas a la ecuación $y = -1/2x$ cuyas ordenadas en el origen son menores que 3. Sin embargo, debemos reconocer que las intervenciones del profesor han sido necesarias en dos momentos claves para llegar a la solución:
- Cuando el grupo da como solución un solo punto, (0,0*). PROFESOR: ¿Y ese es el único punto?; P: ¿Entonces, cuál es la solución?*
- Cuando el grupo da como solución los infinitos puntos de la recta de ecuación $y = -1/2x$. *PROFESOR: ¿Y los puntos sobre la recta son los únicos puntos?. PROFESOR: A ver, ... piensen, ¿no habrá más puntos? PROFESOR: Bueno, esa recta que dibujastes no, pero ... ¿No puede haber otra recta?; P: ¿Entonces cuántas rectas son?; PROFESOR: ¿Cuántas?*

Después de estas intervenciones el alumno $A_1$ concluye que *"muchísimas, infinitas, infinitas rectas paralelas".*

Sin duda el trabajo matemático realizado por los alumnos ha sido notable y ha concluido con éxito, excepto que no han logrado justificar adecuadamente la solución. Pero no podemos engañarnos sobre el papel crucial jugado por las intervenciones del profesor para comunicar, aunque no de manera directa, el significado institucional de la expresión "solución de una inecuación".

Este fenómeno es descrito en la Teoría de Situaciones como "efecto Topaze" (Brousseau, 1986): El profesor propone una tarea a sus alumnos cuya respuesta está generalmente más o menos predeterminada; el profesor negocia las condiciones en las que se producirá y que le darán un sentido. Inicialmente intenta que este sentido sea lo más rico y exacto posible y, para ello, propone preguntas lo más abiertas posibles. Pero en el caso frecuente de que los alumnos fracasen, comienza a dar informaciones suplementarias para hacer la respuesta más fácil.

Aparte del proceso de negociación de significados entre profesor y alumnos a propósito del objeto "solución de una inecuación con dos variables", los alumnos han tenido que realizar numerosos procesos interpretativos para progresar en la realización de la tarea, relacionados con la trama de objetos que se ponen en juego en actividad matemática solicitada. Por ejemplo, la ejecución de la técnica T1 requiere poner en juego por parte del sujeto un complejo de objetos y funciones semióticas, entre los que podemos señalar:

- La noción de par ordenado de números reales se pone en correspondencia biunívoca con los puntos del plano;
- El primer componente del par es el valor de la variable x usada en la inecuación y el segundo es el valor de la y;
- La verificación de si un par de números satisface la inecuación se supone que debe realizarse dando a x el valor de la abscisa y comprobar que el resultado de realizar los cálculos algebraicos es mayor que el valor asignado a la y; etc.

En estos casos, se trata de procesos de particularización, esto es, identificación de ejemplos (extensivos) que cumplen las definiciones de nociones abstractas (intensivos), como ecuación, inecuación, abscisa, ordenada, etc. En otros casos, se requiere realizar actos de generalización (correspondencia entre un objeto particular y una generalidad o abstracción), como ocurre cuando los alumnos reconocen que el conjunto de puntos de la recta r' se comportan igual que el punto (0,0) en relación a satisfacer la inecuación. O cuando reconocen que cualquier recta paralela a r' situada en el mismo semiplano también cumple dicha relación.

# 5. CONCLUSIONES

El objetivo principal del presente trabajo fue estudiar el proceso constructivo que desarrollan los alumnos en torno al concepto de inecuaciones lineales con dos variables en la situación escolar en que dicho proceso tiene lugar.

Realizamos un análisis del proceso de estudio, indagando sobre los objetos y significados puestos en juego en esta experiencia. Del estudio realizado concluimos que los alumnos no encontraron acabadamente el conjunto solución de una inecuación lineal con dos variables. Sin embargo, encontraron formas de generar conjuntos infinitos de puntos que son soluciones de la inecuación. Dieron así el primer paso de un proceso en el que surge un nuevo objeto matemático, aunque no es el proceso que le dio origen.

Los resultados obtenidos sugieren que los comportamientos de los estudiantes frente a la tarea de sombreado de un semiplano, como descubrimiento del conjunto solución de una inecuación lineal con dos variables, muestra un patrón de comportamiento en el que se observa que, con mayor frecuencia el conjunto

solución son los infinitos puntos ubicados sobre una recta, posiblemente como herencia del último tema aprendido por ellos: ecuaciones. Aunque, del mismo modo, concluimos que no se usa esta estrategia de carácter gráfico para explorar o confirmar posibles soluciones. Esta afirmación la constatamos en la entrevista clínica.

No ha sido posible que los alumnos encuentren acabadamente el conjunto solución sin la intervención del profesor. Es decir, el profesor juega un papel decisivo para resolver la tarea encomendada.

Para favorecer el aprendizaje del tema por parte de los alumnos, es esencial que el profesor les proponga suficientes problemas de conversiones entre los diferentes registros de representaciones semióticas y que ellos interpreten los resultados obtenidos al articular satisfactoriamente entre estos registros. Estos tipos de problemas no son frecuentes en los manuales escolares ni en las clases de matemáticas.

## REFERENCIAS.

ACUÑA, C. (1998). La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (p.203-223). Mexico: Dep. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

ALVARENGA, K. (2006). Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. Tesis doctoral.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques, 7, 2: 33-115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega).

CAMUS N. (1997). Matemática 9ª E.G.B. Ed. Aique. Buenos Aires.

CARIONE N., CARRANZA S., DIÑEIRO M., LATORRE M. Y TRAMA E. (2001). *Matemática 3.* Ed. Santillana. Buenos Aires.

DÍEZ, M. (1995). Sobre la simbolización en el álgebra. Aplicación al proceso de aprendizajes de las desigualdades en educación secundaria. Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense.

DUVAL, R. (1994). Registres de reprësentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5 (p. 37 - 65). Traducción Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav, 1997. Mexico.

DUVAL, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. En F. Hitt (Ed.) (p.173 – 201). México: Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav.

ENGLEBERT, S., PEDEMONTI S.,Y SEMINO S. (2005). Matemática A - Z 3. A-Z Editora. Argentina

FILLOY, E. (1999). Aspectos Teóricos del Algebra Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

FONT, V., GODINO, J. D. Y D'AMORE, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 27 (2): 2 -7

GARROTE, M.; HIDALGO, M. J. Y BLANCO, L. J (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. Suma 46. 37 – 44

GODINO, J.D. Y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14, 3,: 325-355.

GODINO, J. D. Y BATANERO, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), Actas del IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática. Guimaraes (Portugal).

GODINO, J.D. (1999). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Trabajo presentado en el Grupo de Trabajo "La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica". III Simposio de la SEIEM, Valladolid, Septiembre de 1999.

PlUVINAGE, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (p 1 - 17). Mexico: Dep. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

SEMINO, S., ENGLEBERT, S., Y PEDEMONI, S. (1997). Matemática 9. 3er. Ciclo EGB. A-Z Editora. Argentina.

TAPIA, X. (1998). Pasaje de registros: Inecuaciones – Tesis para optar al grado de Magister en Enseñanza de las Ciencias, Mención en Didáctica de la Matemática. Valparaíso. Chile.

# POESÍA VISUAL Y MATEMÁTICAS

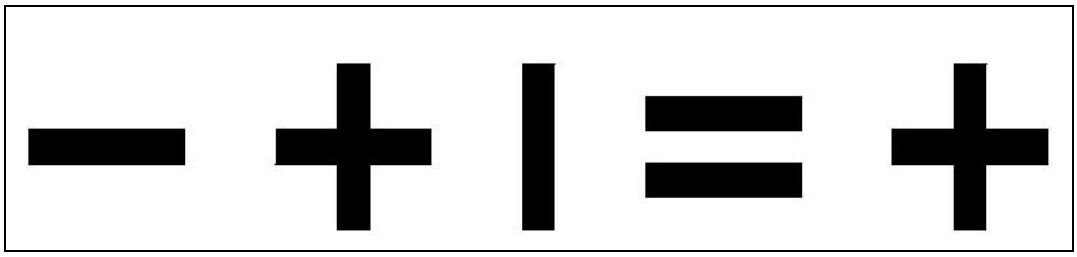
## COLECTIVO FRONTERA DE MATEMÁTICAS

**Antonio Ledesma López**,
*I.E.S. Uno, Requena (Valencia)*
**Antonio Fernández-Aliseda Redondo**,
*I.E.S. El Majuelo, Gines (Sevilla)*
**José Muñoz Santonja**,
*I.E.S. Macarena (Sevilla)*
**Juan Antonio Hans Martín**,
*C. C. Sta Mª de los Reyes de Torreblanca (Sevilla)*

## RESUMEN.

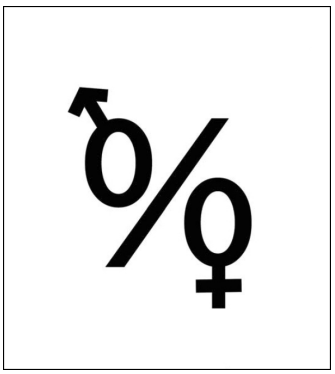
Este comunicación pretende mostrar la relación entre Poesía Visual y Matemáticas y las experiencias que se han puesto en práctica en los distintos centros de enseñanza que han participado en la edición del Open Matemática dedicada al tema, dando, así, pautas para introducir la Poesía Visual en el aula de matemáticas y en el entorno escolar.

Se analizaran e interpretaran las obras de la Exposición de Poesía Visual paralela y se darán pautas para construir **matemáticopoemas** sencillos y valorar su uso y pertinencia en el quehacer diario.



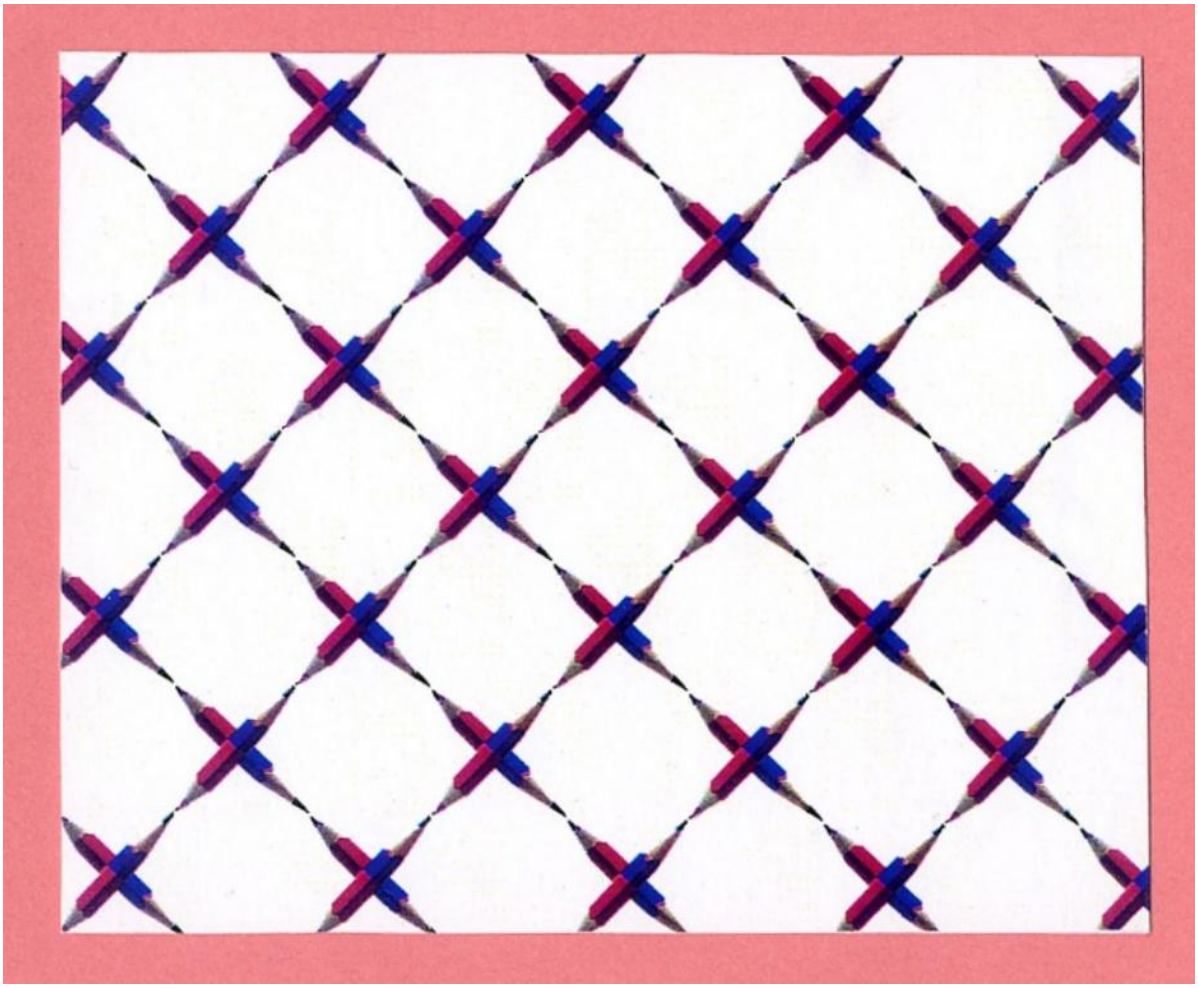
***Apología de la Indecibilidad***. Antonio Ledesma

**Nivel educativo**: Todos.



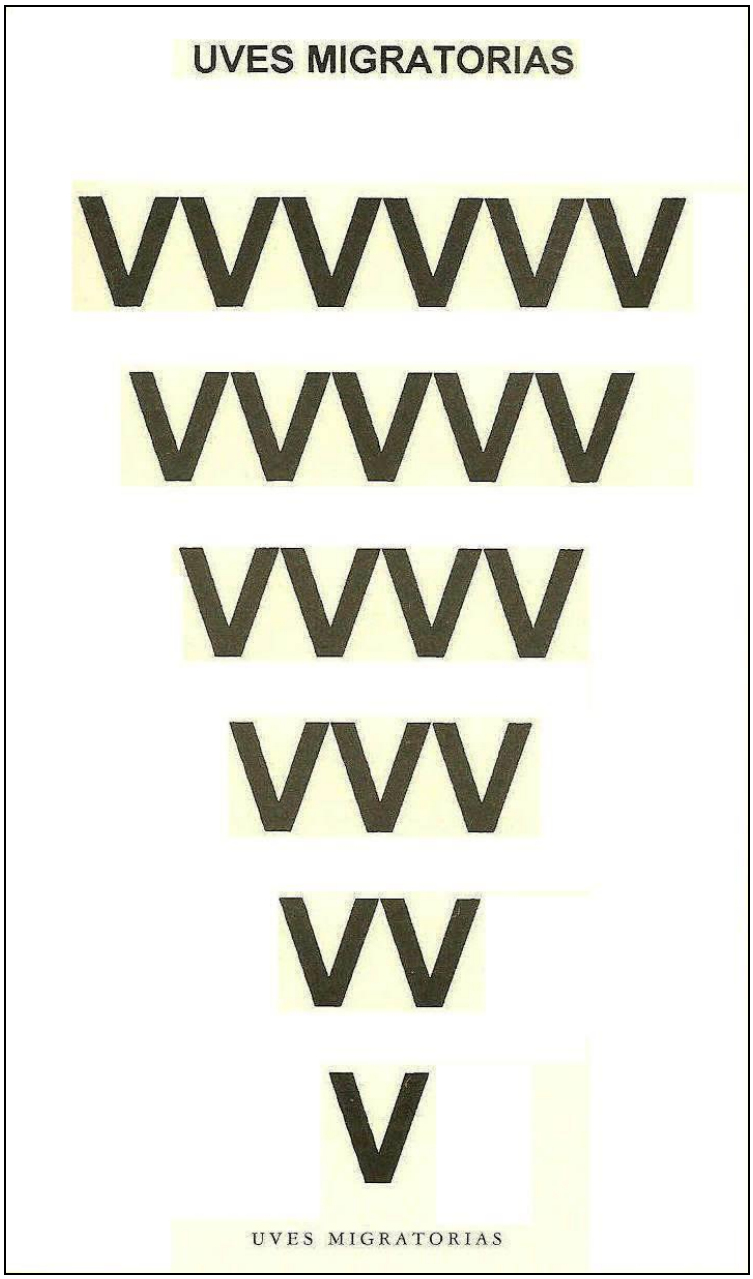
***Porcentaje de separación.*** Vicente Gutiérrez Escudero

Es difícil definir con precisión el término **Poesía Visual** y es en esa dificultad donde se encuentra su riqueza, su versatilidad y su potencial. Según Francisco Aliseda, un *artista con mil oficios*, fundador del Centro de Poesía Visual (CPV), es un *lugar* raro y mestizo donde se funden palabra e imagen. Me gusta la acotación que del término hace Julián Alonso, uno de nuestros reconocidos poetas visuales, al considerar la Poesía Visual como un *acto creativo que participa de elementos tanto literarios como extra literarios. Entendiendo* –continúa– *como elementos literarios todos aquellos que se han utilizado tradicionalmente para componer un discurso lineal e inteligible, incluidos aquéllos de carácter experimental cuya base principal es la palabra escrita y con cierto significado.* Y como elementos extra literarios, por ejemplo, los códigos de comunicación *(todos los sistemas de comunicación y conocimiento ajenos al idioma y compuestos por un grupo de signos que en su conjunto consiguen que un mensaje sea transmisible e inteligible)* y las técnicas y elementos artísticos.



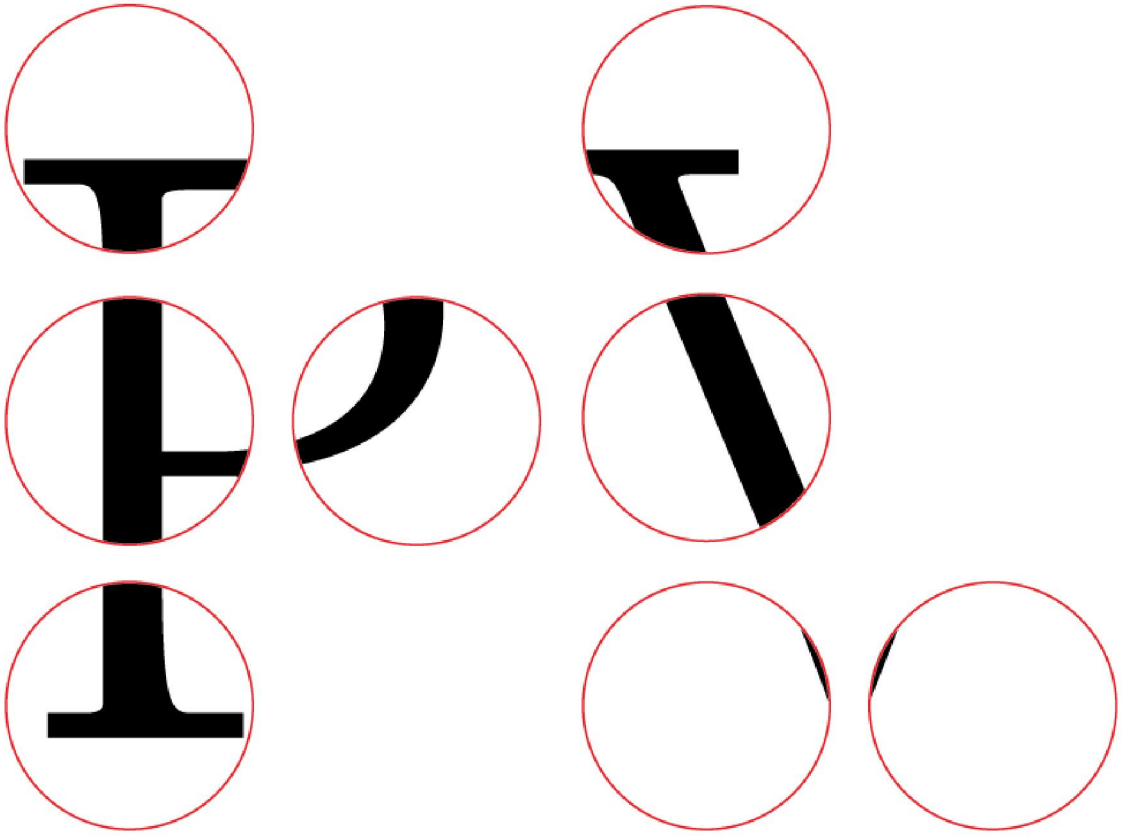
***Autocensura***. Francisco Aliseda

En un poema visual se establece una relación entre dos lenguajes como mínimo: uno, icónico y, otro, verbal, y en su aspecto visual pueden también involucrarse el lenguaje sonoro, fonético, de signos… e, incluso, matemático. Y, claro, si el lenguaje matemático tiene cabida en el poema visual, la poesía visual debe interesar a los matemáticos, y por extensión a nosotros, los profesores de matemáticas.



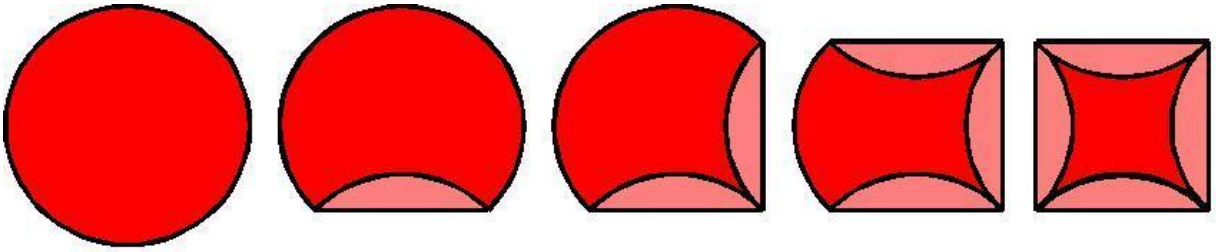

***Uves migratorias***. Julián Alonso

Al intentar analizar un poema visual, desde su proceso de creación hasta el de su interpretación, entran en juego una serie enorme de elementos funcionales como la disposición tipográfica, el uso del color o su ausencia, la distribución del espacio, la inclusión de gráficos, fotografías, dibujos, partituras, collages y otros componentes plásticos que pueden crear caligramas, pictogramas, ideogramas, poemas objeto, etc. Y, claro, todo esto debe interesar a los docentes, que pueden encontrar en el poema visual un riquísimo recurso que exige un ejercicio de síntesis y de ahorro de medios para hacer llegar un mensaje y un fino ejercicio de decodificación, de discernimiento que activa infinidad de procesos mentales como la capacidad de observación, de indagación, deductiva, crítica y, en general, de emitir y valorar juicios, de razonar, en definitiva.



**P** y **V** del ***Alfabeto Anaclástico*** de Amira Hanafi

Además el poema visual tiene cierto carácter trasgresor, iconoclasta y rompe con los convencionalismos de las formas e, incluso, del arte. Y, claro, esto gusta a chicos soñadores e inquietos, apasionados e ilusionados, rebeldes e inconformistas como son los adolescentes, las personas con las que trabajamos día a día.



***Cuadratura heterodoxa del círculo***. Antonio Ledesma

## REFERENCIAS.

*Animación de poesía visual, carmina figurata, poesía concreta, poemas figurados, poesía objetual, poesía sonora*. Video de Vfilms y Ediciones el viaje (29/06/2009. 4 m 28 sg). http://youtu.be/BG5PWeLRIZg

*Revista Veneno 172. Enero 2011.* Video del Centro de Poesía Visual (15/02/2011. 2 m 51 sg). http://youtu.be/KyifHcFRcyc

LEDESMA LÓPEZ, A. (2011). *Poesía visual y Matemáticas*, Colectivo Frontera de Matemáticas, Requena (Valencia).

# DESARROLLO COLABORATIVO DE COMPETENCIAS EN LA ESCUELA TIC 2.0 (PIV-040-11)

**Francisco José Rodríguez Villanego**,
IES Rafael Alberti, Cádiz
**José Antonio Salgueiro González**,
IES Bajo Guadalquivir, Lebrija (Sevilla)
**José Luis Alcón Camas**,
IES Fernando Savater, Jerez de la Frontera (Cádiz)
**Eduardo Caballero Herrero**,
IES San Isidoro, Sevilla
**Juana Doblado Vera**,
IES Diego Angulo, Valverde del Camino (Huelva)
**José Román Galo Sánchez**,
IES Alhaken II, Córdoba
**José Manuel Galván Romero**,
IES Bajo Guadalquivir, Lebrija (Sevilla)
**Ángeles Greciano Martín**,
IES San Isidoro, Sevilla
**Luis Miguel Iglesias Albarrán**,
IES La Palma, La Palma del Condado (Huelva)
**MªDolores Jiménez Jiménez**,
IES Diego Angulo, Valverde del Camino (Huelva)
**María José Rodríguez Marín-Arroyo**,
IES San Isidoro, Sevilla
**Antonio de los Santos Soler**,
IES José Caballero, Huelva
**Joaquín Abel Soult Guerrero**,
IES San Isidoro, Sevilla.

## RESUMEN.

Este proyecto de Investigación Educativa (PIV-040-11) pretende desarrollar las competencias básicas en el Primer Curso de la ESO en el marco del Programa Escuela TIC 2.0 y las áreas instrumentales de Matemáticas y Lengua, mediante el trabajo colaborativo de más de 200 alumnos y alumnas de ocho institutos pertenecientes a cuatro provincias andaluzas, intercomunicados por un Aula Virtual creada con Moodle y un blog. Para su desarrollo se han usado materiales digitales interactivos y herramientas de la Web 2.0 para la generación de contenidos, difusión de los materiales producidos y de la experiencia, acompañados de una metodología integradora y personalizada que facilite a cada alumno o alumna el desarrollo de sus potenciales.

**Nivel educativo**: Educación Secundaria Obligatoria.

# 1. INTRODUCCIÓN.

El uso de recursos Web 2.0 en educación induce una metodología de trabajo donde se concede importancia a tareas muy relacionadas con el aprendizaje social: comunicarse, compartir, colaborar y confiar. Junto a ellos, los materiales digitales interactivos para matemáticas, como es el caso de las unidades didácticas del Proyecto EDAD, realizadas con Descartes, permiten que el alumnado tome un papel activo ante las matemáticas, que no se presentan como un cuerpo cerrado de conocimientos sino como algo vivo cuyo principal objetivo es la resolución de problemas (Galo, 2009).

El uso bien planificado y organizado de estas herramientas nos proporciona una educación sin barreras, pues se produce dentro y fuera del espacio físico y temporal del centro, y nos permite una interacción que tiene lugar en distintos momentos temporales y espaciales entre los centros participantes (Figura 1), que son de varias localidades andaluzas.




Figura 1. Centros participantes en el proyecto.

# 2. CONTENIDOS Y DESARROLLO DEL PROYECTO.

En el proyecto participan alumnos y alumnas de primer curso de ESO de los centros implicados. Comparten un entorno digital común que sirve de puerta de entrada a todos los recursos y actividades que se realizan.

Los contenidos del currículo, consensuados previamente con las programaciones didácticas de los distintos departamentos didácticos, se desarrollan usando como libro digital el proyecto Educación Digital A Distancia (EDAD)[1], incluido en la mochila digital del programa Escuela TIC 2.0 (Figura 2).

[1] http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1234.htm




Figura 2. Unidad didáctica del proyecto EDAD.

Estos contenidos han sido secuenciados en el Aula Virtual del proyecto, una Moodle instalada por la Consejería de Educación[2], que para cada unidad didáctica contiene, además de los contenidos digitales, foros para dudas, materiales audiovisuales, cuadernos de trabajo y exámenes digitales (Figura 3).




Figura 3. Esquema de una unidad didáctica.

Paralelamente se realizan diferentes actividades, en las que participa el alumnado y el equipo de docentes de todos los centros:

- Concurso "El personaje matemático". En un mapa de Google se utilizan marcadores de posición señalando ciudades relacionadas con la vida de un personaje matemático, potenciando el que aparezcan personajes femeninos e intentando respetar la paridad. Junto a ellos aparece su imagen y datos que permitan investigar al alumnado para lograr su identificación.
- Certamen de "Fotografía matemática". Cada alumno o alumna presenta al resto fotografías digitales relativas a un concepto o noción matemática.

[2] http://www.juntadeandalucia.es/educacion/adistancia/heda/

- Podcasts. Periódicamente se ponen a disposición del alumnado podcasts que definen, sin nombrarlo, un concepto matemático que se debe identificar.
- Actividades de lectura. Bajo el título "El rincón de Incógnita", un personaje (Chica Incógnita) les guía a través de una aventura en la que deben participar, colaborar y comprometerse con la lectura como protagonista.
- Actividades de socialización. Los alumnos y alumnas se relacionan, usando las herramientas de comunicación facilitadas por el Aula Virtual, y además en otros entornos que les son habituales. Así, la identificación se produce no solo con el grupo que forma la clase, pues también se reconocen como parte de un grupo mayor: el formado por todos los centros del proyecto.
- Actividades digitales con ayuda de la PDI. Durante el desarrollo de los núcleos temáticos del currículo de secundaria (desarrollo del sentido numérico y simbolización matemática; las formas y figuras y sus propiedades; e interpretación de fenómenos ambientales y sociales a través de las funciones y sus gráficos, de la estadística y probabilidad, respectivamente), se realizan actividades interactivas en la PDI a modo de juego-concurso, en la que el alumnado debe demostrar lo aprendido.
- Actividades colaborativas, como la elaboración de un Diccionario MatemáTICo por parte del alumnado de todos los centros que recoge términos matemáticos pertenecientes a las distintas unidades didácticas.

# 3. DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS.

El uso de recursos *web 2.0* en educación, junto a metodologías de trabajo donde se concede importancia a tareas muy relacionadas con el aprendizaje social y al autoaprendizaje, contribuye a la consecución de las competencias básicas en la Educación Secundaria Obligatoria. Conviene resaltar que la mera disponibilidad tecnológica no provoca un cambio tecnológico docente, sino que éste requiere una adaptación metodológica y competencial (Fernández: 2009).

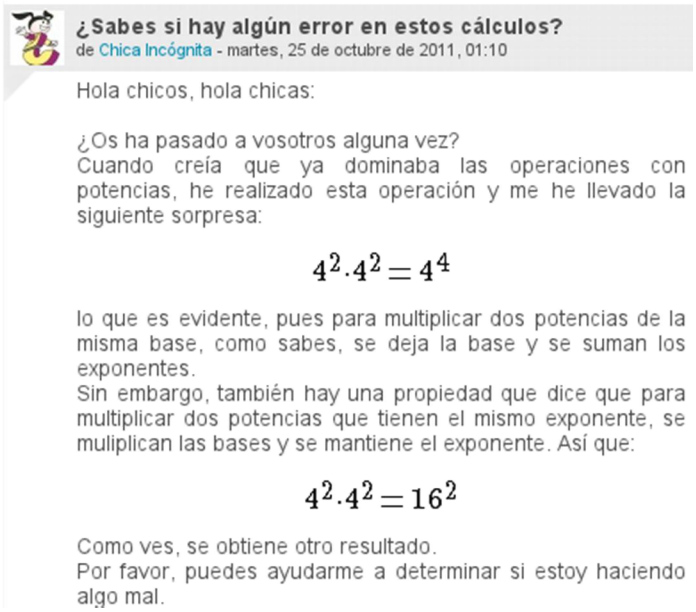
## 3.1. Competencia de Razonamiento Matemático.

Se encuentra, por su naturaleza, íntimamente asociada a los aprendizajes que se abordarán en el desarrollo de los objetivos curriculares. El empleo de distintas formas de pensamiento matemático para interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje.

El que el alumnado cree sus propios contenidos contribuye a aplicar habilidades, destrezas y actitudes que hacen posible comprender argumentos y expresar y comunicar en el lenguaje matemático. Esta creación se hace realidad en foros y glosarios en los que el alumnado crea conocimiento de manera cooperativa. Para ello es necesario enseñar al alumnado a participar de forma activa en su proceso de aprendizaje (Salgueiro: 2009).

## 3.2. Competencia Social y Ciudadana.

La participación, la colaboración, la valoración de la existencia de diferentes puntos de vista y la aceptación del error de manera constructiva constituyen un conjunto de actitudes que cooperarán en el desarrollo de esta competencia. Las actividades realizadas en cooperación contribuyen al desarrollo de esta competencia, como es el caso de los foros (Figura 4).



**¿Sabes si hay algún error en estos cálculos?**
de Chica Incógnita - martes, 25 de octubre de 2011, 01:10

Hola chicos, hola chicas:

¿Os ha pasado a vosotros alguna vez?
Cuando creía que ya dominaba las operaciones con potencias, he realizado esta operación y me he llevado la siguiente sorpresa:

$$4^2.4^2 = 4^4$$

lo que es evidente, pues para multiplicar dos potencias de la misma base, como sabes, se deja la base y se suman los exponentes.
Sin embargo, también hay una propiedad que dice que para multiplicar dos potencias que tienen el mismo exponente, se muliplican las bases y se mantiene el exponente. Así que:

$$4^2.4^2 = 16^2$$

Como ves, se obtiene otro resultado.
Por favor, puedes ayudarme a determinar si estoy haciendo algo mal.

Figura 4. Propuesta participativa en un foro.

En última instancia podemos desarrollar el sentido de pertenencia a una comunidad de aprendizaje, en la que los alumnos y alumnas toman conciencia de que juntos son capaces de llegar más lejos de lo que lo harían individualmente (Rodríguez: 2010).

### 3.3 Competencia en el Conocimiento y en la Interacción con el Mundo Físico y Natural.

Una significativa representación de contenidos matemáticos tiene que ver con ella**.** Son destacables, en este sentido, la discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, especialmente con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio. También son apreciables las aportaciones de la modelización; esta requiere identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real, representarla simbólicamente y determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes, a partir de las que poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones del modelo. Un buen ejemplo de ello es el reconocimiento de conceptos matemáticos en el entorno, actividad que los alumnos y alumnas del proyecto han realizado en el certamen de fotografía matemática.

### 3.4 Competencia Digital y de Tratamiento de la Información.

Comunicarse, recabar información, retroalimentarla, simular y visualizar situaciones, obtener y tratar datos, entre otras situaciones de enseñanza y aprendizaje, constituyen vías de tratamiento de la información, desde distintos recursos y soportes.

Algo análogo ocurre con el uso de las herramientas de intercomunicación habilitadas para el desarrollo del Proyecto y las propias de la Web 2.0, fundamentales para el mismo.

Un ejemplo de estas actividades es la realización de actividades con la ayuda de la Pizarra Digital Interactiva (Figura 5), siguiendo un patrón único relacionado con los tres núcleos temáticos denominados transversales: (resolución de problemas, uso de las TIC y dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas, respectivamente).




Figura 5. Actividad Hundir los Números, realizada con la ayuda de una PDI.

## 3.5 Competencia y Actitudes para Seguir Aprendiendo de Forma Autónoma a lo Largo de la Vida.

Los propios procesos de resolución de problemas realizan una aportación significativa porque se utilizan para planificar estrategias y asumir retos; también la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. Pero será la metodología y la dinámica de trabajo en el aula con el libro digital del proyecto Educación Digital A Distancia, la que mejor consiga el desarrollo de esta competencia, permitiendo que cada participante pueda ir a su ritmo, en lo que podemos denominar un aprendizaje personalizado (Figura 6), y ofreciendo una extraordinaria atención a la diversidad.

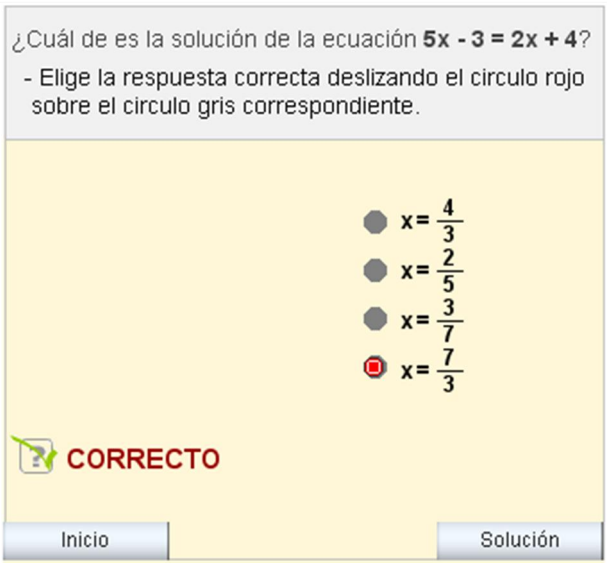



Figura 6. Aprendizaje personalizado de ecuaciones con la ayuda de un asistente digital.

Esta forma de aprender y enseñar contribuye al desarrollo de capacidades para comprender contenido matemático en diferentes situaciones y contextos. Este hecho redundará de forma positiva en la comprensión y adquisición de conceptos por parte de cada alumno y alumna, y hará que se generen competencias que fomentan el aprendizaje autónomo a lo largo de la vida.

### 3.6 Competencia para la Autonomía e Iniciativa Personal.

Desde los objetivos planteados en este PIV, se fomenta en los alumnos y alumnas la iniciativa, el trabajo cooperativo, el trabajo en equipo, la planificación de proyectos, la creatividad, la actitud positiva hacia la innovación, asumir los errores y aprender de ellos, emprender, evaluar y desarrollar acciones con confianza, responsabilidad y sentido crítico.

Se trata de una serie de factores que contribuyen a asumir un estilo de trabajo autónomo, y en el que al alumnado se le dota de capacidad de decisión sobre su propio proceso de aprendizaje: qué aprende, cómo organiza su aprendizaje o en qué momento puede ser evaluado.

### 3.7 Competencia en Comunicación Lingüística.

El objetivo *"Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura"* es **eje fundamental de nuestro trabajo**. Contar con una **profesora especialista en el Área de Lengua Castellana y Literatura** con amplia experiencia en este campo, vinculada a distintos aspectos y Planes de Fomento de la Lectura nos permite potenciar al máximo la **Competencia Lingüística** entre el alumnado, mediante la realización de actividades (Figura 7) de distinta índole que favorezcan el gusto por la lectura y su valoración e importancia en el desarrollo de nuestra materia, así como el uso de distintos estilos y formas de expresión.



## Capítulo 1: ¡Comienza la aventura!

Bueno, una vez hechas las presentaciones empezaré a contaros el lío en el que me veo envuelta. ¿Ya os he dicho que soy una chica muy activa? Para mi madre la palabra exacta es que soy una pesada que no paro ni un minuto:

- Incógnita, ¡siéntate bien!
- Incógnita, ¿quieres estar quieta ya?

Lo que yo os diga, ¡un auténtico rollo repollo! El caso es que, por no sé qué extraño proceso, no soy capaz de mantenerme quieta en un sitio ni un instante. Creo que es problema de las losetas, pero mi madre no opina lo mismo y lo que opina mi padre... ¡mejor no os lo cuento!

Bueno, a lo que íbamos. Esta mañana cuando iba con pocas ganas al instituto voy y me tropiezo, ¡zas! Casi me caigo de boca y rápidamente pensé: "¿Quién habrá sido el besugo que ha dejado levantada la tapa de la alcantarilla?"

Pero cuando me acerco un poco y me fijo me doy cuenta de que la tapadera de la alcantarilla está levantada porque alguien ha puesto un rollito de papel en el borde. "¡Uy, uy, esto me huele mal!", pensé. El caso es que me agaché para recoger el papel y la curiosidad me invadía de tal manera que los dedos no me dejaban abrirlo, ¿no os ha pasado eso alguna vez? Sí, ¿verdad? A mí me pasa muy a menudo. Bueno, pues eso, que después de pelearme con mis dedos y el papelito, encuentro que lo

Figura 7. Actividad participativa de lectura en el blog del proyecto.

Las Matemáticas constituyen un ámbito de reflexión y también de comunicación y expresión. Se apoyan, al tiempo que la fomentan, en la comprensión y expresión oral y escrita en la resolución de problemas (procesos realizados y razonamientos seguidos que ayudan a formalizar el pensamiento).

Un claro ejemplo es el Diccionario MatemáTICo, un glosario de términos matemáticos presentes en los contenidos de la materia, y que es elaborado de forma cooperativa por los alumnos y alumnas de los centros que participan en el proyecto (Figura 8).

El alumnado debe usar un lenguaje matemático apropiado (numérico, gráfico, geométrico y algebraico) y por tanto prestando atención a la precisión en sus términos. Pero también debe considerar ese lenguaje como vehículo de comunicación de ideas, y hacer uso adecuadamente de un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto. Por último debe considerar las características del medio en el que da forma al lenguaje utilizado, con las limitaciones y posibilidades presentes.

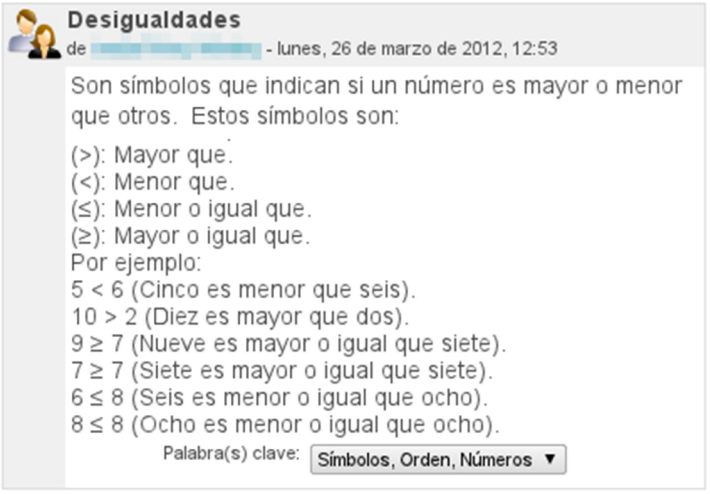


Figura 8. Concepto definido en un glosario por un alumno.

Por su parte, el podcast (Figura 9) se convierte en una herramienta ideal para el desarrollo de la expresión oral en todas sus formas, haciendo uso del audio para que el alumnado se acostumbre a oír e identificar con rapidez y decisión los conceptos matemáticos básicos, llegando incluso a crear una emisora de radio para el proyecto con esta sencilla y útil herramienta de la Web 2.0.

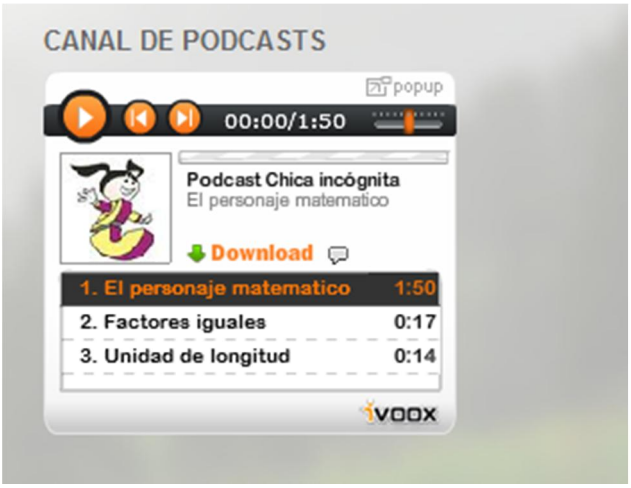


Figura 9. Canal de podcasts y Radio Incógnita.

## 3.8 Competencia Cultural y Artística.

Las Matemáticas constituyen una expresión de la cultura. La geometría es, además, parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia.

Conocer los personajes (Figura 10) que a lo largo de la historia han creado las matemáticas que hoy enseñamos en la escuela es una forma de contextualizar lo aprendido, y dotarle de un sentido cultural.

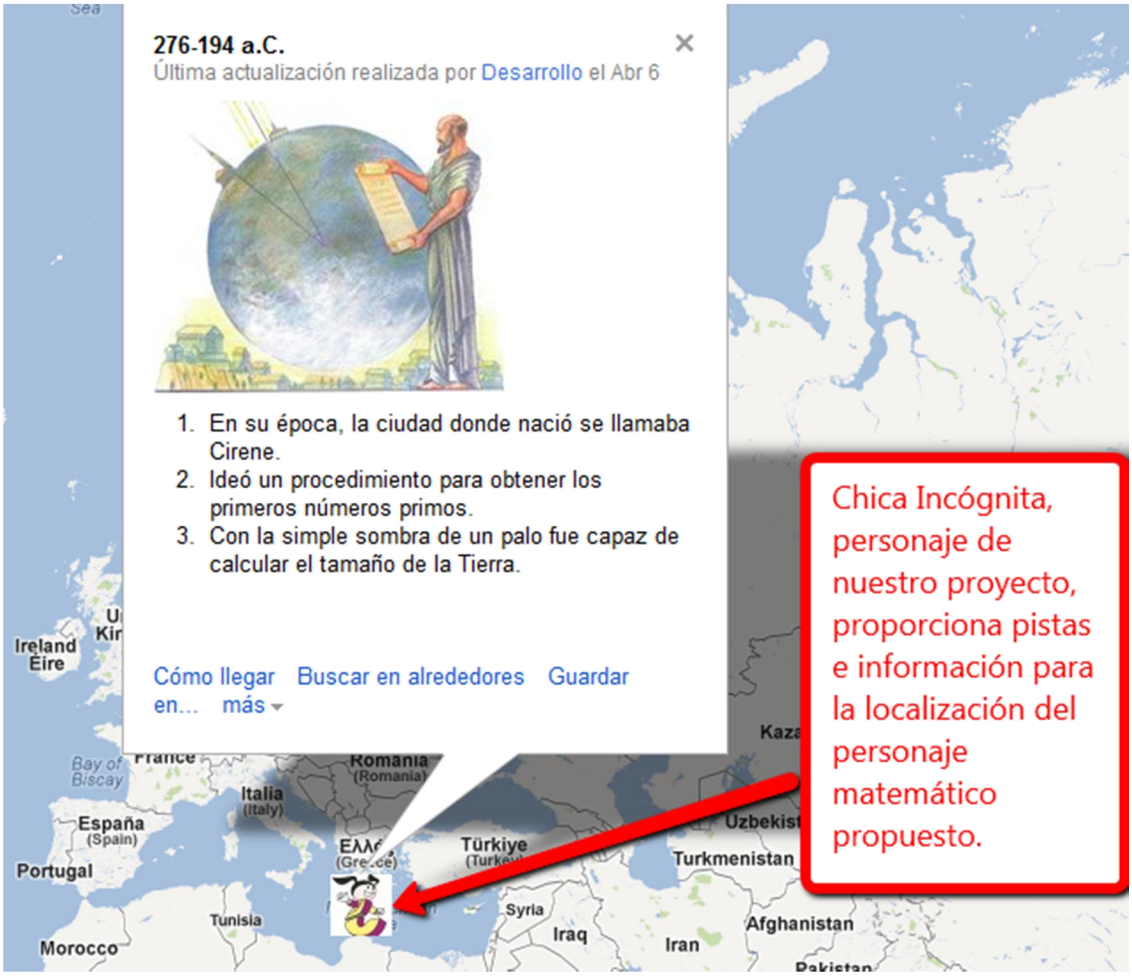


Figura 10. Concurso el Personaje Matemático, en un Mapa de Google.

# 4. CONCLUSIONES

- Si la introducción de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje no se limita al uso de nuevos recursos en modelos establecidos, sino que se efectúa con cambios metodológicos y con nuevas estrategias didácticas, la mejora alcanzada es significativa, señalando posibles actuaciones para la obtención de un adecuado bagaje competencial.
- Cuando al proceso de enseñanza y aprendizaje se incorporan las tecnologías de la información y la comunicación, enmarcadas en proyectos de trabajo colaborativo entre profesorado y alumnado, como las agrupaciones escolares intercentros, se consigue el desarrollo óptimo de las competencias básicas en el alumnado.
- Las aplicaciones didácticas de la Web Social y el trabajo en red del profesorado promueven actitudes y facilitan el cambio metodológico.
- El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la educación potencia el aprendizaje visual de los alumnos, aumenta su participación, su motivación y su creatividad.
- Las herramientas y los recursos digitales pueden ser medios básicos, fundamentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la formación competencial del alumnado, extendiéndose la posibilidad de colaborar, de

generar y compartir recursos para hacernos avanzar hacia lo que podríamos denominar alumnos y alumnas 2.0.

- El uso de recursos Web 2.0 en educación induce una metodología de trabajo donde se concede importancia a tareas muy relacionadas con el aprendizaje social: comunicarse, compartir, colaborar y confiar.
- De esta manera: "Aprenden haciendo, tomando la iniciativa, trabajando sobre lo previamente planificado por nosotros (los guías) y, para ello, demandan nuestra colaboración, sobre todo al principio, como es normal, pero cada vez son más autónomos. Y nosotros atendemos gustosamente sus consultas. Ellos a su vez ayudan a sus compañeros, aprenden a expresarse correctamente para poder transmitir. Se reagrupan, solos, aprenden a distribuirse en función de sus ritmos de aprendizaje, adquieren un grado de autonomía muy considerable y un aumento de autoestima de las mismas proporciones." (Iglesias: 2011)
- En definitiva: "aprenden y bien, colaboran, respetan turnos, trabajan como nunca y marcando sus propios ritmos, no temen a equivocarse y les encanta. Matemáticas es una materia más y se aprende trabajando. Y trabajando a gusto, además. Y las TIC y los materiales de Descartes-EDAD contribuyen muy bien a ello" (Iglesias: 2011) y al desarrollo competencial pleno del alumnado, como ya habíamos podido comprobar en base a la experiencia previa que teníamos del trabajo con esta metodología y, consolidado, con el desarrollo de este proyecto.
- Nosotros, los docentes, también evolucionamos día a día y aprendemos con y de nuestro alumnado. Esfuerzo mucho, pero bien vale la pena.

## REFERENCIAS.

FERNÁNDEZ, J., CRESPO, I., GALO, J.R. (2009) *Como formarse en el uso pedagógico de las TIC.* III Jornadas nacionales TIC y Educación, TICEMUR, Murcia.

GALO, J.R., MADRIGAL, J. (2009) *El proyecto Descartes: 10 años innovando con TIC*. XIV JAEM Girona.

IGLESIAS ALBARRÁN, L.M (2011) Experimentación DidácTICa con Descartes en el Aula (EDA 2010). Autonomía e iniciativa personal en Aulas MatemáTICas 2.0 - Enseñar y aprender en la era digital.

RODRÍGUEZ, F.J. (2010) *Uso didáctico de materiales del Proyecto Descartes en Wikispaces.* XIII CEAM, Córdoba.

SALGUEIRO, J.A., CRESPO, I., GALO, J.R. Y RODRÍGUEZ, F.J. (2009) *La Competencia Matemática en la Red HEDA.* XIV JAEM Girona.

# USO DE LA PIZARRA DIGITAL INTERACTIVA EN EL PIV-040/11

**José Luis Alcón Camas**,
*I.E.S. Fernando Savater, Jerez de la Frontera (Cádiz)*
**Eduardo Caballero Herrero**,
*I.E.S. San Isidoro, Sevilla (Sevilla)*
**Antonio de los Santos Soler**,
*I.E.S. José Caballero, Huelva (Huelva)*
**Juana Doblado Vera**,
*I.E.S. Diego Ángulo, Valverde del Camino (Huelva)*
**José Román Galo Sánchez**,
*I.E.S. Alhaken II, Cordoba (Cordoba)*
**José Manuel Galván Romero**,
*I.E.S. Bajo Guadalquivir, Lebrija (Sevilla)*
**Ángeles Greciano Martín**,
*I.E.S. San Isidoro, Sevilla (Sevilla)*
**Luis Miguel Iglesias Albarrán**,
*I.E.S. La Palma, La Palma del Condado (Huelva)*
**María Dolores Jiménez Jiménez**,
*I.E.S. Diego Ángulo, Valverde del Camino (Huelva)*
**María José Rodríguez Martín-Arroyo**,
*I.E.S. San Isidoro, Sevilla (Sevilla)*
**Francisco José Rodríguez Villanego**,
*I.E.S. Rafael Alberti, Cádiz (Cádiz)*
**José Antonio Salgueiro**,
*I.E.S. Bajo Guadalquivir, Lebrija (Sevilla)*
**Joaquín Abel Soult Guerrero**,
*I.E.S. San Isidoro, Sevilla (Sevilla)*

## RESUMEN.

Esta comunicación retrata una parte del trabajo de un proyecto de investigación educativa, relacionada con la utilización de materiales hechos en las pizarras digitales (PDI).

De un lado, aquellos con un enfoque duradero, más generales, en los que se trabaja de forma animada, lúdica y con una componente de retomar, recordar y consolidar diferentes contenidos estudiados a lo largo de las unidades didácticas.

Por otro lado, materiales puntuales y producidos a partir de las necesidades de un grupo, bajo un punto de vista más concreto, yendo al centro de la dificultad.

Esta doble componente nos permite innovar y entender el uso extenso de los trabajos producidos para las PDI.

**Nivel educativo**: Primer ciclo de secundaria.

# 1. INTRODUCCIÓN.

La elaboración de un Proyecto de Investigación Educativa tiene en un origen aspectos de previsión y realización, es decir, una propuesta planificada, estudiada punto a punto, con un orden y una estructura que sirva de guía.

La previsión hace referencia a saber el qué, quiénes, cómo, cuáles, cuándo..., en definitiva todos aquellos datos que puedan ser útiles durante el proyecto, y en la parte de realización se estructuran, se da forma y se perfila la forma de trabajar, cada tramo y cada paso, adecuando niveles, ritmos, materiales...

No obstante, en la normalidad y conforme se avanza en el desarrollo del proyecto, es usual que algunas de las tareas que se tenían vayan modificándose, otras aparezcan como nuevas y otras terminen de coger forma. Estas variaciones son el fruto de la adaptación al objeto de estudio que en nuestro proyecto son el alumnado.

En el PIV-040/11, "Desarrollo colaborativo de competencias en la Escuela TIC 2.0" nuestro proyecto, se pretende desarrollar las competencias básicas en el Primer Ciclo de la ESO desde el marco del Programa Escuela TIC 2.0 y las áreas instrumentales de Lengua y Matemáticas, mediante el trabajo colaborativo entre los más de 200 alumnos y alumnas de cuatro provincias andaluzas, que estarán intercomunicados por una plataforma Moodle y por una red social con su profesorado, usando una gama importante de herramientas de la Web 2.0 para la generación de contenidos. Como base para el aprendizaje y la enseñanza del área de Matemáticas utilizamos los materiales de EDAD, englobados en el proyecto Descartes del Ministerio de Educación Cultura y de Deporte.



Figura 1. Pantalla inicial de la plataforma moodle del PIV.

## 1.1. LOS MATERIALES EDAD.

Los materiales EDAD[1] (Educación Digital A Distancia) permiten trabajar de una forma muy cómoda, con una estructura de libro en versión digital, mantiene el formato de teoría y práctica entrelazada, sitúa definiciones, fórmulas, ejemplos reales y de cálculo, actividades de consolidación y de autoevaluación. De esta manera el aprendizaje de las matemáticas queda organizado, rítmico y nivelado conforme al grupo-individuo que lo trabaja.

[1] http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1234.htm




Figura 2. Pantalla inicial de los materiales EDAD.

Y sin embargo, esto no es suficiente, puesto que los contenidos aparecen parcelados por las unidades didácticas correspondientes, dejando un aprendizaje direccionado a una temática, que los alumnos y alumnas parecen dejar atrás una vez superados. Y también en una segunda visión porque a pesar de la buena intención de los autores de los materiales de EDAD, estos no escapan a las dudas especificas que al alumnado se le pueda originar, donde a veces la información puede resultar excesiva, entonces ocurre que nuestros alumnos y alumnas no son capaces de discernir la mecánica correspondiente.

## 2. MATERIALES EN LA PDI.

La función del profesorado se hace más necesaria y útil de lo que cabría pensar, ya que parte de la labor del profesado se sustenta ahora en valorar el nivel de aprendizaje adquirido, la profundidad de competencias básicas desarrolladas; observación y detección de las dificultades de los alumnos y alumnas que vayan apareciendo.

Encontramos un reflejo de la diversidad del alumnado que se visualiza en la velocidad y capacidad de asimilación de los conocimientos y el desarrollo de las competencias básicas, incluso si entendemos cada grupo de proyecto como un individuo.

Para nosotros, el profesorado, que somos inmigrantes digitales, la PDI es una novedad y aún nos queda camino hasta ir mejorando el rendimiento de estas, pero para el alumnado que va llegando a las aulas, son nativos digitales, y muestran la misma versatilidad ante una pizarra u otra, siendo para ellos, en referencia a su entorno, más natural una digital, que se aproxima al mundo de lo táctil.

Nuestra propuesta en la creación de materiales para la PDI, intenta sacarle jugo a esta herramienta, y por tanto, las actividades elaboradas resultan un tanto difícil de imaginar en la pizarra de tiza. No consiste en repetir la tiza en la digital, sino de abordar e investigar sobre las nuevas opciones que se ofrecen, y que dinamizan la enseñanza. Movimiento e interactivad son características de este tipo de archivos, y que debemos mirar como una campo a explorar, resultan ser enriquecedoras para despertar la motivación y el interés participativo de los alumnos/as. Con un diseño que, en algunos casos, se va aproximando más a una partida de juego que a la estructura de un ejercicio del libro de papel.

## 2.1. HUNDIR LOS NÚMEROS.

Al desarrollar nuestro PIV, una de nuestras preocupaciones era saber el grado de consolidación del aprendizaje, para ello nos basamos en algunos trabajos que se distinguían por su variedad en las cuestiones planteadas. En un primer momento el uso de los foros, concursos y demás actividades propuestas nos señalaba el buen avance que íbamos logrando, pero seguían siendo enfocadas a cada unidad de las trabajadas.

De entre el grupo de profesores que componen el *proyecto*, la tarea está repartida dependiendo los grupos clase que a principio de curso tuvimos asignados en nuestros centro, dándose el caso de compañeros y compañeras que no tuvieron la opción de un primer ciclo, este hecho tuvo un hecho diferencial muy positivo, y es que permitió que algunos compañeros y compañeras se pudieran dedicar en mayor medida a la elaboración de materiales, como ejemplo expondremos "Hundir los números".

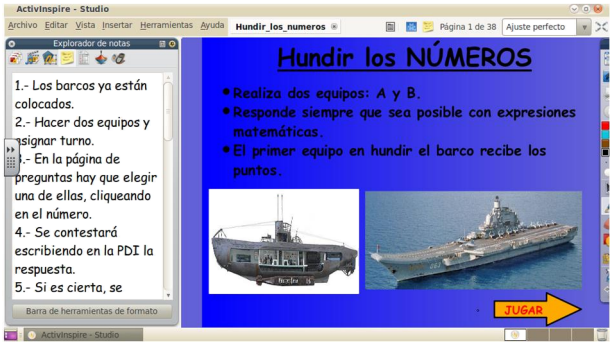



Figura 3. Portada de la actividad "Hundir los NÚMEROS" con Promethean.

La dinámica del juego es bien fácil, basado en el conocido juego "hundir los barcos" tiene la variante de que para poder elegir una coordenada de la página 2, donde se encuentran los barcos de forma predeterminada pero aleatoria, han de contestar de forma correcta una pregunta escogida por ellos de la página 3. Entre ambas páginas encontramos unas pestañas de comunicación para las dos.

Si bien las instrucciones sugieren que el modo correcto es a partir de agrupar la clase en dos, hemos experimentado de forma diversa. Una forma individual permite ganar a quien conteste primero, permitiendo que repita turno mientras la respuesta sea la correcta. Dejando aparte la pizarra, estuvimos experimentando por grupos, nombrando un supervisor/a a uno de los alumnos lideres y dos grupos de dos asociados a cada supervisor/a, en este caso la dinámica del juego perdió algo de interés ya que se realizó en un ordenador por grupo, la respuesta aludida por el alumnado hacía referencia a la perdida de espectacularidad respecto a la PDI y al trato táctil de esta.

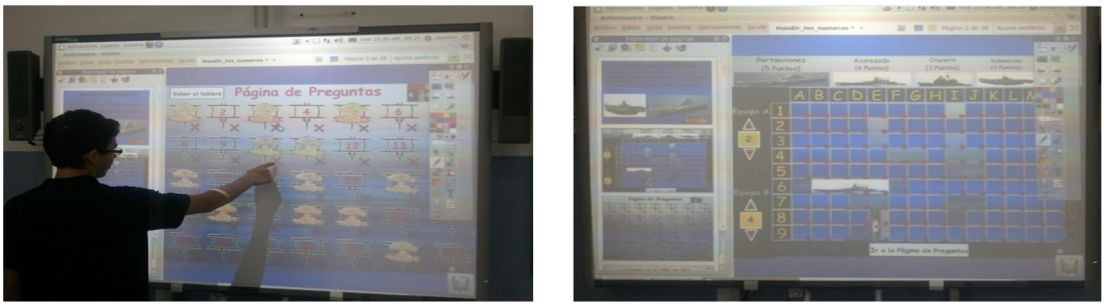



Figura 4. Página 2 ( hundir los "números-barcos") y página 3 (elección de preguntas).

Una de las características de este material elaborado especialmente para la PDI resulta de su diversidad en los tipos de ejercicios, no enclavándose en un único tema, sino que abarcar el bloque de Números, y que por tanto, obliga al alumnado a rememorar y rescatar lo aprendido hasta la fecha. El abanico de actividades ha permitido que su uso no sea algo puntual o fijado en el tiempo, sino que conforme se avanzaba en los temas de EDAD, se iban incorporando para acumular las actividades sugeridas. De esta manera, la aparición de ejercicios que no podíamos resolver quedaban en la retina del alumnado, y que llegado el momento en que se situaba el estudio de los contenidos asociados, despertaban el recuerdo de dicho ejercicio. Se ha comprobado entonces lo llamativo de su tratamiento.

Descata también, en este caso, que las instrucciones son muy intuitivas, y que por tanto, muy fácil jugar, el acceso a las actividades no supone un muro de incomprensión, permite que todo el grupo comprenda y acceda a la actividad.

Algunos de las actividades realizadas han ido más allá de ejercicio tipo cálculo, dejando que la simplicidad de los enunciados escondieran cuestiones de estrategias donde las competencias básicas, y el ingenio razonado toman delantera al proceso simple y mecánico. Simula esto un partida de astucia, que abre la discusión al proceso de aprender, de elegir, y donde el alumno/a expresa normalmente en voz alta cuál ha sido su razonamiento, en qué tipo de detalles ha prestado atención, consiguiendo un aprendizaje colectivo, una resolución en ideas más allá de la mecánica, algo que la mente despierta y motivada logra con gran simplicidad.




Figura 5. Páginas diversas, ejemplos de preguntas.

La motivación por parte del alumnado es muy alta, la vistosidad del trabajo es muy atrayente, debatiéndose numerosas veces el problema de a quién elegir

para contestar los problemas y que por tanto participara en la pizarra eligiendo una casilla para *hundir los números*. Nuevamente queda constancia de la importancia de acercar al alumnado la participación en su aprendizaje, en este caso el alumnado muestra gran estimulo por participar, la imagen del material elaborada se aleja del formato habitual de la pizarra de tiza, e incluso de los documentos habituales de ofimática que se reproducen en una PDI.

## 2.2. ORDENACIÓN DE FRACCIONES.

Un segunda elaboración de materiales para la PDI, hacía hincapié en la detección de dificultades y afianzamiento de procesos mecánicos. Este es uno de los momentos que dentro de la propuesta del PIV quedaba reflejada que podía darse y que concurría con que la solución debía venir de forma imaginativa, entendiendo esto como una reflexión dentro del grupo y haciendo una labor de concreción en el núcleo de la dificultad.

La solución debe venir en la misma línea de trabajo en que se está actuando, es decir, preguntarnos en el abanico de las herramientas Web 2.0, cuál se adapta mejor a nuestras posibilidades y es más cercano al grupo. Así pues, para dar solución a algunas dudas que han surgido hemos hecho adaptaciones de algunos de los capítulos, apartados de la unidad didáctica correspondiente a una actividad especifica en la pizarra digital.

Siguiendo la tendencia actual de las páginas web, las actividades construidas para la PDI han buscado ir al centro de estudio, obviando los detalles que pudieran añadir más información de la que fuera necesaria, hemos de entender estos archivos específicos para la pizarra como un refuerzo puntual, y que complementan los materiales de EDAD.




Figura 6. Comparativa de la página completa y la incrustación del ejercicio en la PDI.

Una de los temas que resulta de mayor dificultad suele ser el relacionado con las fracciones, un tema que tiene una componente que exige un aprendizaje de un proceso mecánico, y otro sobre la comprensión del concepto de fracción para su incursión como herramienta en la resolución de problemas.

Nos quedaremos con la primera parte, en este caso, nos centramos además sólo con la ordenación de fracciones. Para comparar fracciones seguimos el modelo de denominadores comunes. Planteamos una situación que justifique la utilidad de aprender dicho proceso, y a partir de ahí, a base de imágenes una a una, con pequeños textos que acompañan el desarrollo completo, ultimando, como aparece en la imagen, un resumen del mismo. Para este ir paso a paso se han utilizado un total de once páginas en la PDI, lo que demuestra el detalle

poco a poco, que mantuviese centrado en cada parte, el proceso de ordenación de fracciones.

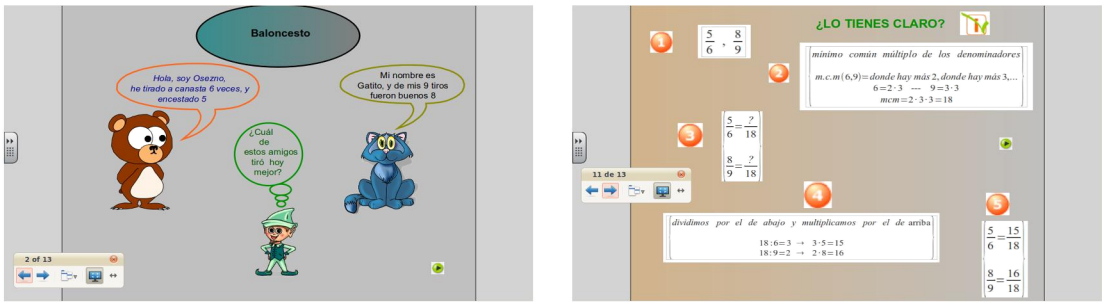



Figura 7. Página de planteamiento de una situación y página resumen del proceso.

La creación de este tipo de materiales no entraña dificultad alguna, la incrustación de los applet de Descartes se hacen como cualquier página html. En este caso utilizamos el software de las pizarras modelo Smart Board.

Primeramente, un proceso de caracterizar una página en blanco, en la que escribimos un texto y/o insertamos imágenes, imágenes guardadas en el ordenador y es tan sencillo como el de *examinar y adjuntar* que para otros procesos informáticos se precisa, una vez hecho esto basta dotar a los elementos de las distintas propiedades que el menú de este tipo permite. A continuación, existe una función para embeber en el archivo la web html. En nuestro caso, seguimos el proceso de descargar los materiales de EDAD, localizar el documento web que queríamos y una vez tenido, utilizamos la función adjuntar para embeberlo. Por último, a la imagen subida en la página le adjuntamos el archivo html.

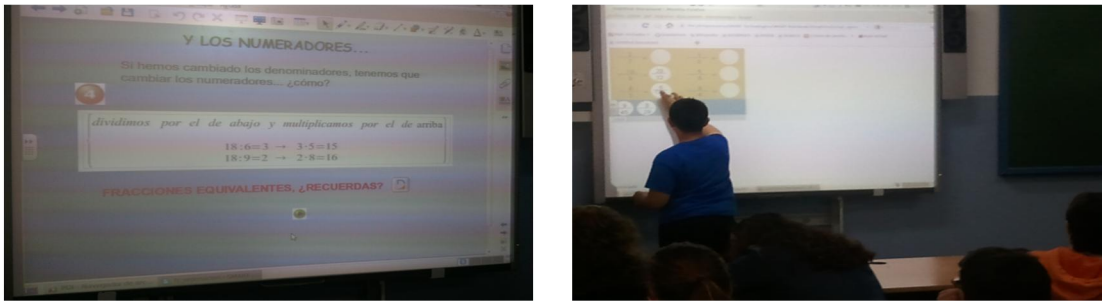



Figura 8. Página con texto enlazado a una incrustación de una archivo de EDAD.

Buscamos la sencillez, con un cierto atractivo para despertar el interés pero sin olvidar que nuestro objetivo es aclarar la duda que en su origen motivó este tipo de materiales, por eso este tipo de materiales de rápida creación tiene su espacio.

# 3. CONCLUSIONES

En un proyecto de innovación educativa, PIV, el cúmulo de cuestiones que se pueden dar abarca resultados que de inicio podían no esperarse, y que aconsejan tener una mente abierta, adaptable a observar lo positivo de cada situación,

desde las dudas más inesperadas de los alumnos/as, a preguntarnos sobre proceso de aprendizaje y desarrollo de competencias básicas, y no menos si pensamos en los compañeros que no pudieron optar a cursos de primer ciclo de la ESO. Con un entusiasmo por sumar, mejorar y sacar partido a las nuevas herramientas tecnológicas, ese conjunto de situaciones originó la creación de materiales especificos para las pizarras digitales, PDI, de nueva creación.

La diversidad es una característica de nuestro entorno, en los procesos de aprendizaje, del alumnado y del profesorado. Hemos mostrado dos ejemplos de actividades, extremo una de la otra, en su complejidad y sencillez de elaboración, ambas con una finalidad distinta pero a la vez igualmente importantes en su determinación por aportar a la formación de nuestro alumnado.

Tanto una como otro marcan la diferencia en el tiempo, el objetivo, estructura y el diseño respecto a la otra, pero las dos contribuyen a complementar los materiales de los que partimos, EDAD. Logramos una enseñanza-aprendizaje animada, motivadora y participativa por parte del alumno, son modelos de actividades que distan de poder realizarse de forma atractiva en la pizarra de tiza, y que tienen su validez en el medio de las PDI.

## REFERENCIAS.

FERNÁNDEZ, J., CRESPO, I., GALO, J.R. (2009) *Como formarse en el uso pedagógico de las TIC.* III Jornadas nacionales TIC y Educación, TICEMUR, Murcia.

GALO, J.R. (2008) Aprendizaje continuo en el aula. I Congreso de Internet en el aula.

RODRÍGUEZ, F.J. (2010) *Uso didáctico de materiales del Proyecto Descartes en Wikispaces.* XIII CEAM, Córdoba.

GALO, J., Y CAÑAS, J. (2006). Análisis de una experimentación constructivista con TIC en el aprendizaje de las matemáticas. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Huesca.

OCDE. (2006). PISA 2006: Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. http://www.pisa.oecd.org/

SALGUEIRO, J.A., CRESPO, I., GALO, J.R. Y RODRÍGUEZ, F.J. (2009) *La Competencia Matemática en la Red HEDA.* XIV JAEM Girona.

PRENSKY, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon , 9* (5), 1-6.

# MATEMÁTICA INFORMAL Y SENTIDO NUMÉRICO EN ESCOLARES DE PRIMER CICLO DE E. PRIMARIA

**Cristina Adrián**,
*Universidad de Córdoba (Córdoba)*
**Noelia Jimenéz-Fanjul**,
*Universidad de Córdoba (Córdoba)*
**Alexander Maz-Machado**,
*Universidad de Córdoba (Córdoba)*
**Rafael Bracho**,
*Universidad de Córdoba (Córdoba)*
**Teresa García**,
*C. P. R. Bembzar (Mesas del Guadalora, Hornachuelos)*

## RESUMEN.

Presentamos un avance de los resultados de una investigación sobre el sentido númerico en alumnos y alumnas de primero y segundo de Educación Primaria de la provincia de Córdoba.

Se utilizó un test estandarizado y validado internacionalmente TEMA-3. Los niños y niñas manifestaron un alto grado de desarrollo del sentido numérico en la matemática informal.

**Nivel educativo**: Primaria, Universidad.

## 1. INTRODUCCIÓN.

El aprendizaje matemático es importante en los primeros años de toda persona, por cuanto es el momento donde empieza a desarrollarse el pensamiento lógico y el razonamiento y se sientan las bases para la adquisición de nuevos conocimientos que se les enseñarán en cursos posteriores.

En estas etapas el sentido numérico cobra importancia porque este les permite aplicar el conocimiento matemático adquirido ante situaciones nuevas de la vida cotidiana.

Es por tanto importante conocer cuál es el grado de desarrollo de este sentido numérico en los escolares para poder emprender acciones didácticas y pedagógicas encaminadas a fomentarlo y estimular su desarrollo. Para ello venimos realizando una investigación sobre el sentido númerico que implica la valoración didáctica de unos materiales didácticos concretos y el trabajo cooperativo a nivel docente (Bracho, et al., 2011; García, et al, 2011). En esta comunicación solo nos centraremos en el análisis del desarrollo del sentido numérico.

# 2. MARCO TEÓRICO.

Desde sus primeros años de aprendizaje, los niños tienden a utilizar de manera natural sus habilidades de pensamiento para ordenar sus mundos, usando para ello las matemáticas y la lógica. Para ello es preciso que desarrollen un "sentido numérico". No es fácil definir de manera precisa la expresión relativa al sentido numérico. Podemos decir que este término hace referencia a varias capacidades importantes de las personas "incluyendo cálculo mental flexible, estimación numérica y razonamiento cuantitativo" (Greeno, 1991, p. 170).

Por tanto, se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y operaciones, junto con la capacidad para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos (Godino, et al., 2009).

El National Council of Teachers of Mathematics (1989) identificó cinco componentes que caracterizan el sentido numérico: significado del número, relaciones numéricas, tamaño de los números, operaciones con los números y referentes para los números y cantidades. Para adquirir un buen sentido numérico es necesario alcanzar destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los mismos, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas.

Es importante desarrollar el sentido numérico desde la Educación Primaria, ya que en dicha etapa educativa surge la necesidad de interpretar una gran variedad de problemas y fenómenos que se representan a través de índices numéricos, como por ejemplo: utilización de las matemáticas en los trabajos, planificación de horarios y programas, establecimiento de relaciones entre cantidades, interpretación de datos y fenómenos y la ejecución de otras tareas para resolver problemas cotidianos, que requieren de una variedad de habilidades matemáticas para poder utilizar la información cuantitativa (Mc Chesney y Biddulph 1994).

El sentido numérico no debe tratarse dentro de un capítulo especial a desarrollar dentro de una programación de aula, sino que su estudio debe impregnar la enseñanza general de las matemáticas; además, adquiere especial importancia cuando los números parecen en contextos distintos a los puramente numéricos.

El ambiente en una clase en la que se desarrollen actividades que promuevan el sentido numérico debe ser abierto y flexible, favorecedor de las respuestas del alumnado, ya que las actividades invitan a explorar, cuestionar, verificar y buscar el significado. Es complejo de evaluar, no solo en el aula, sino también en el ámbito de la investigación didáctica. La evolución del sentido numérico implica atender a las explicaciones, muchas veces verbales, del alumnado; es un proceso más cualitativo que cuantitativo, y no se puede medir fácilmente con pruebas escritas, sino que requiere un trabajo de observación importante por parte del profesorado directamente en el aula.

Aunque el término del sentido numérico se emplea esencialmente en las primeras etapas educativas como orientación curricular para favorecer el cambio hacia una matemática contextualizada y útil, no se debe restringir a la Educación Primaria. El desarrollo de esta orientación ha generado un área de investigación

activa, orientada a crear y evaluar estrategias de enseñanza para desarrollar dicho sentido.

Las actividades relacionadas con la matemática informal son adecuadas para conocer el grado de desarrollo del sentido numérico en los alumnos de Educación Primaria. Estas tienen que ver con la numeración, la comparación de números, el cálculo informal y el manejo de conceptos informales (Baroody y Benson, 2001; Ginburg y Baroody, 2007).

**Objetivos.**

Este estudio busca determinar cuál es nivel de desarrollo del sentido númerico en niños de primer grado de Educación Primaria en actividades de matemática informal

# 3. MATERIALES Y MÉTODO.

Para este estudio Se ha utilizado el TEMA-3, test de Competencia Matemática Básica, desarrollado por Ginbrug, H. P. y Baroody, A. J. en PRO-ED, Austin Texas en al año 2003 y adaptado al medio español por Nuñez, M. C. y Lozano, I. Este es un test estándar específico para matemáticas y validado a nivel internacional.

El tiempo y modo de aplicación del test se ajustó a las recomendaciones del TEMA-3. Los test se aplicaron durante el mes de junio del año 2011. Los datos se volcaron en una base de datos y luego se procedió a realizar los conteos y frecuencias para proceceder a su análisis e interpretación.

En este documento presentamos únicamente los resultados referidos a la Matemática informal, que corresponden a 41 items del test. Estos son 23 para Numeración, 6 de Comparación Numérica, 8 para Cálculo Informal y cuatro de Conceptos.

Se utilizó una plantilla para identificar a cada sujeto y algunas carácterísticas (Tabla 1). Asímismo se incluía un espacio para que el evaluador realizara observaciones o comentarios sobre la forma de responder del sujeto, bien para dejar constancia de hechos no escritos, por ejemplo si cuenta con los dedos o si utiliza algún tipo de acción para retener un dato, etc.

| # | Sujeto | Evaluador | Centro | Curso | Grupo | Nº Clase | Prof. Padre | Prof. Madre | Sexo | Fecha Nacimiento |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | ------ | --------- | Eduardo Lucena | 1 | A | 5 | Funcionario | Médica forense | 0 | 04/08/ 2004 |

Tabla 1. Ejemplo de registro de datos genereales de los sujetos.

**POBLACIÓN Y MUESTRA.**

La población esta constituida por el alumnado de un conjunto de colegios de Córdoba y provincia, del curso 2010-2011. Se tomó una muestra intencional y por conveniencia, que estuvo integrada por 367 alumnos de 17 centros educativos de la provincia de Córdoba, España. Dentro de esta muestra había un grupo de alumnos con necesidades educativas especiales.

Para desarrollar la investigación se realizaron dos jornadas de capacitación al personal encargado de aplicar el test (maestros y estudiantes de tercer curso de maestro).

# 4. RESULTADOS.

A continuación presentamos un ejemplo de las anotaciones hechas por uno de los evaluadores. El número indica el ítem. Como se observa en el Tabla 2, algunas cosas fueron percibidas pero no quedan evidencia en la plantilla de respuestas, por ejemplo "Le cuesta entenderlo. Intenta hacer cuentas pero no sabe". Esta es una información que permitirá más adelante realizar algunos análisis cualitativos que no abordaremos en esta comunicación pero que consideramos importante dejarlo indicado.

| |
|---|
| i39 "responde sin contar correctamente, va separando las fichas en montones" |
| i46 "falla el primero" |
| i48 "falla en 5x0 y 8x0" EN Nx0=0 |
| i50 "se para a contar con los dedos 12-6" |
| i51 "se para a contar con los dedos 7+3" |
| i52 "se para a contar con los dedos 7+7" |
| i53 "Le cuesta entenderlo. Intenta hacer cuentas pero no sabe" |
| i57 "dice no saber hacer la segunda suma" |
| i59 "solo ha fallado en el D. dando por respuesta 112" |
| i60 "se equivoca en el D solamente" |
| i61 "cuenta con los dedos y se para" |
| i63 "solo acierta A y D" |
| i64 "no lo entiende, no reconoce cifras" |
| i65 "no hace cuentas mentales, usa los dedos pero es correcto" |
| i66 "susurra los números" |
| i67 "cuenta con los dedos" |
| i68 "..."no lo se"..." |

Tabla 2. Ejemplo del tipo de anotaciones y observaciones del evaluador.

Los resultados obtenidos por los sujetos en matemática informal revelan que, en promedio, el 96,66% de los alumnos responden correctamente a los items (Figura 1). El mayor porcentaje de respuestas correctas se dio en aquellas sobre los conceptos. Por el contrario la componente de cálculo informal tuvo un 4,6% de respuestas erróneas.

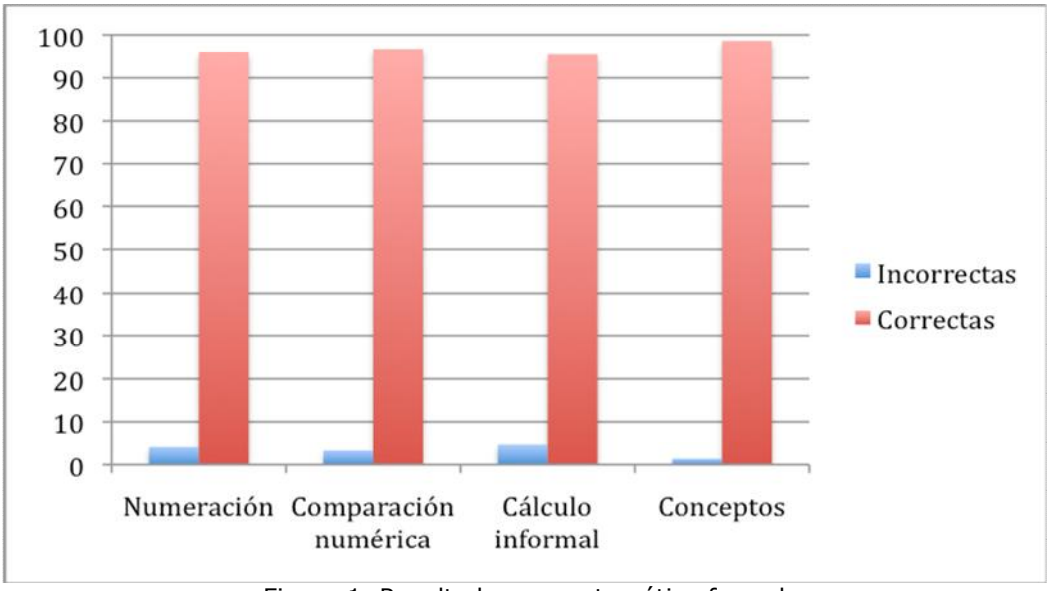



Figura 1. Resultados en matemática formal

Analizando el número de items para cada componente (figura 2) se obtiene que porcentualmente la media de aquellos correspondientes a numeración fueron en los que los alumnos tuvieron un mejor desenvolvimiento, mientras que el cálculo informal fue en el que hubo más deficiencias.

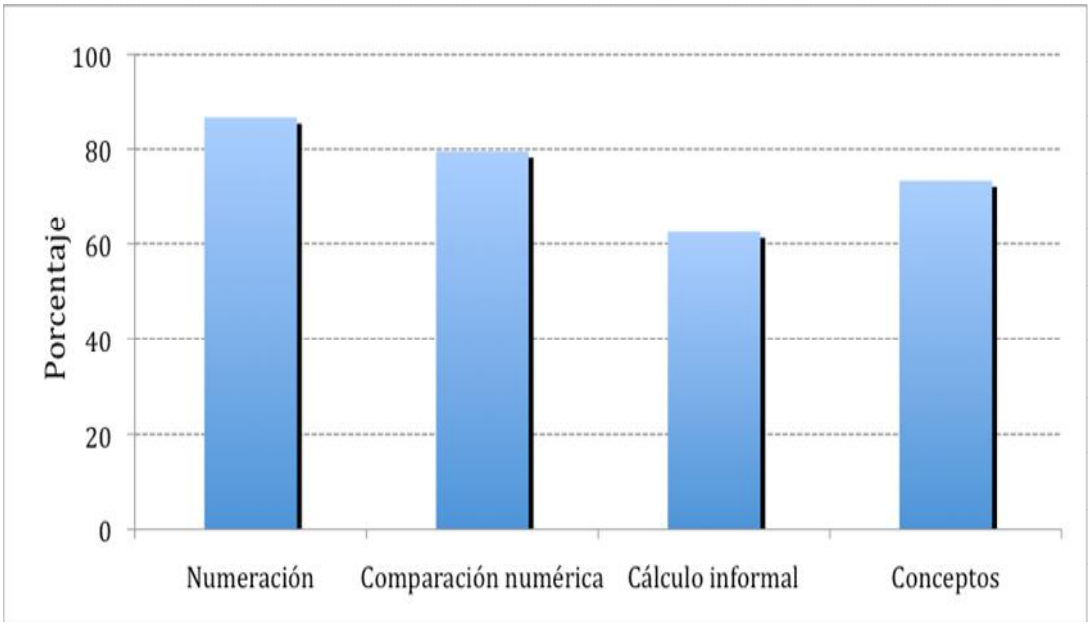



Fig 2. Porcentaje de respuestas correctas en Matemática informal por componentes.

Al segregar los datos por edades se obtienen los presentados en la figura 3. Se observa que los alumnos mayores de ocho años, que corresponden a los alumnos con necesidades educativas especiales, son los que en la media porcentual presentan mayor deficiencia en el sentido numeríco global y para cada una de las componentes analizadas. En algunos casos no se alcanza siquiera el 50% del puntaje esperado. Asimismo, se observa que hay diferencias

mínimas entre los niños con edades comprendidadas entre los 6 y 7 años respecto a los que tienen entre 7 y 8 años. Este resultado es lógico si se considera que en un año se produce un mayor desarrollo cognitivo en los niños en el sentido piagetiano.

Tambien se constata que la mayor dificultad en los tres rangos de edades se presentó en lo relativo al cálculo informal y la menor dificultad se dio en la numeración.

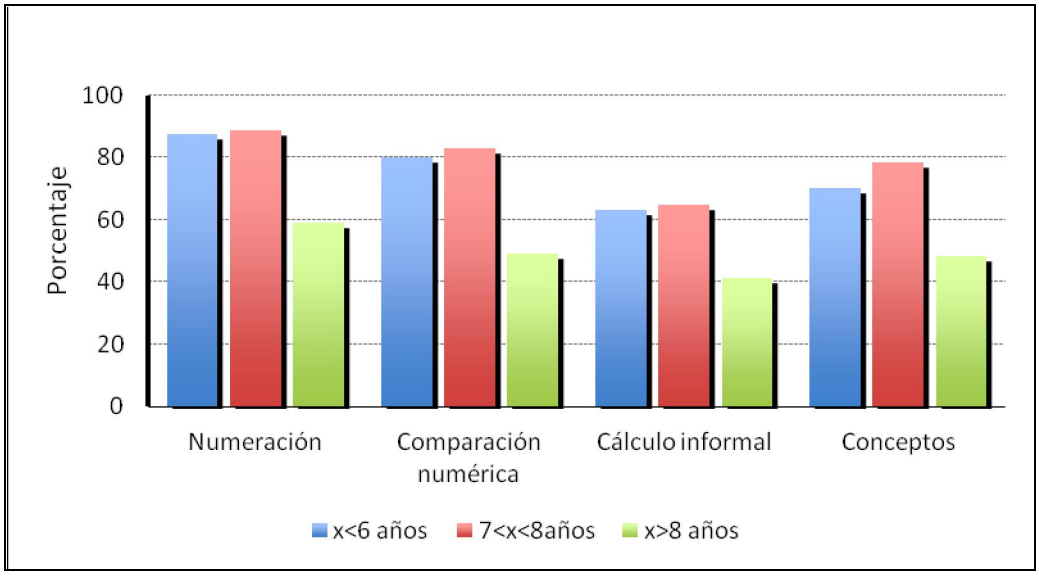



Fig 3. Porcentaje de respuestas correctas en Matemática informal por componentes y edad.

## 5. CONCLUSIONES.

Los alumnos que realizaron el test presentan un buen dominio del sentido número en la matemática informal. Se evidencian diferencias entre los niños con necesidades educativas especiales y los que no las tienen en la matemática informal.

El calculo informal es la actividad que presenta mayor dificultad en los alumnos por lo que los maestros deberían plantear actividades y estrategias orientadas a estimular y fomentar el sentido numérico asociado al cálculo mental.

## REFERENCIAS.

BAROODY, A. J. y BENSON, A. P. (2001). Early number instruction. *Teaching Children Mathematics, 8*(3), 154-158.

BRACHO, R., MAZ-MACHADO, A., JIMÉNEZ-FANJUL, N. y GARCÍA, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 28, 41-60.

GARCÍA-PÉREZ, T., BRACHO-LÓPEZ, R., MAZ-MACHADO, A., LUCENA-RUBIO-M., HIDALGO-ARIZA, M.D., y JIMÉNEZ-FANJUL, N. (2011). Una comunidad de investigacion orientada al aprovechamiento de recursos didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de Educaicón Primaria. En Lupiañez, J. L.; Cañadas, C.; Molina, M., Maz, M. y Palarea, M. (eds). *Investigaciones en Pensamiento Numérico Algebriaco e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 113-121). Granada: SEIEM.

GINSBURG, H. P. Y BAROODY, A. J. (2007). *Tema3. Test de competencia matemática básica.* Adaptación española de Núñez, Mª C. y Lozano, I. Madrid: TEA Ediciones.

GODINO, J. D., FONT, V. y WILHEMLMI, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 117- 184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

GREENO, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(13), 170-218.

McCHESNEY J. Y BIDDULPH F. (1994). Mathematics Education. Number Sense. En J. Neyland (Ed.), A *Handbook for Teachers.* Nueva Zelanda: The Wellington College of Education.

NCTM (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS). (1991). *Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla: SAEM THALES.

# LA CONSTRUCCIÓN DEL REPARTO EN EL AULA PREESCOLAR: UN PROBLEMA MATEMÁTICO Y LAS COMPETENCIAS DE RESOLUCIÓN

**M. en E.B. Maricela Rodríguez Ramírez**
Escuela Normal Manuel Avila Camacho, Zacatecas, México
**M. en C. Maricela Soto Quiñones**
Escuela Normal Manuel Avila Camacho, Zacatecas, México
**M. en E. B. Claudia del Carmen Piña Robles**
Escuela Normal Manuel Avila Camacho, Zacatecas, México

## RESUMEN.

El trabajo muestra una experiencia didáctica con un grupo de 20 alumnos de entre 5 y 6 años de edad, en México. Se aplica un problema matemático que implica el reparto con el propósito de identificar los niveles de conceptualización que los niños tienen al respecto a través de observar las estrategias que utilizan para resolverlo; la resolución del problema implica que los niños hayan construido los principios del conteo ya que la distribución de un conjunto de objetos entre otro requiere de un razonamiento más avanzado que establezca la relación binaria entre la parte y el todo.

**Nivel educativo**: Preescolar y Superior.

## 1. INTRODUCCIÓN.

La Reforma Educativa de la Educación Básica en México, se encuentra en un proceso de reestructuración que implica entre otras cosas una preparación de mayor calidad de los profesores en los diferentes campos del saber, en esta reforma se reconoce el principio de construcción del conocimiento como base para promover aprendizajes de calidad, de tal forma que los alumnos logren un mayor aprovechamiento académico y sean mejores personas en el colectivo social.

Derivado de lo anterior surge el presente trabajo que muestra los resultados del esfuerzo cognitivo de los alumnos de tercer grado de preescolar en México, las competencias desarrolladas y puestas en juego para resolverlo. Para estos alumnos el problema significó una situación en la que no tenían una solución construida de antemano, hubo que construirla a partir de los conocimientos que ya poseían. La resolución de problemas es una fuente de elaboración de conocimientos matemáticos; tiene sentido para las niñas y los niños cuando se trata de situaciones que son comprensibles para ellos, pero de las cuales en ese momento desconocen la solución; esto les impone un reto intelectual que moviliza sus capacidades de razonamiento y expresión. (PEP.2011:46).

Queda mucho trabajo por realizar respecto de la enseñanza de los conocimientos matemáticos en preescolar; pero se tiene conciencia de que un trabajo sistemático favorece en los alumnos un desempeño cada vez mejor al argumentar, inferir, y abstraer al resolver problemas.

El propósito de este trabajo de investigación es: Identificar los niveles de construcción que tienen los niños de preescolar sobre problemas de reparto a través de las estrategias que utilizan para resolverlos.

# 2. FUNDAMENTACIÓN.

Uno de los fundamentos teóricos que sustenta este trabajo son los principios que sobre el conteo proponen Gelman y Gallistel (1978), y Gelman y Meck (1983), dichos principios guían la adquisición y ejecución del contar matemáticamente. Aunque los niños pequeños no sean conscientes de ello, empiezan a poner en juego de manera implícita e incipiente, los principios del conteo que se describen a continuación:

## 2.1. PRINCIPIOS DE CONTEO.

1. De correspondencia biunívoca.- Todos los elementos de un conjunto se cuentan una sola vez.
2. De orden estable.- Las palabras – número – deben ser utilizadas en un orden concreto y estable. Es decir, el orden de la serie numérica siempre es el mismo (1, 2, 3, 4,…)
3. Cardinalidad.- La última palabra –número – que se emplea en el conteo de un conjunto de objetos, sirve también para representar el número de elementos que forman el conjunto completo.
4. De abstracción.- Los principios de conteo pueden ser aplicados a un conjunto de objetos o situaciones independientemente de las características externas de los mismos.
5. De Intrascendencia del orden. - El resultado del conteo no varía aunque se altere el orden empleado para enumerar los objetos de un conjunto.

Otro de los fundamentos de este trabajo es con base en los aportes de Terezinha Nunes (1997), quien considera que las situaciones que implican repartir requieren de un conocimiento sobre el conteo y de un razonamiento que permita la distribución de un conjunto de objetos – chocolates por ejemplo – entre diversos niños, repartir es distinto de sumar y restar porque implica crear una relación de multiplicación entre dos o más conjuntos. Op.cit. (1997). La relación parte – todo en los problemas aditivos, sólo considera que el tamaño del todo es la suma de las partes, sin importar si son iguales o no. Esta relación parte – todo también entra en los problemas de reparto y división, pero para ello se tienen que considerar tres elementos: el tamaño del todo, el número de partes y el tamaño de éstas que debe ser igual. Repartir es un paso fundamental para pasar a la comprensión de la división de manera formal. En síntesis: repartir es una acción que se relaciona con la división y con la posibilidad de particiones sucesivas (op.cit 1997), pero sólo es una acción de la división como tal, porque dividir implica más operaciones que sólo la repartición.

Los niños antes de asistir a la escuela, tienen ciertas experiencias matemáticas que construyen y realizan en sus juegos o en otras actividades

cotidianas como: separar objetos, repartir dulces y juguetes con sus amigos, acomodar las cucharas y los platos a la hora de comer, etc., de acuerdo con Terezinha Nunes (1997), aprender a contar es la base para la exploración y construcción de conocimientos matemáticos formales. Contar implica entre otras cosas, una serie de acciones que tienen que ver con los principios anteriores como: recordar las palabras numéricas, contar objetos de un conjunto una sola vez y saber que el número de objetos está representado por el último número que se pronuncia cuando se cuenta el conjunto, pero para ello es necesario contar adecuadamente.

# 3. DESARROLLO.

A partir del año 2004 se inicia primero en la Educación Preescolar y posteriormente en Secundaria y Primaria, una reforma integral que vincula los tres niveles educativos en México, dicho proceso de reforma ha sido gradual y sistemático, de tal forma que a la fecha (2011), se han reestructurado los planes y programas de estudio de la educación básica con el propósito central de elevar la calidad de la educación que reciben los niños y las niñas en las escuelas a partir de su experiencia; esta educación les permitirá alcanzar mejores niveles de aprovechamiento para tener acceso a un mayor bienestar individual y colectivo.

La Reforma de la Educación Básica en México tiene como centro la noción de competencia. Una competencia es la capacidad que una persona tiene de actuar eficazmente en cierto tipo de situaciones mediante la puesta en marcha de conocimientos, habilidades, actitudes, valores PEP 2011(p.3). La centralidad del trabajo pedagógico en preescolar es favorecer el desarrollo de competencias en los niños, éstas constituyen los aprendizajes esperados. Sin embargo es necesario considerar que una competencia no se adquiere en forma definitiva: se amplía y se enriquece en función de la experiencia, de los retos que enfrenta el ser humano y de los problemas que logra resolver en los distintos ámbitos en que se desenvuelve.

En general los aprendizajes de los niños abarcan distintos campos del desarrollo humano, no obstante dependiendo del tipo de actividades en las que se participe se favorece más el aprendizaje en un campo de desarrollo más específico que en otros. En preescolar se trabajan seis campos formativos en los que se incluye El pensamiento matemático, en este campo es necesario favorecer los aprendizajes respecto de dos aspectos relacionados con la construcción de nociones matemáticas básicas: Número, y Forma, espacio y medida.

Para los propósitos de este trabajo sólo se tomará como referente lo que implica la construcción del número en el programa (2011) cuyos aprendizajes esperados son: Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo. Y, Resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos

Dentro del conocimiento matemático uno de los propósitos principales de la educación preescolar, es que los niños usen el razonamiento matemático en situaciones que demanden establecer relaciones de correspondencia, cantidad y ubicación entre objetos al contar, estimar, reconocer atributos, comparar y

medir; comprendan las relaciones entre los datos de un problema y usen estrategias o procedimientos propios para resolverlos. PEP (2011. p.5)

Con base en lo anterior se diseñó un problema que les implicaba a los niños la acción de repartir; se aplicó a un grupo de tercer grado de preescolar de 20 niños entre 5 y 6 años de edad. El trabajo se organizó por equipos de cuatro con los siguientes resultados:

## 3.1. EL PROBLEMA.

Cecilia tiene 20 chocolates y los quiere repartir entre cinco amigas ¿cuántos chocolates le tocan a cada una?, el problema se escribe en el pizarrón y algunos alumnos lo leen en voz alta. Los materiales de que dispone cada equipo son hojas para máquina, lápices y un vaso con 30 palitos. Ya integrados en cinco equipos comienzan a utilizar estrategias para la resolución del problema planteado. (La clase se registra para identificar lo que sucede en el aula).

Lo primero que se observa es que cada uno de los alumnos intenta tener los 20 chocolates representados por palitos para resolver el problema en forma individual, se dan cuenta de que no es posible hacerlo de esa manera porque sólo hay treinta para cada equipo y no para cada niño así que optan por lo siguiente:

Maestra.- ¡Ah!, ¿no completan?...¿cómo van a resolver el problema?

Miguel.- ¡Contando!

Emily.- ¡Pongan los palitos aquí para contarlos! (ponen los palitos al centro y los cuentan oralmente y sosteniéndolos en las manos; 1, 2, 3…23, 24…. )

Tristán.- ¡A ver dame esos! ¿Cuántos tienes?, Miguel dice, ¡tengo seis!, (Tristán vuelve a contar los que tiene y agrega los de Miguel, 2 de Emily y 3 de Johana).

Tristán.- ¡Ahora si son veinte! (ponen los 10 que sobran en el vaso).

En el uso de las técnicas para contar, los alumnos ponen en juego los principios del conteo (Gelman y Gallistel 1978, y Gelman y Meck 1983); usan la serie numérica oral para decir los números en el orden adecuado (orden estable), enumeran las palabras (etiquetas) de la secuencia numérica y las aplican una a una a cada elemento del conjunto (correspondencia uno a uno); se dan cuenta de que la última etiqueta enunciada representa el número total de elementos del conjunto (cardinalidad) es decir, si se utilizan términos verbales al contar –¡Ahora si son veinte! –entonces debe haber un total de veinte palitos que se están contando como se observa en el fragmento del registro anterior.

La situación de resolver el problema de forma individual se presentó en cada uno de los equipos, lo que implicó para ellos resolver el primer reto que demandaba una colaboración entre sí, mediante conversar, buscar y probar distintos procedimientos hasta la toma de decisiones.

En el análisis de los resultados se encuentran tres niveles de conceptualización a los cuales se les asigna un nombre para categorizarlos de acuerdo con las características de cada uno de ellos, estos se muestran en la siguiente tabla.

| NIVELES DE CONCEPTUALIZACIÓN | NÚMERO DE ALUMNOS | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| Categoría.- "Sin lógica al contar"<br><br>1. No hay dominio de la correspondencia biunívoca y se observa que no han desarrollado el principio de la cardinalidad, por lo tanto no logran inferir las acciones necesarias para repartir. | 6 | 30 % |
| Categoría.- "Relación entre conjuntos"<br><br>2. Conocen la serie numérica, saben contar, entienden la lógica de "no sobra nada" pero no relacionan la cantidad total con el número de niños entre los que deben repartir los chocolates. | 4 | 20 % |
| Categoría.- "Cuento y reparto"<br><br>3. Conocen la serie numérica, buscan estrategias para un reparto equitativo, establecen cálculos mentales, los representan gráficamente y lo explican. | 10 | 50 % |
| TOTAL | 20 | 100 % |

1.- "Sin lógica al contar"

El primer nivel conformado por 6 alumnos y que representa el 30% del grupo, muestra que no supieron resolver el problema por las implicaciones que el mismo presentaba, como contar el material y discrimar el que no iban a usar; esto se aprecia en el siguiente fragmento de registro:

Maestra.- ¡A ver!, vamos a recordar, ¿cuántos chocolates tiene Ceci?
Niños.- ¡20!
M.- Entonces ¿qué podemos hacer?
Ns.- Contar los chocolates
M:_ ¿Cómo los vamos a contar?
Osma.- Así (cuenta 13 palitos)
M.- ¿ya son 20 chocolates?
Daniela.- No, nos faltan éstos (toma 4 y los coloca junto a los 13)
M.- Entonces, ¿ya son 20 chocolates?
Ns.- ¡No! (sin volver a contar, colocan más palitos y llegan a 21; después optan por ponerlos todos de nuevo en el vaso quedando los 30 con los que iniciaron)

Puede pensarse que contar es muy fácil, que el niño adquiere el concepto de número aprendiendo a contar, es decir, a hacer corresponder nombres de números con cantidades de objetos. Pero el estudio detallado de esta adquisición conceptual muestra que este proceso es mucho más complejo de lo que parece. (Delval, 2009), para tener aptitudes numéricas los niños necesitan realizar procedimientos matemáticos que los lleven al aprendizaje de las convencionalidades.

2.- "Relación entre conjuntos"

En este segundo nivel se encuentra un porcentaje menor de alumnos (20%) que están en proceso de alcanzar el tercer nivel, ya que entienden y aplican los principios del conteo, pero les falta la comprensión de una regla lógica elemental denominada transitividad, pues no tienen una idea completa de la relación que existen entre el número de chocolates y el número de niñas, es decir, entre la relación binaria de ambos conjuntos. Ejemplo:

Maestra.- ¿qué podemos hacer para poder darle los chocolates que le tocan a cada niño?

Ariani.- ¡Yo le voy a dar 2 chocolates a cada quien! (empieza a repartir y ve que no completa), -¡Ya no hay palitos y necesito más, los voy a repartir de 2 en 2 y si no me sobra, pues veo qué número le pongo! (Reparte los chocolates uno a uno entre las cuatro niñas que forman su equipo pero ella no se da, al ver que no se resuelve el problema dice: – ¡Ahora tú Marlen! – Marlen Realiza la misma estrategia que Ariani y no le funciona; Marlen dice – ¡Ahora tú Diana porque no me di palitos! – Diana en este tercer intento, reparte con mucha seguridad cuatro palitos a cada una de las niñas incluyéndose ella, cuando cuenta los de ella sonríe y dice: -¡Ah ya sé!...es que nosotros no nos dábamos palitos, por eso no resolvíamos el problema-. Terezinha (1997) considera que debe entenderse la transitividad para comprender la naturaleza del número.

Los problemas que se trabajen en educación preescolar deben dar oportunidad a la manipulación de objetos como apoyo al razonamiento; es decir, el material debe estar disponible, pero serán las niñas y los niños quienes decidan cómo van a usarlo para resolver los problemas; asimismo, los problemas deben dar oportunidad a la aparición de distintas formas espontáneas y personales de representaciones y soluciones que den muestra del razonamiento que elaboran.

3.- "Cuento y reparto"

En este tercer nivel los alumnos ya saben contar, por lo tanto pueden resolver el problema a través de diversas estrategias como el cálculo mental y marcas gráficas:

Maestra.- ¡A ver, explíquenme!, ¿cómo lo resolvieron?

Luis.- ¡Primero pensamos que eran 5!… pero sobraban; y después contamos veinte y ya no sobraban…..son 4 chocolates para cada quien porque son 5 amigos de Ceci.

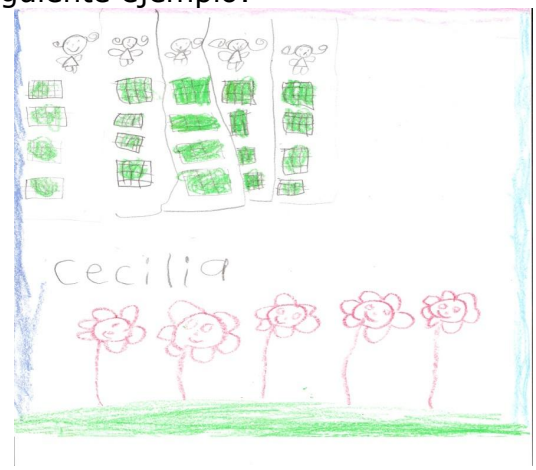
Eric.- ¡Sí, ya sobró cero!

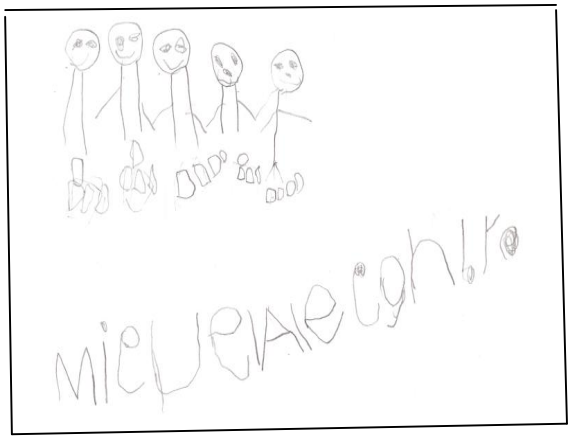
El reparto uno a uno aparentemente es la estrategia más elemental para dividir en grados posteriores a preescolar; sin embargo es necesario recordar que son niños de 5 y 6 años de edad y que resolvieron el problema con estrategias que requieren un conociimiento más avanzado que los anteriores. En este nivel se encuentran 10 alumnos que representan el 50% del total del grupo, lo que indica que están entre el uso de procedimientos concretos y el cálculo mental; para el aprendizaje de procedimientos mentales es necesario crear oportunidades para que los niños realicen descubrimientos propios, lo que será más significativo para ellos, para lo cual tienen que entender los procedimientos que usan cada vez que resuelven un problema, como en el caso de Tristán – ¡ya terminamos maestra!:

Maestra.- ¿Ah si?.. y ¿cómo le hicieron?

Tristrán.- Primero yo los dibujaba porque yo pensé que era más fácil, pero descubrí que era mejor pensando y que le tenía que dar cuatro chocolates a cada uno. ( después de que resolvió el problema mentalmente hizo 4 montones de palitos para comprobar el resultado).

El caso de Miguel Alejandro y Cecilia muestra que requieren de material concreto (palitos) y el uso de representaciones gráficas (los dibujos) para resolver el problema como apoyo para contar y repartir; lo que se observa en el siguiente ejemplo:



Miguel Alejandro.- ¡Yo los dibujé, y ya cuando los dibujé los fui contando y luego les puse los chocolates!

Cecilia.- ¡Yo ya sé! repartimos uno a uno en el dibujo y le tocan cuatro chocolates a cada una.

Las estrategias que utilizaron para repartir básicamente son diferentes entre los alumnos, no obstante, son las que se requieren para hacerlo equitativamente.

# 4. CONCLUSIONES

- El registro, análisis y argumentación de los procesos constructivos de aprendizajes matemáticos en el aula, posibilitan la construcción de una teoría didáctica que explique tanto las experiencias exitosas como las dificultades que se enfrentan en los procesos.
- Llevar a la práctica el principio de que el conocimiento se construye representa un desafío profesional para la educadora, pues la obliga a mantener una actitud constante de observación e indagación frente a lo que cada uno de sus alumnos experimenta en el aula.
- Los problemas que se trabajen en educación preescolar deben dar oportunidad a la manipulación de objetos como apoyo al razonamiento, el material debe estar disponible, pero serán los alumnos quienes decidan cómo van a usarlo para resolverlos. Asimismo, los problemas deben dar oportunidad a la aparición de distintas formas espontáneas y personales de representaciones y soluciones que den muestra del razonamiento que elaboran.
- Los resultados muestran el esfuerzo cognitivo de los alumnos y las habilidades que desarrollan para resolverlo. Para estos alumnos el

problema significó una situación en la que no tenían una solución construida de antemano, hubo que construirla a partir de los conocimientos que ya poseían, lo cual destaca la importancia de los mismos.

## REFERENCIAS.

DELVAL, Juan 2009. El desarrollo Humano. Siglo XII de España editores S.A. México D.F.

GELMAN, R. y Gallistel, C. (1978): The child's understanding of number, Cambridge, Mass : Harvard University Press.

GELMAN, R. y Meck, E. (1983): «Preschooler's counting: principles before skill», Cognition.

NUNES, Terezinha. Y Bryant Peter (1997). Las matemáticas y su aplicación. La perspectiva del niño. Siglo XXI editores. México

SEP.- Programa de Educación Preescolar 2011. Versión 8 junio 2011

# CINE Y MATEMÁTICAS: ZAPEANDO LAS MATES

**Tere Valdecantos Dema**,
*S.I.P.E.P. Algeciras, Algeciras (Cádiz)*

## RESUMEN.

Aprovechando que está la exposición *Cine y Matemáticas* realizada por los/as compañeros/as de Thales de Almería, quiero compartir algunos trocitos de películas para utilizarlas en el aula

**Nivel educativo**: Secundaria y Bachillerato

## 1. INTRODUCCIÓN.

Cuando se habla de T.I.C. No sólo nos referimos a la informática. En esta caso concreto me voy a referir a la **Comunicación.** Nuestro alumnado o está en el ordenador o está frente a la tele. No tiene mucho sentido luchar contra eso porque, como mucho, son nuestros/as cinco horas a la semana. En vez de luchar contra corriente, ¿por qué no encontrar aquella que los/as lleve dónde queremos? Es cuestión de *zapear* e ir buscando qué cosas de la *caja tonta* nos pueden servir para nuestras clases.

## 2. EL CÓDIGO DA VINCI.

A mi modo de ver, infumable pero ¿cómo no aprovechar la sucesión de Fibonacci para introducir las sucesiones?.

## 3. LA JUNGLA DE CRISTAL 3: LA VENGANZA

Tenemos los enigmas de Simón Dice: el problema de los gatos o el de las jarras de medir.

## 4. EL AMOR TIENE DOS CARAS.

De las de amor y lujo tenemos los primos ¿gemelos, asociados?.

## 5. LA HABITACIÓN DE FERMAT

Todos los enigmas que les pone el supuesto Fermat, además de mediciones y la conjetura de Goldbach.

## 6. EL SENTIDO DE LA VIDA.

No puedo resistirme a la canción, cuando doy la notación científica.

# REFLEXIÓN SOBRE CÓMO ENSEÑAR MATEMÁTICA RECREATIVA EN PROFUNDIZA

**Jordi Alba Rodríguez**,
Universidad de Granada
**Pablo Flores Martínez**,
Universidad de Granada

## RESUMEN

La necesidad de atender a la diversidad por arriba está llevando a distintos organismos a preocuparse en buscar fórmulas y programas específicos para niños con especial talento o motivación. El programa Profundiza que promueve la Junta de Andalucía en colaboración con el Ministerio de Educación es un ejemplo de ello. Buscar tareas específicas de atención matemática para estos programas es un problema actual. Impartir un curso de matemática recreativa en profundiza ha dado la oportunidad de reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas. En esta comunicación presentamos la reflexión de uno de los autores sobre un problema de enseñanza de las matemáticas detectado en el curso, llevando a cabo un ciclo de reflexión profesional.

## 1. INTRODUCCIÓN

El Interés de atender a los niños con talento dentro de la atención a la diversidad, está en crecimiento constante, ya que debemos recordar que también es alumnado con Necesidades Educativas Especiales (MEC, 2008). Para ello se crean equipos especializados para atender al alumnado con altas capacidades (EOE especializado en altas capacidades). También ha aumentado la percepción sobre alumnado con estas características, especialmente gracias a la evaluación y diagnóstico temprano que comienza a partir de los 5 años, en Educación Infantil. Como es difícil atender debidamente en las clases a estos alumnos, en la legislación actual se determinan procedimientos ordinarios y extraordinarios para promover un desarrollo pleno de sus capacidades mediante ampliaciones y flexibilizaciones curriculares (Segovia I. y Castro E., 2004). Estas acciones son llevadas en horario ordinario dentro del centro pero se crean programas de específicos de enriquecimiento curricular (Profundiza, Estalmat) tanto para la etapa de Educación Primaria como para Educación Secundaria.

Numerosas investigaciones relacionadas con el talento o altas capacidades se están llevando a cabo tanto en España como en muchos otros lugares de nuestro planeta, lo que muestra que el tema tiene una relevancia importante y es de actualidad.

El programa Profundiza de la Junta de Andalucía (Junta de Andalucía, 2011) en colaboración con en el Ministerio de Educación está dirigido al alumnado con mayor capacidad y motivación para aprender. Se pretende con él avanzar hacia un modelo de educación basado en los principios de equidad y excelencia, una educación inclusiva, intercultural y plural que atenderá al desarrollo personal, interpersonal, social y profesional haciendo conscientes a los estudiantes de sus

propias capacidades y motivándoles para esforzarse en desarrollarlas. Su finalidad es atender adecuadamente y de forma específica, que mejore los niveles de alto rendimiento y resultados, para que continúen avanzando en su aprendizaje y logro de competencias sin riesgo de abandono o desinterés en estudios posteriores, como impulsar el interés del alumnado por la investigación para fomentar y aumentar la vocación científica de los futuros ciudadanos. El programa va destinado a alumnado de enseñanza tanto de enseñanza básica como postobligatoria, que destacan por su mayor capacidad, interés y motivación para aprender.

En el programa Profundiza del curso 2011-2012 se ha implicado la SAEM Thales, que ha asumido la impartición de al menos un grupo de alumnos, en casi todas las provincias andaluzas. En Granada, la SAEM Thales atiende a dos grupos de alumnos. Uno de ellos es un curso de Matemáticas Recreativas, que se desarrolla en el CEIP Sierra Nevada de Granada, dirigido a alumnado de tercer clico de Educación Primaria (5º y 6º curso) que tienen edades comprendidas entre los 9 y 11 años. Dentro del grupo hay 9 alumnos diagnosticados con Alta Capacidades y todos satisfacen las condiciones tanto en cualidades como en actitud. El curso consta de doce sesiones que se imparten los sábados cada 15 días, y en ellas se profundiza en aspectos matemáticos, atendiendo preferentemente a una intención lúdica de las matemáticas. La asistencia de los alumnos es poco regular, aunque se ha consolidado un grupo de entre 8 y 10 alumnos.

Estando implicados en la impartición de este curso, hemos tomado su realización como objeto para reflexionar sobre el papel del profesor en la enseñanza de las matemáticas. A tal fin nos posicionamos en la línea que aboga por dar importancia a la reflexión del profesor, como forma de crear una actitud adecuada para afrontar de manera sistemática los problemas de su práctica. Para adoptar una aptitud reflexiva, el profesor necesita "distanciarse" de su práctica para poder contemplarla con cierta objetividad, con lo que estará en condiciones de confrontar sus ideas con otros profesionales y teoría para poder entender mejor lo que sucede y actuar de forma profesional (Flores, 2007), llevando a cabo lo que Schön (1992) denomina reflexión para la acción.

Al estar cursando el Máster de Didáctica de la Matemática, en la Universidad de Granada, hemos aprovechado la experiencia en Profundiza para realizar un ciclo de reflexión, siguiendo las indicaciones emanadas de un taller de reflexión que forma parte de la asignatura Desarrollo y Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas, dentro del citado máster. Este ciclo de reflexión nos permite estructurar la comunicación. En los próximos apartados de la comunicación presentamos el ciclo de reflexión utilizado (Smith, 1991), para reflexionar sobre un problema profesional surgido durante la práctica de enseñanza, como es el caso de las clases del Programa Profundiza.

## 2. PROFESOR REFLEXIVO

Para evolucionar en su desarrollo profesional, el profesor tiene que reflexionar sobre su práctica (Jaworski, 1993). El desarrollo Profesional es el proceso natural de crecimiento profesional en el que el profesor adquiere gradualmente confianza y gana nuevas perspectivas, aumenta su conocimiento, descubre nuevos métodos y realiza nuevos roles (Eraut, 1997). Tal como señala Jaworski (1993),

se considera que "la reflexión docente" es una etapa en el desarrollo, aunque también puede tomarse como un método para evolucionar. Dado que hay dudas sobre si la formación inicial del profesor se integra en el desarrollo profesional, el taller de reflexión propone arrancar de un problema sentido por cada uno para reflexionar sobre la práctica de la enseñanza de las matemáticas. El primer autor, profesor con poca experiencia docente, ha aprovechado el curso profundiza para iniciar en su desarrollo profesional.

La idea de profesor reflexivo está inspirado en planteamientos filosóficos de John Dewey, quien considera que el pensamiento reflexivo, a diferencia de otras operaciones a las que se aplican el nombre de pensamiento, implica (1) un estado de duda, la vacilación, la dificultad mental, en el que el pensamiento se origina, y (2) un acto de búsqueda, la caza, preguntando, a encontrar el material que se resuelve la duda, resolver y disponer de la complejidad.

Donal Schon trabajo sobre reflexión en la acción para el desarrollo profesional basándose en ideas de Dewey, ya que como comenta "la universidad seduce y abandona", con esto nos dice que el conocimiento teórico no siempre produce conocimiento práctico y puede constituirse en obstáculo para el conocimiento práctico, ya que propone esquemas de validación muy fuertes, sin dar herramientas para la actuación práctica que correspondan a los criterios de validación teóricos, además de no poder prevenir todas las situaciones que se pueden presentar.

Un proceso de reflexión para el profesor como nos comenta Jaworski (1993) encierra la "disciplina de darse cuenta" que consiste en percibir un evento que se produce en el aula, examinando las cuestiones de qué y como. Para ello tiene que distanciarse de la práctica para realizar una análisis crítico que le permita explicarla, explorando las razones o motivaciones, los porqués del evento. El análisis crítico conduce a un conocimiento más abierto y esto puede afectar las opciones y decisiones en el aula, lo que lleva al cambio en la clase.

La Reflexión crítica debe ser un proceso colectivo porque ayuda a encontrar respuesta a preguntas difíciles, pero sobre todo ayuda a ver la práctica con otros ojos y ver los que antes no lograbas ver que podía ser un problema que impedía el correcto desarrollo profesional. Para ello es muy valioso tener "alguien con quien hablar" y "una caja de resonancia" en la que analizar tu práctica, sobre todo porque te permite distanciarte de ella.

Smyth (1991), especialista en educación de la Universidad de Deakin, Australia, dentro del proyecto: Teacher's Theories of Action Group nos recuerda que la enseñanza es una actividad política, histórica, por lo que hay que percibir el significado de la práctica docente en relación a su finalidad pedagógica (enseñar matemáticas, en nuestro caso), pero también en su dimensión política y social (con qué fin, cómo repercute en el niño). La propuesta de desarrollo profesional para tomar en consideración estos principios se recogen en el "Ciclo de Reflexión" que pasar de preocuparse del cómo hacer al por qué lo planteo así, y revisar la propuesta. Para Smyth (1991), el profesor puede generar conocimiento pedagógico en su reflexión, ya que el conocimiento del profesor puede partir de su práctica para alterar las condiciones en que se desarrolla la enseñanza.

Para ello propone un modelo de reflexión con cuatro fases:

Descripción *¿Qué es lo que hago?* Arrancando de incidentes críticos, basándose en lo que percibe y anota en su diario. Se basa en cuestiones como: ¿Cuáles son mis prácticas? Al realizar esta fase se buscan ejemplos de las prácticas que reflejen regularidades, contradicciones, hechos relevantes e irrelevantes. Para precisarlo se plantea ¿Quién? (sujeto) ¿Qué? (asunto) ¿Cómo? (contexto).

Inspiración *¿Cuál es el sentido de mi enseñanza?* Identificación de las teorías locales que provocan que la práctica sea como es, justifican las acciones del profesor. ¿Qué teorías expresan mis prácticas? En esta fase el profesor analiza las descripciones para intentar determinar relaciones existentes entre los distintos elementos y en función de esto, hacer una serie de afirmaciones del tipo: "Parece como si....."

Confrontación *¿Cómo llegué a ser de este modo?* Para llevarla a cabo es conveniente el contacto con otras fuentes de información, sea con iguales (compañeros) o con fuentes de conocimiento profesional (libros, documentos, información que el profesor considere relevante). Con ello se pretenden introducir preguntas intermedia: ¿Todos ven las cosas de la misma manera? ¿Es posible otra interpretación?

Reconstrucción *¿Cómo podría hacer las cosas de otra manera?* Con las fases anteriores se está en condiciones de formular la cuestión inicial de otra manera, respondiendo a cuestiones: ¿Cómo podría cambiar?, ¿Qué podría hacer diferente?, ¿Qué es lo que considero importante?, ¿Qué es lo que tendría que hacer para introducir los cambios?

## 3. CICLO DE REFLEXIÓN. REFLEXIÓN SOBRE UN PROBLEMA PROFESIONAL SURGIDO DURANTE LA PRÁCTICA DE ENSEÑANZA

En este apartado comentaremos el proceso de reflexión que he llevado a cabo, siguiendo el ciclo de reflexión anterior, para responder a un problema surgido en la docencia de Profundiza, y que hemos trabajado en la asignatura del Master de Didáctica de la Matemática. Es un resumen del proceso reflexivo que he seguido para enriquecer mi practica de la enseñanza en el programa Profundiza.

El ciclo de reflexión seguido con nuestra práctica comprende:

- Fase1. Identificación de un problema de la práctica. En nuestro caso hemos identificado una situación conflictiva que apareció en una sesión de la enseñanza del grupo Profundiza. Culmina con la descripción del problema (contexto, situación problemática, formulación del problema), siempre que sea comprensible para otros.
- Fase 2. Información del problema. Para facilitar apreciar las teorías desde las que se ha planteado el problema, en el taller de reflexión los compañeros del curso del máster señalan "lo que creen que creo". Posteriormente cada participante seleccionaron las que compartían, bien por identificación o por rechazo.

- Fase 3. Confrontación. En esta fase los compañeros hacen sugerencias para afrontar el problema y sugieren lecturas que ayudan a profundizar en estudio del problema
- Fase 4. Reformulación. Nueva formulación del problema inicial y apreciaciones para actuaciones futuras.

## FASE 1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

El problema se detecta en las clases de "Matemáticas Recreativas" del Programa Profundiza en que se trabajaba el sistema de numeración maya en la que participan 9 alumnos del tercer ciclo de primaria.

Tras varias actividades con otros sistemas de numeración (marciano, egipcio, babilónico), pasamos a una nueva actividad con el sistema de numeración maya en la que aprecio que los alumnos tenían dificultades para resolverla por lo que empezaron a aburrirse y perder la motivación por la actividad.

En ese momento me planteo diversas cuestiones, como: ¿Por qué los alumnos se aburren? ¿Qué puedo hacer si los alumnos se a desinteresan por la actividad? ¿Qué características tiene esta actividad que hace que se desinteresen?

Para formular el problema y hacerlo comprensible a los compañeros del taller de reflexión señalo:

**Contexto** del problema: Clases del Programa Profundiza de Matemáticas Recreativas. Alumnos 3er ciclo primaria (10 y 11 años). Tarea con sistemas de numeración maya (describir e identificar cómo funcionaba, tras identificar otros sistemas).

**Déficit** que surgió: Los alumnos no lograron realizar una tarea, se cansan.

**Sujeto** que necesita un solución: Profesor, yo.

**Acción**: Enseñanza.

Formulación del problema de manera interrogativa: ¿Qué puedo hacer si los alumnos se desinteresan por una actividad sobre la numeración Maya?

## FASE 2. INFORMACIÓN DEL PROBLEMA.

La información del problema es esencial para saber qué puedo hacer para mejorar mi práctica ya que tengo que encontrar propuestas que hagan que los niños no se aburran y sigan motivados por la actividad. En estos cursos es primordial cuidar la motivación y la atención puesto que es una profundización de contenidos que es muy difícil conseguir sin una actitud adecuada.

Una vez propuesto mi problema, son los compañeros los que entran en juego y los que me ayudan con sus aportaciones a distanciarme del problema, En el *taller de Reflexión*, los compañeros me indican las *creencias* que ellos creía que yo tenía para percibir el problema a partir de lo que está ocurriendo (del contexto). De las creencias que me propongan seleccionaré aquellas con las que me identifique y que crea que me ayudarán a mejorar mi práctica.

Los compañeros hicieron sus aportaciones, la formularon del siguiente modo: *"yo creo que el cree……".* En esta fase cada uno de mis compañeros me hicieron al menos una aportación cada uno, sin que el implicado pudiera expresar nada al respecto, solo tenía que anotarla para analizar si eso es lo que yo creía que esta ocurriendo.

Las creencias de mi compañeros sobre lo que yo creía, que influía en la formulación de mi problema fueron las siguiente: "….que *los alumnos deben*

*estar motivados"; "….que no es capaz de encontrar materiales o recursos que faciliten la tarea"; "….que el desinterés de los alumnos es la tarea"; "….que necesita motivar en la actividades que propone para que estos no pierdan interés".*

Estas afirmaciones me llevaron a pensar en aspectos que antes que no creía tomaba en cuenta, me aportaban algunas causas del problema o de que lo sintiera como problema, pues yo pensaba que el problema estaba en el diseño de la actividad. Entre esa fase y la siguiente hay un proceso de distanciamiento del problema, mirándolo a través de las creencias aportadas por los compañeros, para poder contemplarlo con menos prejuicios (Flores, 2007).

## FASE 3. CONFRONTACIÓN.

En esta fase cada participante indicó qué repercusión habían tenido las creencias aportadas por los compañeros sobre la percepción de su problema, lo que fue fundamental para buscar soluciones y guiar mi reconstrucción para mejorar la práctica.

Posteriormente los demás compañeros me hicieron propuestas para mejorar la actividad y solucionar el problema (mientras yo se las hacía a los demás). De las propuestas que me hicieron, seleccione aquellas que creía que debía poner en práctica en mi afán de buscar una solución. La que seleccione fueron: hacer cambios en el diseño de la actividad, innovar, buscar forma de que los alumnos se diviertan, trabajando con material manipulativo, lúdico, pensando contextos con el que usarlo, y planteando menos actividades.

Las propuestas de los compañeros me llevan a percibir carencias de la actividad, como la falta de claridad, disponer de razones teóricas para organizarla y ampliar los materiales y recursos. Para ello que me dispuse a realizar una búsqueda bibliográfica para diseñar la actividad sustentándose en una base teórica. Por otra parte sentí la necesidad de buscar otras actividades que trabajase la numeración maya para comprobar como trabajaban estos contenidos y que podía sacar de provecho mi actividad.

Con todas estas consideraciones me puse ha trabajar para descubrir qué, cómo y porqué se hacía. Encontré aportaciones tanto en trabajos similares como en autores que trataban el tema de las actividades.

En la revisión bibliográfica he seleccionado a Zoltan Dienes (1974) en la que nos muestra *Las seis etapas del aprendizaje de las matemática*, por las que debe pasar un alumno para crear un aprendizaje matemático; Arthur J. Baroody (1988) que nos describe las *Implicaciones Educativas: Planificación de un aprendizaje significativo,* como el propio nombre indica son una serie de pasos para planificar un aprendizaje significativo.

María Antonia Canals (2001), que hace una serie aportaciones de cómo debemos trabajar la matemática en clase con los niños. Por los motivos que detallo me han ayudado a modificar mi práctica.

Dienes (1974) propone Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas, que me sugieren una forma de actuación sistemática, por lo que resulta un aporte significativo para mi actuación. Estas fases son:

1. Juego Libre: Introduce al estudiante en un medio simulado.

2. Juego Orientado: Se introduce reglas y normas que orientan el desarrollo de la actividad lúdica hacia el logro de una cierta estructura matemática.
3. Abstracción: Detectar estructuras comunes.
4. Representación: Primera forma de expresión de lo conceptualizado.
5. Simbolización: Invención de un lenguaje matemático (individual y luego socializado) apropiado a las representaciones y las propiedades de los conceptos construido y las estructuras abstraídas.
6. Generalización: La manipulación de un sistema formal es la meta del Aprendizaje Matemático. De conceptos matemáticos y sus estructuras.

María Antonia Canals (2001) hace una serie de sugerencias para trabajar las matemáticas de una forma entretenida y motivadora, en la que el alumnado pueda ser el propio constructor de su conocimiento a través de la manipulación. Estas son algunas de sugerencias: *No podemos tener a los niños sentados en las mesas, delante de un papel, la mayor parte del tiempo. Así aprenderán muy poco. Introducir la interrogante: La experimentación, por sí sola, no nos lleva al aprendizaje. El primer objetivo de un maestro de matemáticas debería ser interesar a sus alumnos y conseguir que disfruten descubriendo. Empezar siempre con actividades manipulativas. Después pasar algunas cosas a papel y lápiz, pero nunca ha ser el punto de partida.*

Como también comente otro de los autores seleccionados ha sido Arthur J. Baroody (1988) que propone unas *Implicaciones Educativas* para la *Planificación de un aprendizaje significativo*, entre las que sacamos: Concentrarse en estimular el aprendizaje de relaciones; Concentrarse en ayudar a los niños a ver conexiones y a modificar puntos de vista; Planificar teniendo en cuenta que el aprendizaje significativo requiere mucho tiempo; Estimular y aprovechar la matemática inventada por los propios niños; Tener en cuenta la preparación individual; y Explotar el interés natural de los niños en el juego.

También analicé otros textos que trabajaban actividades similares como los siguientes:

**Sistemas de numeración egipcio, maya y binario**, José Tomás Gallegos Ahedo Esta actividad que tiene una mayor estructuración, que no implica mayor motivación y se realiza sin materiales manipulativos.

**ARITMÉTICA MAYA**, *www.matematicaparatodos.com/varios/**mayas**01.pdf*

Es una actividad que tiene mayor complejidad, que podría disminuir la motivación y no trabaja con materiales.

**Guía para maestros - Matemáticas 60 grado**, *www.educatrachos.hn/.../U9-* Esta guía muy elabora, que me ayudará con la estructuración y clarificación de la actividad.

## FASE 4. REFORMULACIÓN.

En esta última fase buscamos reunir todo el proceso de reflexión realizado para sintetizar la nueva perspectiva del problema, poniendo en prácticas nuevos conocimientos y puntos de vista para afrontarlo. Además se aplica todo nuestro trabajo dando respuesta a cómo y qué podría cambiar, qué es lo que considero más importante y como podría introducir los cambios.

Para terminar el ciclo de reflexión, analicé la actividad con los aportes de las fases anteriores, para ver qué debía modificar y así crear un nuevo documento.

Pude comprobar que la actividad seguía aproximadamente las etapas de Zoltan Dienes, introduciendo y trabajando cada una a través de las distintas actividades. Consideré también que atiende a los aportes de planificación de Barodi (1988), sirviéndome para considerar importante conocerlos para nuevas propuestas, al menos como actitudes que debe tener el docente. También pude comprobar que se trabajan algunas consideraciones que hace María Antonia Canals (Canals, 2001 y Lanceta, 2008), aunque sin utilizar recursos y materiales didácticos, algo primordial para ella en el inicio de cualquier actividad. Solo me quedaba introducir algunos aspectos que me habían indicado los compañeros que recogían los autores y que creían que me servirían para mejorar la actividad.

Por la tanto las modificaciones que realicé se basaron en introducir materiales apropiados que remplazaban los códigos del sistema de numeración maya (botones, palillos, habas y una plantilla para separar el distintos orden de base), clarifiqué y estructuré el documento para evitar el máximo de confusiones posibles, busqué un documento de apoyo para solucionar posibles dificultades, y reduje algo la actividad para no trabajar siempre el mismo tema y caer en la monotonía. (En anexo el esquema de la actividad original y algunos cambios hechos en la reformulación).

# 4. CONCLUSIONES

Como hemos podido comprobar el ciclo de reflexión como proceso de actuación profesional del profesor, es fundamental si queremos prepararnos para ser profesionales reflexivos. Si bien la idea de reflexión también acepta realizarla en solitario, creemos que la experiencia es más rica cuando se hace de manera sistemática, siguiendo un ciclo como el de reflexión de Smyth (1991), ya que te ayuda a distanciarte de la práctica algo casi imposible individualmente. La aportación de iguales hace que veamos la práctica como nunca seremos capaces de verla y nos demos cuenta de problemas que creíamos inexistentes.

Los aportes que obtenido de este ciclo de reflexión se han visto reflejados en otras actividades del curso de Matemáticas Recreativas del Programa Profundiza, ya que ahora diseño y planifico teniendo en cuenta aspectos que no conocía, como comenzar siempre que sea posible con algún material (Cascallana, 1988). Pese a que era crítico con el diseño de la actividad por considerar que no tenía ninguna base teórica, he podido comprobar que no era así, que es muy importante pararse a pensar antes de comenzar a enseñar, que debemos intentar buscar materiales para todo y no proponer muchas actividades iguales. Siento la necesidad de clarificar y estructurar todo lo posible, comprendiendo con mayor profundidad el contenido que quiero transmitir. Me he sentido identificado con lo que cuenta María Antonio Canals sobre una anécdota que le comento un profesor: *Expliqué el problema una vez y no lo entendieron, lo volví a explicar y tampoco lo entendieron, lo expliqué una tercera vez y entonces quien lo entendió fui yo.*

Ha sido una experiencia nueva y muy positiva que recomiendo a cualquier docente que quiera mejorar su práctica. Si como señala Jaworski (1993) no todos conseguimos alcanzar esta etapa del desarrollo profesional, el profesor reflexivo, tenemos que prepararnos para ello, pues te engrandeces profesionalmente cuando la consigues. Para todos los participantes, el taller de reflexión ha sido una experiencia muy

enriquecedora, creo que ha creado un antes un después, que sin duda nos ayudará en nuestra difícil y gratificante tarea docente.

## BIBLIOGRAFÍA.

Barodi, A. (1988).El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial. Madrid: Visor libros.

Canals, M. A. (2001).Vivir las matemáticas. Barcelona: Octaedro.

Cascallana, M.T. (1988). Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid: Santillana.

Dienes, Z.P. (1974). Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas. Barcelona: Teide.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. PNA, 1(4), 139-158.

Jaworski, B. (1993): The Professional Development of Teachers — the Potential of Critical Reflection, British Journal of In-Service Education, 19:3, 37-42

Junta de Andalucía (2011). INSTRUCCIONES de Dirección General de Participación e Innovación Educativa por las que se regula el funcionamiento del programa de profundización de conocimientos "PROFUNDIZA" para el curso 2011-2012. http://www.juntadeandalucia.es/educacion/educacion/nav/contenido.jsp?pag=/Contenidos/PSE/orientacionyatenciondiversidad/profundiza/INST051011&vismenu=0,0,1,1,1,1,0,0,0

Lanceta, P. B. (2008). Conversaciones matemáticas con María Antònia Canals. Barcelona: Graó.

Ministerio de Educación y Ciencia (2008). Orden 25 de Agosto de Atención a la Diversidad. BOE.

Segovia I. y Castro E. (2004) La educación de los niños con talento en España. En Soriano, E. de, Ball, M., Benavides M., Betancourt, J., Blanco, R. & Castro, E., La educación de niños con talento en Iberoamérica. (pp. 115-128). Santiago, Chile, Trineo, S.A.

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Ed.), Os Professores e a sua Formação (pp. 79-91). Lisboa: D. Quixote.

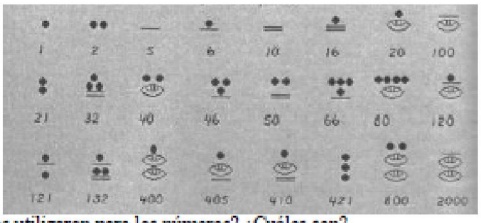
Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. Revista de Educación n. 294, 275-300.

Anexo1.Documento original.

**Sistema de numeración maya**

La civilización maya se extendió por el sur de Yucatán, parte de Guatemala y Honduras entre los siglos III y XV. Los mayas desarrollaron un sistema de numeración propio.

1. A partir de los ejemplos que se exponen, ¿puedes decodificar el sistema de numeración maya? Inténtalo.



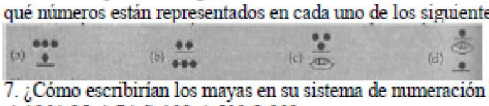

2. ¿Cuántos signos utilizaron para los números? ¿Cuáles son?

3. Qué significado tiene el siguiente signo?  ¿Por qué es importante?

4. Después de examinar la primera fila, Juan, un compañero vuestro, saca la conclusión de que este signo significa *mutiplicar por 20*. ¿Qué razones ha podido tener para obtener esta conjetura? Observa la representación en el sistema maya de los números 21 y 421. ¿Son estas representaciones consistentes con la conjetura de Juan?

5. ¿Cuáles son las normas que se siguen al escribir los números en el sistema de numeración maya?

6. Una vez que estés seguro de haber decodificado el sistema de numeración maya determina qué números están representados en cada uno de los siguientes apartados




7. ¿Cómo escribirían los mayas en su sistema de numeración los siguientes números?
a) 19 b) 25 c) 74 d) 109 e) 500 f) 903

# ANEXO 2. MATERIALES



Figura 1. Palillos



Figura2. Botones



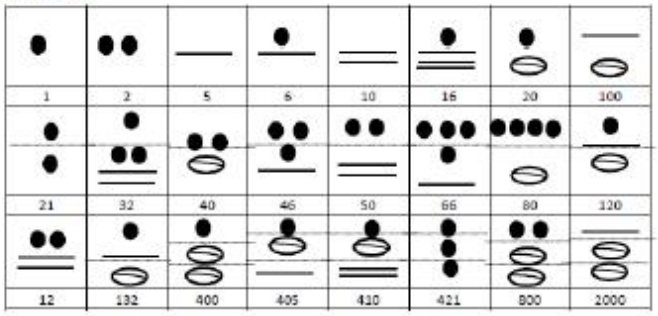
figura 4. Habas

# ANEXO 3. DOCUMENTO FINAL.

**Sistema de numeración maya**

La civilización maya se extendió por el sur de Yucatán, parte de Guatemala y Honduras entre los siglos III y XV.
Los mayas desarrollaron un sistema de numeración propio. Utiliza los botones, palillos, habas y plantillas para ayudarte en las

1. A partir de los ejemplos que se exponen,
2. ¿puedes decodificar el sistema de numeración maya? Inténtalo.

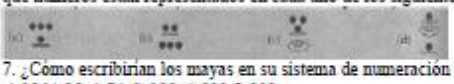



2. ¿Cuántos signos utilizaron para los números? ¿Cuáles son?

3. Qué significado tiene el siguiente signo?  ¿Por qué es importante?

4. Después de examinar la primera fila, Juan, un compañero vuestro, saca la conclusión de que este signo significa *mutiplicar por 20*. ¿Qué razones ha podido tener para obtener esta conjetura? Observa la representación en el sistema maya de los números 21 y 421. ¿Son estas representaciones consistentes con la conjetura de Juan?

5. ¿Cuáles son las normas que se siguen al escribir los números en el sistema de numeración maya?
6. Una vez que estés seguro de haber decodificado el sistema de numeración maya determina qué números están representados en cada uno de los siguientes apartados



7. ¿Como escribirían los mayas en su sistema de numeración los siguientes números?
a) 19 b) 25 c) 74 d) 109 e) 500 f) 903

Figura 4. Plantilla bases

# COMPRENSIÓN DE FRECUENCIAS Y REPRESENTACIONES ASOCIADAS A LAS TABLAS DE CONTINGENCIA

**Gustavo R. Cañadas,**
Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
**José M. Contreras,**
Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
**M. Magdalena Gea,**
Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
**Pedro Arteaga,**
Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

## RESUMEN

Las tablas de contingencia son un instrumento necesario en el trabajo de los profesionales de psicología y educación pero, sin embargo la investigación muestra dificultades en la emisión de juicios de asociación en estas tablas. Una posible explicación de estos errores es que los alumnos tengan dificultades en la comprensión de los distintos tipos de frecuencias involucradas en la tabla de contingencia y sus interrelaciones. En este trabajo se explora esta posibilidad, mediante un cuestionario pasado a una muestra de estudiantes, después de la enseñanza del tema.

**Nivel educativo**: Universitario

## 1. INTRODUCCIÓN.

Las tablas de doble entrada o tablas de contingencia constituyen un método usual de presentar la información estadística en la prensa o Internet, por lo que algunos autores (por ejemplo, Schield, 2006) incluyen la interpretación correcta de las mismas como un componente de la cultura estadística. Estas tablas tienen también interés como instrumento en el ámbito profesional; por ejemplo, en psicología se usan en las actividades de diagnóstico y evaluación psicológica, donde el especialista se enfrenta a diferentes síntomas que pueden estar asociados o no con una patología. Díaz y Gallego (2006) sugieren que, para facilitar el diagnóstico en estas situaciones, se deben organizar los datos en una tabla de contingencia, similar a la Tabla 1, donde *A* representaría una posible patología y *B* un síntoma, y donde, la emisión de un diagnóstico sería equivalente a evaluar si existe o no asociación entre las correspondientes variables. A partir de esta tabla es también posible definir algunos indicadores clínicos, habituales, que permiten mejorar el diagnóstico, entre otros: la proporción de verdaderos positivos (número de individuos con la enfermedad y el síntoma presente), la proporción de verdaderos negativos (número de individuos

sin la enfermedad y el síntoma ausente), sensibilidad y especificidad de la prueba.

Sería importante conseguir que los estudiantes que salen de las facultades de psicología interpreten correctamente las tablas de contingencia, tanto las similares a la Tabla 1, como otras de mayor número de filas y columnas, para poder calcular e interpretar los índices mencionados, así como otros que les ayuden a tomar decisiones en su vida profesional. A pesar de esta necesidad educativa, dichas tablas reciben poca atención en la enseñanza universitaria, pues se supone que su lectura e interpretación son habilidades adquiridas por estos estudiantes.

| | *A* | *No A* | Total |
|---|---|---|---|
| *B* | *a* | *b* | *a+b* |
| *No B* | *c* | *d* | *c+d* |
| Total | *a+c* | *b+d* | |

Tabla 1. Tabla de contingencia 2x2

Por otro lado, la tabla es, en realidad es un objeto semiótico complejo. Aunque todos los datos de las celdas *a, b, c, d* se refieren a frecuencias absolutas, cada una de ella de una doble condición (valores de su fila y columna), su significado no es equivalente. Una frecuencia alta en las celdas *a* (presencia del carácter *A*; presencia del carácter *B*) y la *d* (ausencia de *A*, ausencia de *B*) indicaría una asociación positiva entre las variables, mientras que una frecuencia alta en las otras dos celdas sugeriría una asociación negativa. Esto sin embargo no es fácilmente percibido por los estudiantes como se ha puesto de manifiesto en Estepa (1993). Además, de una celda dada (por ejemplo *a*). Se pueden deducirse según (Díaz y de la Fuente, 2005) tres frecuencias relativas diferentes:

- Frecuencia relativa doble: $\frac{a}{a+b+c+d}$
- Frecuencia relativa respecto a su fila: $\frac{a}{a+b}$
- Frecuencia relativa respecto a su columna: $\frac{a}{a+c}$

Más aún, podemos calcular las frecuencias relativas marginales de filas y columnas: $\frac{a+b}{a+b+c+d}$ y $\frac{a+c}{a+b+c+d}$

Supuestos equiprobables todos los sujetos de la misma, y aplicando la regla de Laplace como cociente entre casos favorables y posibles, podemos obtener una probabilidad diferente de cada una de las frecuencias relativas anteriores:

- Probabilidad de que ocurran simultáneamente *A* y *B*, $P(A\cap B)= \frac{a}{a+b+c+d}$
- Probabilidad condicional de *A*, sabiendo que ha ocurrido *B;* $P(A|B)= \frac{a}{a+b}$
- Probabilidad condicional de *B*, sabiendo que ha ocurrido *A;* $P(B|A)= \frac{a}{a+c}$

- Probabilidades simples de *A* y *B* $P(A)=\frac{a+c}{a+b+c+d}$ y $P(B)=\frac{a+b}{a+b+c+d}$

Todos estos objetos matemáticos coexisten y pueden ser confundidos por el alumno al realizar la interpretación de los datos de una tabla al estudiar la asociación entre las variables *A* y *B*. Según Falk (1986) muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A|B)* y *P(B|A)*, denominando a este error falacia de la condicional transpuesta. Este mismo error se puede dar al interpretar las frecuencias de la tabla.

El objetivo del trabajo fue evaluar la comprensión de los diferentes tipos de frecuencias y de sus representaciones en una muestra de estudiantes, después de la enseñanza del tema, pues los errores en este punto pueden influenciar sus juicios de asociación.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LA ENSEÑANZA.

La experiencia de enseñanza se llevó a cabo en dos grupos de la asignatura de "Técnicas de análisis en la investigación psicológica", dentro del primer curso del Grado de Psicología, que cuenta con 6 créditos (ECTS), y tiene carácter obligatorio. El tiempo dedicado a la enseñanza fue 4 sesiones de 1 hora de duración. Dos de dichas sesiones se llevó a cabo en el aula tradicional en grupo mediano (entre 45 y 55 alumnos por grupo) y se dedicaron a la presentación del tema, otras dos sesiones se utilizarían para prácticas en el laboratorio de informática en las cuáles cada alumno trabaja independientemente con el ordenador se utilizaría unas hojas de Microsoft Excel, y la última sesión para que realizaran un cuestionario. Se aseguro la validez mediante la presencia de observadores y la grabación en audio de las sesiones. Los profesores habituales de los cursos también asistieron a las sesiones. En lo que sigue se describen los resultados de la parte de evaluación relacionada con el tema 1 (frecuencias en la tabla de contingencia).

## 3. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO.

En el proceso de elaboración del cuestionario se han seguido una serie de recomendaciones psicométricas para asegurar la calidad de los instrumentos (Martínez Arias, 1995):

- En primer lugar, se delimitó el contenido a evaluar con este instrumento, a partir del análisis del proceso de estudio diseñado.
- Se especificó el formato de los ítems, decidiendo incluir ítems de Verdadero/ Falso, que permiten en poco tiempo acceder a la evaluación de muchos objetos matemáticos simultáneamente, aunque con menor profundidad.
- El número de ítems (6 ítems) se fijó teniendo en cuenta el tiempo disponible, el tipo de evaluaciones a las que estaban acostumbrados los estudiantes y que se deseaba cubrir el máximo de objetos matemáticos.
- Se procedió a la elaboración de una colección de ítems iniciales. A partir de ellos, mediante una serie de revisiones por parte de los autores del trabajo, así como de dos profesores del área de metodología de las ciencias del comportamiento, y analizando en cada una los contenidos

evaluados, se seleccionaron, posteriormente, los que habrían de constituir el cuestionario.

Algunos de los ítems y problemas son de invención propia y otros han sido tomados o adaptados de diferentes libros de texto o investigaciones previas. Una vez que se llegó a un cuestionario que cubría el contenido pretendido, se procedió a homogeneizar la redacción y a cambiar el contexto cuando éste no fuese familiar al alumno. Se hicieron pruebas de comprensión del enunciado, con algunos estudiantes de la misma especialidad, modificando la redacción en los casos que fue necesario.

En la redacción de los enunciados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos indicados por Brent (1989): Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta sea razonable para el sujeto y pueda darla, evitar hipótesis implícitas, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos.

Los ítems se componen de un enunciado inicial y varias opciones de verdadero o falso, cada una de las cuáles puede ser correcta o no. Se marcan en negrita la respuestas correctas. A continuación se analiza cada ítem

Ítem 1. La principal diferencia entre el diagrama de barras apilado y el adosado es:

a. El diagrama de barras apilado sólo se puede construir con frecuencias absolutas, mientras que el adosado se puede construir con frecuencias absolutas o porcentajes
**b. En el diagrama de barras apilado las frecuencias condicionales de cada valor de X para un mismo valor de Y se representan en una misma barra y en el adosado se representan una al lado de la otra.**
c. En el diagrama de barras apilado las frecuencias marginales de cada valor de X se representan en una misma barra y en el adosado se representan una al lado de la otra

Este ítem evalúa la comprensión que tienen los alumnos de las diferencias entre dos de las representaciones posibles de los datos de una tabla de contingencia: El diagrama de barras adosado y apilado. La respuesta correcta es la (b), pues el objeto de los dos diagramas es representar las distribuciones condicionales de una de las variables (por ejemplo la *X*) respecto a cada uno de los valores de la otra (en este caso la *Y*). Para responder la pregunta, el alumno, además de la construcción de gráficos, necesita conocer el concepto de frecuencia condicional. La respuesta (a) es incorrecta, pues ambos diagramas pueden construirse con frecuencias absolutas, relativas o porcentajes. Para detectar que la respuesta es falsa, el alumno ha de conocer los convenios de construcción de estos gráficos. La respuesta (c) es incorrecta, porque lo que se representa son frecuencias condicionales y no marginales. Para identificarla como incorrecta, el alumno ha de conocer la diferencia entre frecuencia marginal y condicional.

Ítem 2. En una tabla de contingencia, la suma de las frecuencias relativas marginales por filas es:

a. **Igual a la suma de frecuencias relativas marginales por columnas**
b. Igual al total de la muestra
c. **Igual a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra**

Este ítem evalúa la comprensión del alumno de la relación entre frecuencias relativas marginales por filas y columnas; el total de la muestra y la existente entre las frecuencias relativas marginales, y frecuencias absolutas marginales (Nortes, 1993). La respuesta (a) es correcta, pues una de las propiedades que tienen que cumplir las distribuciones relativas, incluidas las marginales, es que la suma de sus frecuencias sumen 1, por tanto la suma de las frecuencias relativas marginales por filas es igual a la suma de las frecuencias relativas marginales por columnas; la (c) es también correcta, ya que las frecuencias relativas marginales se calculan dividiendo las frecuencias absolutas marginales por el tamaño de la muestra. La respuesta (b) es incorrecta, pues el tamaño de la muestra se obtiene al sumar la distribución absoluta marginal, mientras que la suma de las relativas marginales es 1. El alumno tiene que distinguir entre distribuciones absolutas y marginales, para identificar que esta opción es falsa.

Ítem 3. Las frecuencias dobles absolutas y relativas están relacionadas entre sí mediante:

a. Las frecuencias condicionales.
b. Las frecuencias marginales.
c. **El tamaño de la muestra.**

Este ítem evalúa la comprensión de la relación de las frecuencias dobles absolutas y relativas en una tabla de contingencia (Nortes, 1993). Básicamente requiere recordar su formulación y cálculo. La respuesta correcta es la (c), ya que las frecuencias dobles relativas se obtienen al dividir las frecuencias dobles absolutas por el tamaño de la muestra. La respuesta (a) es incorrecta, ya que las frecuencias condicionales se obtienen dividiendo las frecuencias dobles absolutas ó relativas, por la frecuencia marginal absoluta ó relativa. La respuesta (b) es incorrecta, ya que las frecuencias marginales se obtienen sumando las frecuencias dobles absolutas ó relativas. El alumno tiene que establecer relaciones entre las frecuencias dobles absolutas, las frecuencias dobles relativas y las frecuencias marginales, para identificar que estas dos opciones son falsas.

Ítem 4. Para calcular las frecuencias relativas condicionadas es necesario:

a. **Las frecuencias absolutas dobles de la fila o columna por la que se condiciona.**
b. Las frecuencias relativas de la fila o columna por la que se condiciona y el total de la muestra.
c. **Las frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por la que se condiciona.**

Este ítem considera la relación de las frecuencias relativas condicionales con algunos componentes de la tabla de contingencia (Amón, 1993). Recordemos que los estudiantes tienen dificultad con las probabilidades condicionales, lo que puede extenderse a las frecuencias condicionales (Contreras, 2011). La respuesta (a) es correcta, ya que la condicional se obtendría dividiendo las frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por la que se condiciona. Para responder la pregunta, el alumno, tiene que conocer la relación entre las frecuencias absolutas y relativas, con las frecuencias condicionales: La (c), también es correcta, ya que cumple lo dicho anteriormente para a). La respuesta b) es incorrecta, pues no se requiere el uso del total de la muestra. El alumno tiene que buscar una relación entre frecuencias relativas condicionales y el total de la muestra, para identificar que esta opción es falsa.

Ítem 5. Las tablas rxc se pueden representar gráficamente en los gráficos:

a. Únicamente en el diagrama de barras apilado y el adosado.
b. Únicamente en el gráfico tridimensional y el diagrama de barras adosado.
**c. En los mismos gráficos que una tabla 2x2.**

Este ítem evalúa la comprensión de la relación del tamaño de la tabla de contingencia, con los distintos tipos de gráficos que se pueden utilizar. Una tabla *rxc* tiene la propiedad de poder subdividirse en subtablas 2x2 (Ato y López, 1996), así que podría considerarse la representación gráfica de una tabla *rxc* de un nivel superior que la representación de una tabla 2x2. La respuesta correcta es: la (c), ya que no existen unos gráficos específicos para las tablas 2x2, y otros gráficos para las tablas *rxc*, en ambos casos se pueden utilizar el diagrama de barras apilado, el diagrama de barras adosado y el gráfico tridimensional. Para responder la pregunta, el alumno, además de la construcción de gráficos, necesita conocer cuando se pueden aplicar estos gráficos. Las respuestas (a) y (b) son incorrectas.

Ítem 6. El objetivo de construir una tabla de contingencia es:

a. Resumir los datos de dos variables cuantitativas
**b. Resumir los datos de dos variables cualitativas**
**c. Resumir los datos de dos variables cualitativas, o bien numéricas con pocos valores diferentes**

Este ítem evalúa los conocimientos del alumno sobre el objetivo de estás tablas. Un concepto importante que el alumno tiene que tener claro son los tipos de variables (cuantitativo y cualitativo). Una respuesta correcta es la (b), ya que un objetivo es resumir los datos, de manera que se pueda trabajar con ellos, y este tipo de tablas se emplean para variables cualitativas. La respuesta (c) es también correcta, aunque el uso de las tablas es más generalizado en variables cualitativas. La respuesta (a) es incorrecta, pues la tabla no sería conveniente si la variable numérica tuviese muchos valores diferentes

# 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

En la enseñanza participaron 104 alumnos de Psicología, divididos en dos grupos: 51 alumnos en el primer grupo (8 hombres y 43 mujeres), y 53 alumnos en el segundo grupo (16 hombres y 37 mujeres). Todos ellos eran alumnos de segundo año y cursaban la asignatura. La mayoría tenía una edad de 19-20 años. El cuestionario se pasó como parte de la evaluación, respondiéndose individualmente. Las respuestas se codificaron y se analizaron para estudiar su distribución. En la Tabla 2 se resumen las respuestas, que analizamos a continuación para estudiar primeramente los resultados por ítems y a continuación comparar la dificultad relativa de los mismos. Recordemos que cada ítem se compone de tres apartados, de modo que el estudiante puede tener de 1 a 3 respuestas correctas.

| | Apartado | Correcto | Incorrecto | En blanco |
|---|---|---|---|---|
| Ítem 1 | a (Falsa) | 71 (75,5) | 14 (14,9) | 9 (9,6) |
| | b (Verdadera) | 42 (44,7) | 44 (46,8) | 8 (8,5) |
| | c (Falsa) | 50 (53,2) | 35 (37,2) | 9 (9,6) |
| Ítem 2 | a (Verdadera) | 53 (56,4) | 41 (43,6) | 0 (0) |
| | b (Falsa) | 61 (64,9) | 33 (35,1) | 0 (0) |
| | c (Verdadera) | 37 (39,4) | 57 (60,6) | 0 (0) |
| Ítem 3 | a (Falsa) | 76 (80,9) | 15 (16) | 3 (3,2) |
| | b (Falsa) | 73 (77,7) | 18 (19,1) | 3 (3,2) |
| | c (Verdadera) | 65 (69,1) | 26 (27,7) | 3 (3,2) |
| Ítem 4 | a (Verdadera) | 17 (18,1) | 74 (78,7) | 3 (3,2) |
| | b (Falsa) | 50 (53,2) | 40 (42,6) | 4 (4,3) |
| | c (Verdadera) | 34 (36,2) | 56 (59,6) | 4 (4,3) |
| Ítem 5 | a (Falsa) | 83 (88,3) | 3 (2,9) | 8 (8,5) |
| | b (Falsa) | 64 (68,1) | 22 (23,4) | 8 (8,5) |
| | c (Verdadera) | 59 (62,8) | 27 (28,7) | 8 (8,5) |
| Ítem 6 | a (Falsa) | 53 (56,4) | 40 (42,6) | 1 (1,1) |
| | b (Verdadera) | 51 (54,3) | 42 (44,7) | 1 (1,1) |
| | c (Verdadera) | 18 (19,1) | 75 (79,8) | 1 (1,1) |

Tabla 2. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en los ítems (n=94)

- Lo más sencillo en el ítem 1 fue reconocer que se puede usar diferentes tipos de frecuencias en los gráficos (opción a); fue más difícil diferenciar qué tipo de información se representa en las barras adosadas o apiladas (opciones b y c). En este sentido, estos alumnos no alcanzan el nivel de extracción de datos, que consiste en poner en relación un elemento de un eje de un gráfico con el de otro eje, en este caso leer la frecuencia asociada a un valor de la variable (Bertin, 1967).
- En el segundo ítem, donde relaciona las frecuencias relativas marginales con otros elementos (Nortes, 1993), lo más sencillo fue reconocer que la suma de las frecuencias relativas marginales por filas no es igual al total de la muestra, y si igual a las frecuencias relativas marginales por columna (opciones a y b); hubo más dificultad en ver que estas frecuencias son

iguales a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra (opciones c).

- En el tercer ítem se obtuvieron muy buenos resultados en todos sus apartados, de lo que se deduce que los estudiantes adquirieron la relación entre las frecuencias absolutas y relativas (Nortes, 1993). Lo más sencillo ha sido reconocer que no se pueden relacionar las frecuencias dobles absolutas y relativas mediante las frecuencias condicionales (opción a); seguido por reconocer que no se relacionan por las frecuencias marginales y que se relacionan por el tamaño de la muestra (opciones b y c), que tampoco les resultó demasiado difícil.
- Para el cuarto ítem sobre el calculo de las frecuencias relativas condicionales (Amon, 1993), da resultados contradictorios, con bastante diferencia de dificultad, según el apartado. Lo más sencillo ha sido reconocer que para el calculo de las frecuencias condicionales son necesarias las frecuencias relativas de la fila o columna por la que se condiciona y el total de la muestra (opción b); ha sido más difícil reconocer que pueden calcularse mediante las frecuencias absolutas dobles de la fila o columna por la que se condiciona o bien mediante las frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por la que se condiciona (opciones a y c).
- En el quinto ítem sobre gráficos (Ato y López, 1996), resultó muy sencillo, sobre todo reconocer que estas tablas se pueden representar en otros gráficos, aparte del diagrama de barras apilado y el adosado (opción a); ha sido un poco más difícil recordar gráficos aparte del tridimensional y el diagrama de barras adosado y reconocer que se pueden representar en los mismos gráficos que una tabla 2x2 (opciones b y c), pero tampoco les resulto demasiado difícil, ya que hay un porcentaje bastante alto de aciertos.
- Para el sexto ítem, los resultados son intermedios, por lo que bastantes alumnos parecen reconocer los objetivos en la construcción de una tabla de contingencia. Lo más sencillo ha sido reconocer que no se utilizan variables cuantitativas en la construcción de tablas de contingencia.

Al estudiar globalmente la dificultad relativa, fueron sencillas para los estudiantes saber que: las tablas *rxc* no se pueden representar únicamente en el diagrama de barras apilado y el adosado (ítem 5, apartado a); las frecuencias dobles absolutas y relativas no se relacionan mediante las frecuencias condicionales (ítem 3, apartado a); las frecuencias dobles absolutas y relativas no se relacionan mediante las frecuencias marginales (ítem 3, apartado b); reconocer que se puede usar diferentes tipos de frecuencias en los gráficos (ítem 1, apartado a). Hemos considera que es sencilla cuando aciertan más de 70 estudiantes.

Por el contrario resultaron difíciles las relativas a: que para el calculo de las frecuencias relativas condicionales es necesario sólo las frecuencias absolutas dobles de la fila o columna por la que se condiciona (ítem 4, apartado a); saber que el objetivo de construir una tabla de contingencia es resumir los datos de dos variables cualitativas, o bien numéricas con pocos valores (ítem 6, apartado c); que para el calculo de las frecuencias relativas condicionales es necesario las

frecuencias absolutas o relativas de la fila o columna por la que se condiciona (ítem 4, apartado c); y ver que la suma de las frecuencias relativas marginales por filas son iguales a la suma de las frecuencias absolutas marginales dividida por el total de la muestra (ítem 2, apartado c). Hemos considera que es difícil cuando aciertan menos de 40 estudiantes.

Otra indicación global del aprendizaje fue el número total de respuestas correctas por cada alumno, considerando cada opción de verdadero/falso como un ejercicio, y puntuando 1 punto por cada respuesta correcta. Mientras el valor medio teórico es 9 (mitad de las preguntas correctas) obtuvimos una puntuación media de 10,2 (desviación típica 2.4), algo superior a la teórica, pero todavía baja, teniendo en cuenta que se trata de conceptos básicos en el análisis de las tablas de contingencia. En la Figura 1 se presentan los resultados totales. La mediana (10) se encuentra por encima del valor esperado de la mediana (9) y el 75% de los estudiantes está por encima de este valor esperado. Sin embargo, todavía hay valores atípicos con una puntuación muy baja y un 25% con menos de la mitad de las respuestas correctas. Ello confirma nuestra opinión de que esta tabla es un objeto semiótico complejo y se debe prestar más atención a su enseñanza.

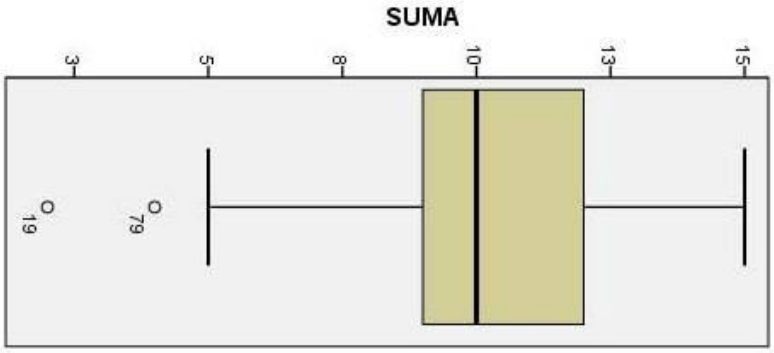



Figura 1. Gráfico de la caja de la puntuación total

# 5. CONCLUSIÓN

En la Actualidad hay a disposición del ciudadano toda clase de datos, muchos de los cuales se presentan en forma de tablas de contingencia, por lo que una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de comprender e interpretar este objeto matemático.

En el estudio realizado con alumnos de psicología se han obtenido dificultad en entender ciertos aspectos básicos de las tablas de contingencia en los cuales se debería tratar con mayor profundidad en futuras experiencias de aulas. Estas dificultades podrían extenderse a otras carreras donde se manejan estas tablas por necesidad en su campo, donde los estudiantes no alcanzasen un grado alto de comprensión de las mismas, incluso cuando se les han explicado de forma reciente como es nuestro caso.

Consideramos por tanto necesario profundizar el estudio de este tema en futuras investigaciones.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947, becas FPU-AP2009-2807 y FPI BES-2011-044684 (MCINN-FEDER), y al grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

## REFERENCIAS.

AMÓN, J. (1993). *Estadística para Psicólogos 2*, Pirámide.

ATO, M. y LÓPEZ, J. J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos*. Madrid: Sintesis Psicología.

BERTIN, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

BRENT, E. E. (1989). *Data collection selection: An expert system to assist in the selection of appropriate data collection procedures*. Versión 1.0. Columbia, Missouri: The Idea Works, Inc.

CONTRERAS, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, E. I. (2005). *Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada*. Biaix 24, 85, 91.

DÍAZ, J. y GALLEGO, B. (2006). *Algunas medidas de utilidad en el diagnóstico*. Revista Cubana de Medicina General Integrada, 22(1).

ESTEPA, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

FALK, R. (1986). *Conditional Probabilities: insights and difficulties*. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

GAL, I. (2002). *Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities*. International Statistical Review 70(1), 1-25.

MARTÍNEZ, R. (1995). *Psicometría: Teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid. Síntesis.

NORTES CHECA, A. (1993). *Estadística teórica y aplicada*. Barcelona: PPU.

SCHIELD, M. (2006). *Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates and percentages*. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

# GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN UNA SERIE DE LIBROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

**Pedro Arteaga**,
*Didáctica de la Matemática*, *Universidad de Granada*
**M. Magdalena Gea,**
*Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*
**José M. Contreras,**
*Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*
**Gustavo R. Cañadas,**
*Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*

## RESUMEN.

Los últimos diseños curriculares introducen la estadística en todos los ciclos de la educación primaria dentro del Bloque, "Tratamiento de la información, azar y probabilidad". Debido a la novedad del tema es importante para el profesor conocer los contenidos a trabajar en las aulas de primaria y también el tipo de tareas que pueden hacer los niños de estas edades. En este trabajo nos centramos en los gráficos estadísticos, analizando analizamos dicho contenido en los Decretos de enseñanzas mínimas para la educación primaria y la forma en que estos se interpretan en una serie de libros de Educación primaria.

**Nivel educativo**: Formación de profesorado de Educación Primaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En la sociedad actual, se hace necesaria la formación de ciudadanos estadísticamente cultos (Watson, 2006), debido en parte a la gran cantidad de información estadística presente tanto en los medios de información como en la vida profesional de muchas personas. Según Gal (2002) se entiende por cultura estadística la unión de dos competencias relacionadas: "a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos y b) discutir o comunicar opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante" (pp. 2-3).

Mucha de la información estadística presente en nuestra vida diaria es presentada a través de gráficos estadísticos, por lo que una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de leer críticamente los gráficos que encuentra en la prensa, Internet, medios de comunicación, y trabajo profesional. Esto supone no sólo la lectura literal del gráfico, sino poder identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada (Schield, 2006). Asimismo debiera conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo.

Los gráficos además de utilizarse para comunicar información, forman parte esencial en la organización y análisis de datos, al tratarse de un instrumento de

transnumeración, es decir, una forma básica de razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) que produce nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, al pasar de una lista de datos desordenada a un histograma, se visualiza la moda y se percibe la simetría o asimetría de la distribución.

Esta importancia ha quedado patente en las directrices curriculares tanto a nivel internacional (NCTM, 2000) como en los Decretos de enseñanzas mínimas para la educación primaria en España (MEC, 2006), donde se introducen los gráficos estadísticos desde primer ciclo. Por todo ello se hace necesaria la formación estadística de futuros profesores de educación primaria.

En este trabajo analizamos la presencia del contenido de gráficos estadísticos en las directrices curriculares oficiales españolas (MEC, 2006) y cómo se trabaja dicho contenido en una serie de libros de matemáticas de educación primaria, analizando tanto los distintos tipos de gráficos que se proponen como las diferentes actividades a realizar con los gráficos. Finalizamos con unas implicaciones para la formación de profesores y unas conclusiones generales.

## 2. LOS GRAFICOS EN EL DECRETO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El incremento de los contenidos de estadística que se recomiendan en la escuela primaria, se hace patente en los Decretos de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006). En dichos Decretos se dispone que la Educación primaria tiene carácter obligatorio y gratuito y comprende seis cursos organizados en tres ciclos de dos cursos cada uno, debiéndose incorporar los alumnos al primer curso el año natural en el que cumplan seis años. Una de las áreas de conocimiento obligatorias que se impartirán en los tres ciclos es la de Matemáticas, y se observa que desde primer ciclo se incluye dentro de dicha área un nuevo Bloque (Bloque 4) llamado Tratamiento de la información, azar y probabilidad. A continuación analizamos los contenidos que se muestran en relación a los gráficos estadísticos, clasificados según el ciclo educativo:

- Primer Ciclo: Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos a los niños.
- Segundo Ciclo: Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
- Tercer Ciclo: Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos.

En relación a estos contenidos se indica que:

"Los contenidos adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos

actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios" (MEC 2006 p. 43096).

Se observa que, además de los contenidos tradicionales de estadística y de iniciar antes la enseñanza de los gráficos estadísticos, hay también un cambio en el enfoque, recomendándose el desarrollo del razonamiento estadístico de los niños y la presentación de la estadística como un instrumento para resolver problemas y no sólo como un conjunto de técnicas. Uno de los objetivos concretos es utilizar las técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones del entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

Con respecto a los gráficos estadísticos, en el primer ciclo se comienza con interpretaciones de determinados elementos de un gráfico sencillo relacionado con fenómenos cercanos a los niños y progresivamente se pasa a los contenidos del tercer ciclo en los que se estudiarán distintos tipos de gráficos estadísticos y se deberá conseguir que los niños aprecien la importancia que tiene el poder valorar críticamente informaciones que son presentadas a través de gráficos. Además se manifiesta que la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad.

Dentro del bloque de Tratamiento de la información, azar y probabilidad se proponen los siguientes criterios de evaluación:

- Primer Ciclo: Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos. Con este criterio se trata de valorar la capacidad de interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares y verificar la habilidad para reconocer gráficamente informaciones cuantificables. (MEC, 2006, p. 43098).
- Segundo Ciclo: Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado de forma de tabla o gráfica. Este criterio trata de valorar la capacidad para realizar un efectivo recuento de datos y representar el resultado utilizando los gráficos estadísticos más adecuados a la situación. Es asimismo motivo de evaluación la capacidad para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares. (MEC, 2006, p. 43100).
- Tercer Ciclo: Además de repetir el criterio anterior, se incluye el siguiente: Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada. (MEC 2006, p. 43101).

# 3. LOS GRÁFICOS EN UNA SERIE DE TEXTOS DE PRIMARIA

El análisis realizado de las orientaciones curriculares muestra la importancia dada a los gráficos en la educación primaria. Un siguiente nivel de análisis es el de los libros de texto que, en última instancia, concretizan el currículo y proporcionan a los profesores apoyo en su labor docente. Desde las orientaciones curriculares al aula, hay toda una labor que los autores de los textos realizan de secuenciación de contenidos y contextualización en actividades que les den sentido.

Respecto a las orientaciones sobre cómo poder introducir los distintos gráficos estadísticos en la escuela, Ragencroft (1992) afirma que es muy importante estudiar en el orden en qué deben introducirse estos en las aulas. Los nuevos libros de texto tratan de adaptarse a las directrices de los Decretos de Enseñanzas Mínimas y comienzan a incluir actividades relacionadas con los gráficos estadísticos desde el primer ciclo.

En esta sección analizaremos una serie completa de textos de primaria (Santillana, colección "Un paso más"), para mostrar un ejemplo de la forma en que los contenidos de los Decretos de Educación Primaria han sido interpretados por los autores. Aunque, debido a que sólo analizamos una serie es difícil generalizar los resultados, nos parece importante mostrar un ejemplo del material con que los futuros profesores de Educación Primaria podrían encontrarse en su futuro trabajo profesional, al tratar de explicar el tema de los gráficos estadísticos. Los textos analizados son los correspondientes a los niveles comprendidos desde primero a sexto de Educación Primaria, cuyos autores son Mercedes Garín y Magdalena Rodríguez y fueron publicados en el año 2006.

## 3.1. CONTENIDOS Y TIPOS DE ACTIVIDADES.

Para desarrollar una buena comprensión gráfica por parte de los estudiantes, Wu (2004) propone atender a las siguientes componentes: lectura de gráficos, construcción gráfica, interpretación gráfica y evaluación de gráficos estadísticos. Esta última componente la justifica debido al incremento del uso de los gráficos estadísticos en los distintos medios de comunicación, lo que hace necesaria una postura crítica frente a los mismos.

A continuación mostramos los contenidos relacionados con los gráficos estadísticos, observando también el orden que se propone la introducción de los gráficos y los distintos tipos de actividades.

- Primer curso. En el primer curso se trabajan gráficos sencillos de barras, con actividades de lectura, construcción e interpretación. Se trabaja también con la lectura de pictogramas.
- Segundo curso. Se introducen gráficos de barras dos características, es decir gráficos bivariantes. Se continúa el trabajo con gráficos de barras sencillos y pictogramas a través de actividades de lectura e interpretación. Se trabaja también el paso de gráficos de barras sencillos a tablas.
- Tercer curso. Los gráficos trabajados son los siguientes; gráficos de barras de una característica, gráficos de barras de dos características, Gráficos de puntos. Estos últimos se introducen a partir del trabajo con coordenadas cartesianas. Las actividades son del mismo tipo que las de los cursos previos.

- Cuarto curso. Se siguen trabajando con gráficos de barras hasta de tres características y pictogramas a través de actividades de lectura, representación, interpretación y cambio de representación. Se continúa con el trabajo con coordenadas cartesianas y gráficos de puntos más elaborados. Se introducen los gráficos de líneas.
- Quinto curso. Se continúa con el trabajo con gráficos de barras de dos y tres características a través de actividades similares al curso anterior. Introducción de gráficos de líneas de dos características y trabajo con pictogramas.
- Sexto curso. Se trabaja con gráficos lineales de dos o tres características. Pictogramas. Se introducen los Histogramas, pirámides de población y gráficos de sectores con actividades de construcción, lectura, interpretación y cambio de representación.

En la tabla 1 podemos observar un resumen del tipo de gráficos y las distintas actividades que se trabajan en cada uno de los cursos. Como podemos comprobar los primeros gráficos que se introducen en la colección de libros analizada son los gráficos de barras y los pictogramas, trabajando dichos gráficos casi a lo largo de todos los cursos, incrementando su complejidad, por ejemplo aumentando el número de variables representadas en los gráficos de barras.

Se puede observar también que, desde primer curso se incluyen actividades sencillas de lectura de gráficos de barras y pictogramas y también alguna actividad de construcción e interpretación. En segundo curso se incluyen actividades de cambio de representación de gráfico a tabla, este tipo de tareas es importante ya que según Wild y Pfanchuch (1999), el paso de un tipo de representación a otra proporciona nueva información por medio de un proceso de *transnumeración*.

El tipo de gráficos y las actividades se van haciendo más complejos en tercer curso, donde ya se incluyen los gráficos de barras dobles y gráficos de puntos a través de actividades tanto de representación o construcción, lectura e interpretación. También se introduce la representación de puntos mediante sus coordenadas cartesianas para así llegar a los gráficos de puntos. Los gráficos lineales se incluyen desde cuarto curso, ampliando el número de actividades de todos los gráficos ya conocidos, con lectura, interpretación y cambio de una representación a otra o a representación tabular.

En quinto curso se inician actividades en las que el alumno ha de pasar de un gráfico de barras a un pictograma, lo que supone un cambio en relación a las actividades de cursos anteriores en las que los cambios de representación se daban de tablas a gráficos y viceversa. Se continúan con actividades de paso de tabla a distintos gráficos. Se continúa con ejercicios de construcción, lectura e interpretación de gráficos.

En sexto curso se continúa con el tipo de actividades de cursos anteriores pero con la diferencia de que se trabajan gráficos de complejidad superior como los histogramas, pirámides de población y diagramas de sectores. Se tratan de gráficos de complejidad considerable. Autores como Ragencroft (1992) ponen de manifiesto que es importante elegir en qué orden son introducidos los distintos tipos de gráficos, aunque haya discrepancia entre distintos autores. Uno de los mayores desafíos es el uso de áreas para representar frecuencias en gráficos como los histogramas y diagramas de sectores, podemos observar que en la

serie de libros analizada se ha tenido en cuenta dicha dificultad dejando para el final de la etapa los diagramas de sectores.

| | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G. Barras | Leer, Completar, Interpretar | Leer, interpretar, completar, pasar a tabla | Leer, representar, interpretar | Pasar a gráfico lineal | | |
| G. Barras dobles | | Leer, interpretar | Leer, interpretar | Representar. Pasar de tabla a gráfico | Pasar a gráfico lineal doble | |
| G. Barras triples | | | | Leer, interpretar, completar | Interpretar, Pasar de tabla a gráfico | |
| Pictograma | Leer. | Leer, interpretar | | Pasar de tabla y de gráfico de barras a pictograma | Pasar de tabla y gráfico de barras a pictograma | |
| Pictogramas múltiples | | | | | | Leer, interpretar, pasar tabla a pictograma |
| Coordenadas cartesianas; gráficos puntos | | | Leer representar puntos; escribir las coordenadas | Leer, identificar puntos y coordenada | | |
| Gráficos lineales | | | | Leer, construir, interpretar, pasar a tabla | | |
| Gráficos lineales dobles o triples | | | | | Leer, construir, interpretar, pasar de tabla a gráfico y viceversa | Leer, interpretar, pasar de tabla a gráfico y viceversa |
| Histogramas | | | | | | Leer, pasar a tabla y viceversa |
| Pirámides de población | | | | | | Leer, interpretar, pasar de tabla a pirámide |
| Gráfico de sectores | | | | | | Leer, construir interpretar, pasar a tabla. |

Tabla 1. Tipo de gráficos y actividades incluidos en la serie "Un paso más" según curso académico

Como se puede comprobar en la tabla 1, a lo largo de toda la serie "Un paso más", encontramos que se hace énfasis en actividades tanto de lectura, interpretación como construcción de gráficos, lo que según Wu(2004) es fundamental para el desarrollo de comprensión gráfica por parte de los alumnos.

En relación con la evaluación de gráficos estadísticos, según Watson(2006) es importante trabajar con las escalas de los gráficos estadísticos ya que a través de ellos se puede manipular la información representada, además de ser uno de

los componentes de los gráficos causa dificultades a los estudiantes (Ragengroft, 1992). En este sentido, en los libros analizados la escala viene impuesta en el libro y hubiese sido importante actividades en las que los propios alumnos pudiesen tomar sus propias decisiones en la elección de las escalas.

## 3.2. ANÁLISIS DE ALGUNAS ACTIVIDADES.

A continuación mostramos algunos ejemplos concretos analizados en los textos, podemos observar que en el primer curso los gráficos son muy rudimentarios, aunque se dan tareas muy completas como la mostrada en la figura 1, dónde los alumnos además de realizar procesos de conteo para completar la construcción de un gráfico de barras, tienen que interpretar la información representada para responder a unas preguntas en las que se requiere que los estudiantes realicen comparaciones entre los datos representados.

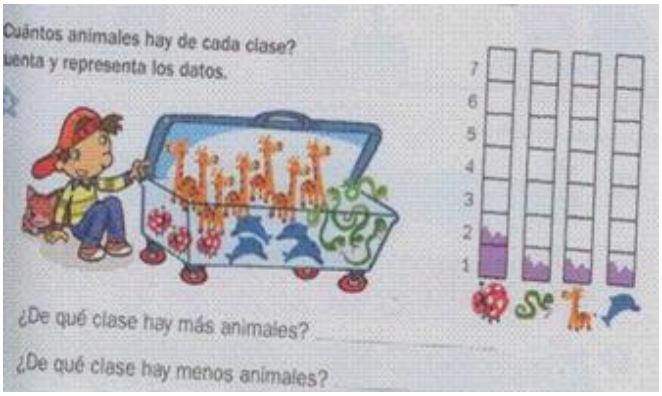



Figura 1. Actividad de construcción, lectura e interpretación de gráficos (Santillana, serie "Un paso más", 1º curso, p.107)

A lo largo de las actividades propuestas para el segundo curso, destacar que se incluyen actividades de lectura e interpretación de gráficos de barras dobles como se muestra en la figura 2. La interpretación del gráfico se da cuando el niño ha de responder preguntas como "¿Cuál es la clase en la que han ido más niños a la playa?", ya que para responder correctamente han de leer primero los datos mostrados en el gráfico, sumar todos los datos para cada una de las clases y por último realizar una comparación, es decir interpretar la información.

Destacar como novedad en 3º curso la introducción de actividades relacionadas con el uso de coordenadas cartesianas y la lectura e interpretación de gráficos de puntos. Una de las novedades destacables durante los cursos 4º y 5º es el trabajo con cambio de representaciones gráficas, tanto de representaciones univariantes como bivariantes.

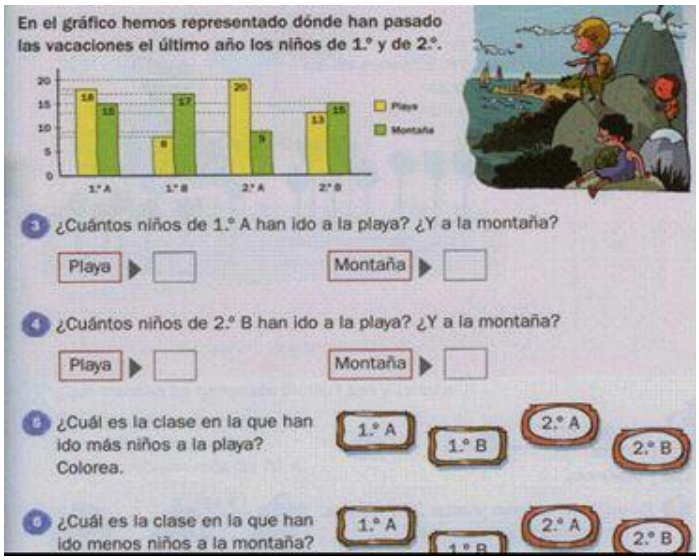



Figura 2. Actividad de lectura e interpretación de gráficos (Santillana, serie "Un paso más", 2º curso, p.28)

Observamos la figura 3 que muestra una actividad propuesta en 5º curso en la que los estudiantes han de cambiar de representación, en este ejemplo concreto han de pasar de un diagrama de barras dobles a un gráfico de líneas doble, además de tener que responder a preguntas que implican tanto la lectura como la interpretación de ambos gráficos.

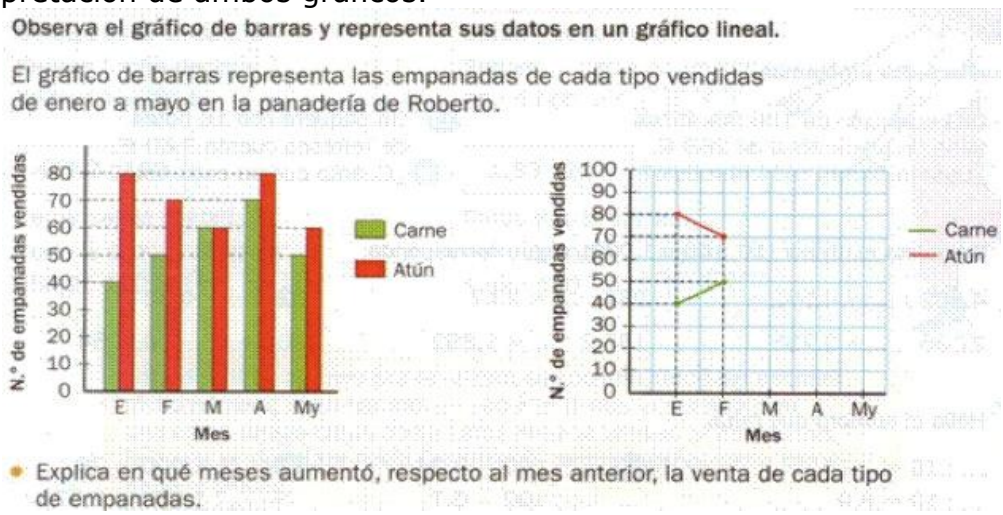



Figura 3. Actividad de lectura e interpretación de gráficos y paso de un gráfico a otro (Santillana, serie "Un paso más", 5º curso, p.126)

En la serie "Un paso más", podemos observar que además de los gráficos ya trabajados en los anteriores niveles, en sexto curso introduce las pirámides de población como se muestra en la figura 4. Las pirámides de población son gráficas notablemente complejas, pues representan dos distribuciones en un mismo gráfico, además de tener la dificultad añadida de que cada categoría se refiere a un intervalo de valores y no a valores aislados.

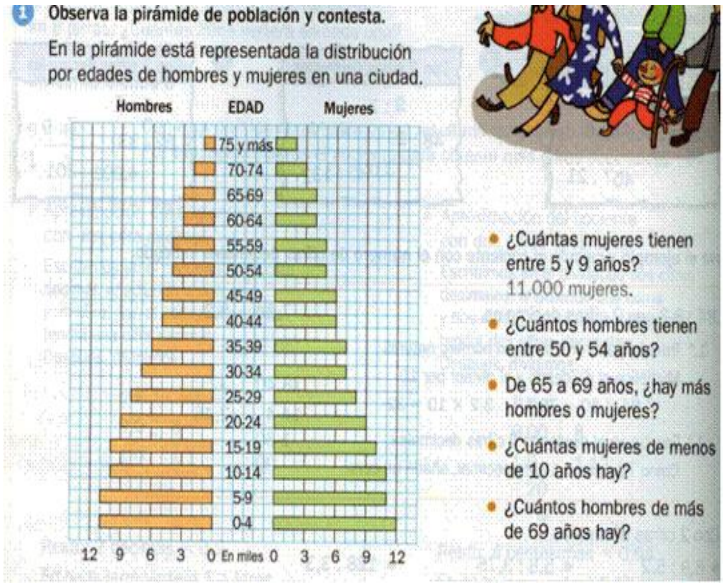



Figura 4. Actividad de lectura e interpretación de una pirámide de población (Santillana, serie "Un paso más", 6º curso, p.128)

Destacar también la introducción en sexto curso la introducción de diagramas de sectores (figura 5), en este tipo de representaciones los estudiantes han de representar las frecuencias mediante áreas y no mediante longitudes. El cálculo de amplitud de los sectores, además supone un ejercicio en el manejo de las proporciones y pone en relación datos estadísticos, frecuencia, proporcionalidad, amplitud angular, área y sector circular. Ragencroft (1992) indica que el trabajo con gráficos de sectores puede utilizarse en la transición de representar las frecuencias con las alturas de las barras a representarlas con áreas en los histogramas, pero destaca también que muchas veces el trabajo con estos gráficos se aplaza debido a la dificultad que parece tener el calcular y dibujar ángulos.

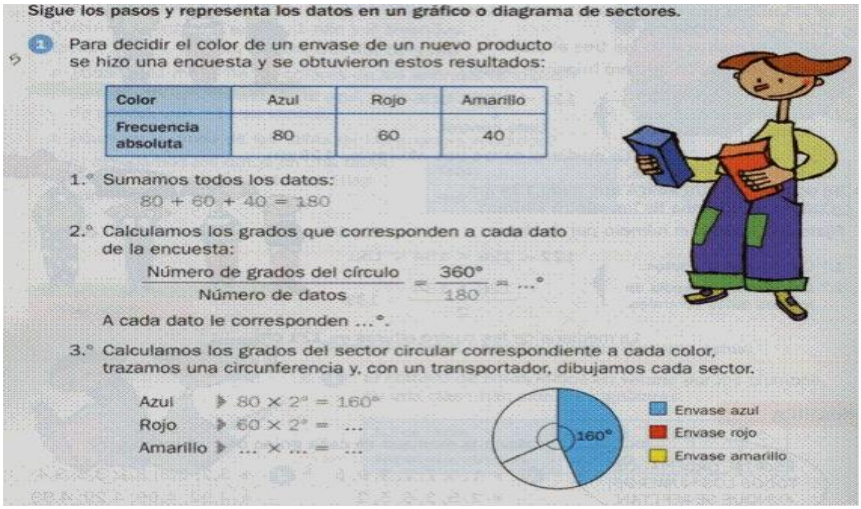



Figura 5. Actividad construcción gráfico sectores (Santillana, serie "Un paso más", 6º curso, p.128)

Una vez realizado el análisis de las actividades, se concluye que hay una gran variedad de actividades comprendiendo distintos componentes que son parte esencial para el desarrollo de una buena comprensión gráfica (Wu, 2004), trabajándose la construcción, lectura e interpretación de distintos gráficos.

# 4. CONCLUSIONES: IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE PRIMARIA

Debido al actual incremento de los contenidos de estadística en la escuela primaria, se hace necesario preparar a los futuros profesores, tanto en lo que respecta al conocimiento estadístico como al conocimiento didáctico de su enseñanza. Además la frecuente aparición de información estadística en los medios de comunicación, especialmente en forma de gráficos y tablas, hacen que sea cada vez más necesaria la formación de personas estadísticamente cultas.

A lo largo de este trabajo mostramos como una serie de libros de educación primaria afronta los nuevos retos de la educación primaria en relación a la estadística y en particular a los gráficos estadísticos. Dicho análisis pone de manifiesto que la variedad de actividades y la complejidad de algunos de los gráficos trabajados, hace necesaria una formación específica de los futuros profesores de educación primaria en lo que respecta a los gráficos estadísticos, para que puedan afrontar con éxito la enseñanza de dicho tema en un futuro.

# REFERENCIAS.

GAL, I. (2002). *Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities.* International Statistical Review. 70(1), 1-25

MEC (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 7 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria.*

NCTM (2000). *Principles and standars for school mathematics*.Reston, VA:Author.

RAGENCROFT, M. (1992). *Le representazioni grafiche. Sviluppare una progresslone del lavoro.* Induzioni, 4, 1-3.

SCHIELD, M. (2006). *Statistical literacy survey analysis: Reading graphs and tables of rates percentages.* En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Cape town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/iase.

WATSON, J.M. (2006). *Statistical Literacy at School: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

WILD C. Y PFANNKUCH, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry*. International Statistical Review, 67(3), 223-265.

WU, Y. (2004). *Singapore secondary school student´s understanding of statistical graphs.* Trabajo presentado en el 10th International Congress on Mathematics Education. Copenhagen, Dinamarca.

# PATRONES, COMUNICACIÓN Y REFLEXIÓN EN MATEMÁTICAS

**Amparo Govea Fontanilla**,
Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla
**Inmaculada Otero Mateos,**
Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla

## RESUMEN.

Con este trabajo pretendemos mostrar un tipo de materiales que puedan resultar más o menos novedosos por los contenidos tratados pero más aún por los objetivos que se persiguen, en tres áreas de habilidades matemáticas distintas. Pero es en la manera de evaluar estas tareas dónde encontramos su principal novedad. Esto es, no se trata de meros trabajos de ampliación o profundización ajenos a la materia o tal vez solo para alumnos con altas capacidades en nuestra asignatura, sino que forman parte de la nota trimestral de los alumnos saliéndose en gran medida de lo que suele ser habitual en nuestras aulas, pero acercándose desde una perspectiva muy interesante al desarrollo de las competencias básicas y a la introducción de patrones y modelos matemáticos en edades tempranas.

**Nivel educativo:** Aunque los ejemplos son de 3º de la ESO las ideas son aplicables a toda la ESO.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Presentamos en este trabajo una colección de actividades relacionadas con tres áreas de habilidades inherentes al desarrollo del pensamiento matemático: la investigación de patrones, la comunicación matemática y la reflexión. Son actividades reales, desarrolladas con alumnos de 3º de la ESO del Colegio de San Francisco de Paula de Sevilla ( http://www2.sfpaula.com/ ) y que constituyen parte de su nota en la evaluación trimestral (es este un elemento diferenciador puesto que no son ciertas tareas extras para algunos alumnos, sino que tienen un peso real y específico en la nota trimestral de todos los alumnos).

Todas ellas están imbuidas del espíritu y metodología que promueve el Programa de Años Intermedios (PAI) de la Organización del Bachillerato Internacional (OBI, http://www.ibo.org/es/), adaptadas a nuestro enfoque pedagógico como colegio e inmersas en el desarrollo de los temarios oficiales españoles. (Somos miembros de esta organización desde 1997 y

en el 2009 fuimos autorizados para impartir además el Programa del Diploma para alumnos de Bachillerato).

A veces estas tareas están íntimamente ligadas a los contenidos desarrollados en los programas y sirven para afianzarlos desde otras perspectivas, a veces se salen de los contenidos oficiales enriqueciendo aún más sus conocimientos de la Historia de las Matemáticas, por ejemplo, o la adquisición de destrezas más allá de las básicas.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRES ÁREAS Y DE LOS OBJETIVOS PERSEGUIDOS.

La primera de las áreas trabajadas es la **Investigación de patrones**, una primera aproximación a la obtención de modelos y a la formalización en términos matemáticos de los fenómenos que siguen alguna pauta.

*"La investigación de patrones permite a los alumnos experimentar el placer y la satisfacción del descubrimiento matemático. Mediante el uso de investigaciones matemáticas, los alumnos tienen la oportunidad de aplicar conocimientos matemáticos y técnicas de resolución de problemas, generar y analizar información, encontrar relaciones y patrones, y describirlos en términos matemáticos como reglas generales proporcionando justificaciones o pruebas.*

*Al final de cada curso, cuando se investiguen problemas tanto teóricos como de la vida real, el alumno debe ser capaz de:*

- *seleccionar y aplicar las técnicas matemáticas de resolución de problemas y de investigación adecuadas*
- *reconocer patrones*
- *describir patrones como relaciones o reglas generales*
- *extraer conclusiones coherentes con los hallazgos*
- *justificar o demostrar reglas generales y relaciones matemáticas*." (Guía de Matemáticas, OBI).

Las otras dos áreas mencionadas más arriba solemos trabajarlas conjuntamente, en una misma tarea o actividad, pues por sus propios objetivos son fácilmente aplicables a un mismo tipo de proyecto casi siempre íntimamente relacionados con situaciones reales.

La **Comunicación en matemáticas** está ligada a las posibilidades de las matemáticas como lenguaje universal.

*"Se espera que los alumnos utilicen el lenguaje matemático adecuadamente al comunicar las ideas, los razonamientos y los hallazgos, tanto de forma oral como escrita.*

*Al final de cada curso el alumno deberá ser capaz de comunicar las ideas, los razonamientos y los hallazgos demostrando que:*

- *utiliza el lenguaje matemático adecuado (notación, símbolos, terminología) en explicaciones tanto orales como escritas*

• *utiliza diferentes formas de representación matemática (fórmulas, diagramas, tablas, cuadros, gráficas y modelos)*
• *pasa de una forma de representación a otras.*

*Se anima a los alumnos a elegir y utilizar las TIC apropiadas, cuando dispongan de ellas, para mejorar la comunicación de sus ideas matemáticas*". (Guía de Matemáticas, OBI).

En la **Reflexión en matemáticas** acercamos al alumno al análisis de sus hallazgos, del propio proceso, de las múltiples estrategias y a la valoración del error como un elemento más de aprendizaje y comprensión.

*"Al final de cada curso los alumnos deberán ser capaces de:*
• *explicar si sus resultados tienen sentido en el contexto del problema*
• *explicar la importancia de sus hallazgos*
• *justificar el grado de precisión de sus resultados, cuando corresponda*
• *sugerir mejoras para el método cuando sea necesario."* (Guía de Matemáticas, OBI).

# 3. LA EVALUACIÓN: UN ELEMENTO DIFERENCIADOR.

Estas tres áreas de desarrollo de habilidades, destrezas y competencias básicas matemáticas, son para nosotros tres de los cinco criterios de evaluación de nuestra materia, con un peso total dentro de la misma del 30%.

Lo que distingue la evaluación de este tipo de tareas que miden la adquisición paulatina de destrezas es que la calificación sumativa se emite al final del proceso, es decir, previamente a la emisión de la nota que entrará a formar parte de la evaluación del alumno se desarrolla al menos una actividad similar, orientadora, preparatoria, que se evaluará formativamente. Esta evaluación formativa permite informar al alumno de sus debilidades y fortalezas y ofrecerle el feedback necesario para que mejore y alcance los niveles adecuados antes de enfrentarse a la tarea final del proceso de la que emitiremos una calificación que sí contará en su expediente.

Además, la calificación se emite utilizando bandas de calificación o niveles de descriptores que marca la propia Organización y que debemos adaptar y reformular para cada actividad planteada según nuestros propios criterios como colegio. Se puede ver un ejemplo de estas rúbricas adaptadas a las distintas actividades en los casos que recogemos más abajo.

# 4. UN EJEMPLO DE PATRONES: "LA ESCITALA ESPARTANA"

## 4.1. OBJETIVO:

Esta actividad no está conectada de forma directa con ninguna lección del temario, aunque de forma tangencial puede relacionarse con el tema de "Sucesiones y Progresiones".

Con ella se pretende conseguir que los alumnos desarrollen la habilidad del reconocimiento de patrones matemáticos que es difícil de adquirir mediante los ejercicios que tradicionalmente se desarrollan en el aula, básicamente de cálculo.

Estuvo enmarcada dentro de otras actividades relacionadas con la Criptografía: una sesión inicial en la que se habló del cifrado de César, el visionado de documentales sobre la máquina Enigma y la recomendación de la lectura del libro Susana Mataix, *Lee a Julio Verne: El amor en tiempos de Criptografía*, Rubes, 2002.

## 4.2. METODOLOGÍA:

Esta actividad se realizó en tres grupos de 3º ESO (88 alumnos). En una primera fase se les planteó a los alumnos una actividad formativa que se desarrolló en dos sesiones de una hora cada una:

En la primera se realizó una breve introducción a la historia de la Criptografía y se hizo un ejemplo práctico (el profesor explicó el método y los alumnos lo aplicaron individualmente mientras el profesor iba por la clase resolviendo dudas).

En la segunda sesión se le planteó a los alumnos una actividad similar que debía ser resuelta en clase de forma individual. A continuación se hizo una puesta en común de los resultados y se hizo una corrección cruzada del ejercicio. Se evaluó teniendo en cuenta los descriptores que se adjuntan.

En una segunda fase, tras haber comprobado el profesor que la técnica había sido suficientemente asimilada, se les puso una prueba similar, esta vez evaluada mediante una nota sumativa. Esta segunda fase se desarrolló en una sola sesión de una hora de duración.

Para realizar la actividad los alumnos usaron los siguientes materiales: cilindros de distintos grosores (pueden servir barras de pegamento), papel, regla y tijeras.

## 4.3. COMENTARIOS:

Fue una actividad interesante para los alumnos desde un primer momento, al tratarse de un tema novedoso para ellos, conectado con distintos momentos de la Historia. Este interés por su parte hizo que los alumnos estuvieran motivados y receptivos, consiguiendo muy buenos resultados.

## 4.4. DESARROLLO:

### 1ª SESIÓN: INTRODUCCIÓN TEÓRICA Y EJEMPLO

A los alumnos se les dio un resumen de la evolución histórica de la Criptografía sobre el que haremos algunos comentarios en la exposición.

| Nº orden de la letra | Orden/fila | Nº fila |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 |
| 6 | 2 | 3 |
| 7 | 3 | 1 |
| 8 | 3 | 2 |
| 9 | 3 | 3 |
| 10… | 4… | 1… |

Vamos a suponer que hemos enrollado la tira de papel dando nueve vueltas alrededor de la escitala y hemos escrito 3 líneas. Por tanto, al desenrollar vemos 27 letras, de tal forma que:

Luego, en este caso, el patrón en cuanto a su posición en el mensaje cifrado es:

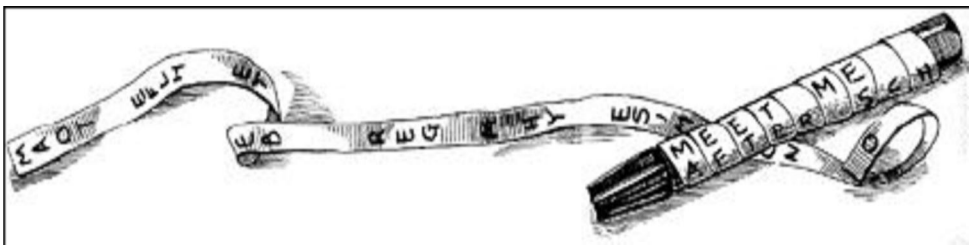
Nº letra= 3(nº columna -1)+ nº fila

Este tipo de criptograma se llama de transposición, porque siempre salta un número fijo de posiciones, es decir, además del anterior, existe otro patrón que, expresado como término general de una sucesión recurrente es:

Letra en posición (n +1)= Letra en posición n + 3

Para resolverlo sin tener la escitala hay que hacer una cuadrícula rectangular, escribiendo el texto cifrado en columnas verticales hasta que en horizontal aparezca un mensaje. Hay que ir probando con el número de filas hasta obtener un resultado lógico.

**EJEMPLO**



El mensaje cifrado que nos han mandado es una tira de papel en la que aparece la siguiente secuencia de letras:

LTEOAUICRÑIEACOSNTES

Vamos a ir probando con distintas cuadrículas, empezando por una de dos filas:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | E | A | I | R | I | A | O | N | E |
| T | O | U | C | Ñ | E | C | S | T | S |

Como vemos, no tiene sentido en horizontal. Pasamos a una cuadrícula de tres filas:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| L | O | I | Ñ | A | S | E |
| T | A | C | I | C | N | S |
| E | U | R | E | O | T | |

Tampoco tiene sentido. Pasamos a una de cuatro filas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| L | A | R | A | N |
| T | U | Ñ | C | T |
| E | I | I | O | E |
| O | C | E | S | S |

Intentamos ahora con una de cinco filas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| L | U | I | S |
| T | I | E | N |
| E | C | A | T |
| O | R | C | E |
| A | Ñ | O | S |

Efectivamente, el texto claro es: "Luis tiene catorce años". Vemos que en todos los casos se salta cinco posiciones. Para comprobar el patrón, usamos ahora la expresión:

Nº letra= 5(nº columna -1)+ nº fila

Por ejemplo: la letra que aparece en el lugar 10º (Ñ) está en la 5ª fila en 2ª posición. Igualmente, su patrón de descodificación es :

Letra en posición (n +1)= Letra en posición n + 5

## 2ª SESIÓN: ACTIVIDAD PROPUESTA

Te ha llegado el siguiente texto cifrado:

LTENNALAALEEROCELSLDLISUEBEA

Debes tener en cuenta que está cifrado según la técnica de la escitala espartana y que en este mensaje aparece un hueco que hay que dejar. Ahora, contesta a las siguientes preguntas:

a) Halla el texto claro.

b) ¿Sigue patrón de descodificación como sucesión recurrente? Compruébalo.

c) ¿Sigue algún patrón en cuanto a la posición? Si es así, hállalo y compruébalo con la letra B.

d) ¿Puedes dar alguna justificación geométrica a este método? ¿Sirve este aspecto geométrico como sistema de descodificación? (Repite el proceso con otro cilindro diferente y observa lo que ocurre).

| | **Descriptor PAI para el criterio B** | **Indicadores para esta prueba** |
|---|---|---|
| 0 | El alumno no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que se exponen a continuación. | El alumno no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que se exponen a continuación. |
| 1 – 2 | El alumno **aplica** técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer | Plantea adecuadamente el método de descodificación con cuadrícula. |

| | | |
|---|---|---|
| | patrones **sencillos**, **aunque necesita cierta orientación por parte del profesor**. | Encuentra el texto plano (a). |
| 3 – 4 | El alumno **selecciona y aplica** técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones y **sugiere** relaciones o reglas generales. | Halla el patrón de descodificación de forma recurrente y lo comprueba (b). |
| 5 – 6 | El alumno **selecciona y aplica** técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones, **describe** los patrones como relaciones o reglas generales y **saca conclusiones** de acuerdo con los hallazgos. | Halla una expresión general para el patrón de localización de cada letra y lo comprueba (c). |
| 7 - 8 | El alumno **selecciona y aplica** técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones, **describe** los patrones como relaciones o reglas generales, **saca conclusiones** de acuerdo con los hallazgos y **proporciona justificaciones o demostraciones**. | Justifica el apartado b.<br>Intenta justificar el método desde el punto de vista geométrico y obtiene una expresión general del patrón geométrico. |

# 5. UN EJEMPLO DE COMUNICACIÓN Y REFLEXIÓN: "ESTUDIO DE BENEFICIOS DE UNA EMPRESA"

## 5.1. OBJETIVO:

Esta actividad se desarrolla dentro del tema "Funciones" y con ella se busca complementar los ejercicios teóricos que se practican habitualmente.

Se consigue que los alumnos adquieran con más facilidad los conceptos del tema, además de conectar con problemas de la vida real y que perciban claramente la presencia de las Matemáticas en distintos ámbitos de la vida cotidiana.

Este tipo de actividades permite la atención a la diversidad, ya que es posible plantear un número menor de preguntas o, si es necesario, aumentarlas en número y en profundidad para aquellos alumnos que demandan ejercicios superiores.

## 5.2. METODOLOGÍA:

Se planteó en tres grupos de 3º ESO, formados por un total de 88 alumnos, desarrollando la actividad en dos fases:

En una primera fase se les propone a los alumnos una actividad formativa que desarrollan individualmente en una sesión de una hora de duración, con ayuda del profesor en los casos en que sea necesario.

En la segunda fase, y en condiciones de examen, se les propone a los alumnos una actividad similar.

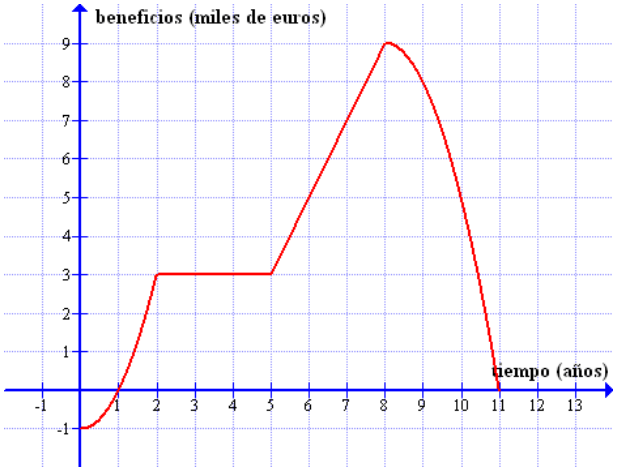
## 5.3. COMENTARIOS:

Al igual que suele ocurrir con cualquier actividad que rompe la rutina de la clase, esta también atrajo la atención de los alumnos. Les resultó

motivador y, al igual que en la actividad anterior, permitió que los alumnos consiguieran buenas calificaciones.

### 5.4. DESARROLLO:

Una empresa estuvo funcionando durante un cierto periodo de tiempo y los beneficios, en miles de euros, variaron con el tiempo (x) que estuvo funcionando (expresado en años) según se puede apreciar en la gráfica siguiente:




Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tiempo estuvo en funcionamiento la empresa? Exprésalo con notación matemática.
- Razona si crees que, desde el punto de vista de la empresa, era lógico que dejara de funcionar cuando lo hizo.
- ¿Entre qué valores de pérdidas y/o beneficios trabajó la empresa? Exprésalo en notación matemática. ¿En qué periodo de tiempo hubo pérdidas? ¿y beneficios? Razona tu respuesta.
- ¿Cuáles fueron sus valores máximos y mínimos? Exprésalos en notación matemática, razonando si se trata de extremos absolutos o relativos.
- Expresa verbalmente y en notación matemática los años en los que los beneficios aumentaron y disminuyeron.
- Razona si esta afirmación es verdadera o falsa: "Los beneficios de la empresa no corresponden a una función continua, porque su gráfica cambia de forma en x =2, x=5 y x=8".

## 6. UN EJEMPLO QUE COMBINA LAS TRES ÁREAS: "MOSAICOS"

### 6.1. OBJETIVO:

Esta actividad se desarrolla dentro programa de 3º ESO y con ella se desarrolla íntegramente el tema de "Movimientos en el plano".

## 6.2. METODOLOGÍA:

Se planteó en tres grupos de 3º ESO, formados por un total de 71 alumnos, desarrollando la actividad en dos fases:

En una primera fase se les propone a los alumnos la actividad formativa que se adjunta y que desarrollan individualmente en tres sesiones de una hora de duración, con ayuda del profesor en los casos en que sea necesario y consultando el libro de texto, si lo necesitan.

En la segunda fase, y en condiciones de examen, se les propuso a los alumnos una actividad más corta y del mismo grado de dificultad que debe ser resuelta en una única sesión de una hora de duración.

## 6.3. COMENTARIOS:

Dado lo novedoso del tema para ellos, les costó un poco conectar con la actividad, pero tras unos pocos minutos, estaban plenamente centrados en ella. Además, para el caso de la primera figura se les pidió que ordenadamente fueran explicando sus hallazgos y hubo un alto nivel de participación de los alumnos.

## 6.4. DESARROLLO:

Las siguientes figuras representan motivos decorativos propios del arte califal. En el diseño de estos mosaicos encontramos numerosos elementos geométricos que experimentan movimientos en el plano.

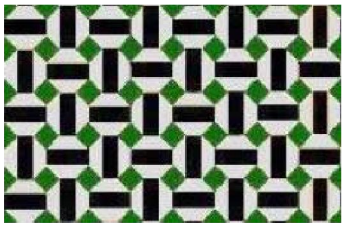


FIGURA 1

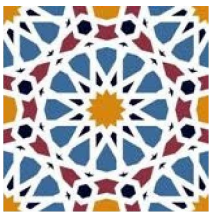


FIGURA 2

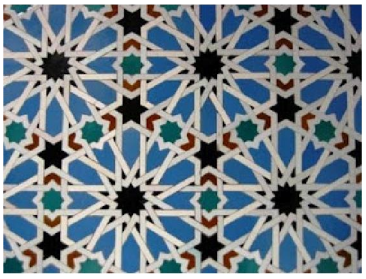


FIGURA 3

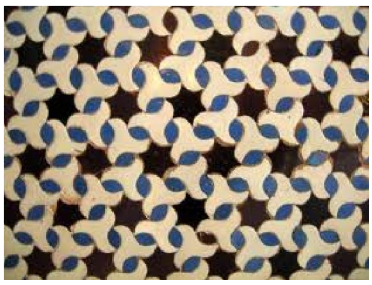


FIGURA 4

Para rellenar un plano con losetas (teselar el plano) de forma periódica, existen varios movimientos en el plano:

1.-Traslación. La nueva loseta que añadimos es igual a la anterior, desplazada a una nueva posición sin giros de ningún tipo.

2.-Simetría. Cada loseta nueva es la imagen especular de una anterior, con un eje de simetría dado.

3.-Rotación o giro. La nueva loseta surge por el giro de una anterior con centro en algún punto determinado y con un ángulo concreto.

Para ayudarte a realizar esta actividad puedes consultar el Tema 9 de tu libro de texto.

En una transformación geométrica se llama figura invariante a la que se transforma en sí misma. Completa la siguiente tabla indicando qué movimientos dejan invariantes los motivos de los mosaicos anteriores.

| FIG. Nº | TRASLACIÓN | SIMETRÍA | GIROS |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

Representa en el plano XY el triángulo de vértices A(1,4), B(2,6) y C(3,1). Partiendo de esta figura inicial, dibuja la figura que se obtiene tras hacer las siguientes transformaciones:

- Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda.
- Traslación vertical de 2 unidades hacia abajo.
- Traslación oblicua de 3 unidades a la derecha y 1 hacia arriba.
- Simetría axial horizontal
- Simetría axial vertical
- Simetría central
- Giro de 90º.

Explica verbal y matemáticamente las conclusiones que has reflejado en la tabla de la pregunta nº 1, indicando en cada caso, según proceda: tipo de traslación (horizontal, vertical u oblicua), tipo de simetría (central o axial) y ángulo de giro.

a) Enumera tres ejemplos (naturales o artificiales) en los que aparezcan estas transformaciones.
b) Explica, en cada caso, las transformaciones en los ejemplos que has puesto.

## REFERENCIAS

AA.VV.*"International Mathematics for the Middle Years 4".* Pearson.

AA.VV.*"International Mathematics for the Middle Years 5".* Pearson.

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL *"Guía de Matemáticas". PROGRAMA DE AÑOS INTERMEDIOS.*

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL *"El Programa de los Años Intermedios: de los principios a la práctica".*

ÁMBITO HUMANÍSTICO IES PUERTA DEL ANDÉVALO. *"Ámbito Humanístico 2º ESO"* [en línea].3 de diciembre de 2010 [consulta 15 de marzo 2012]. Disponible en: http://ambitohumanistico2.blogspot.com.es/2010_12_01_archive.html

BUITRAGO LAGUNA, Prado. "Escitala". En:*Experimentos: Infantil y Primaria* [en línea]. 7 de abril de 2010 [consulta 20 de febrero de 2011]. Disponible en: http://www.cepvaldepeñas.es/cientifico/index.php?option=com_content&view=article&id=181:escitala&catid=60:inventos-y-maquinas

MARTÍNEZ, Rebeca. *Rebeca Martínez: Instinto gráfico* [en línea]. 4 de febrero 2010 [consulta 15 de marzo 2012]. Disponible en: http://rojosandiaverdelimon.blogspot.com.es/2010/02/la-importancia-del-color-en-la-cultura.html

MOLA, Maite. *Grupos de simetría* [en línea]. [consulta 15 de marzo 2012]. Disponible en: http://www.telefonica.net/web2/m-p/gs.htm

*"Matemáticas y más: Simetría"* [en línea]. 8 de septiembre de 2011 [consulta 15 de marzo 2012]. Disponible en: http://pacoymatematicas.blogspot.com.es/2011/09/simetria.html

# INTERPOLACIÓN POLINÓMICA Y LA DIVISIÓN DE SECRETOS

**Ángela Rojas Matas**,
*Universidad de Córdoba*
**Alberto Cano Rojas**,
*Universidad de Córdoba*

## RESUMEN.

La división o reparto de secretos es un tema de completa actualidad en el ámbito de la criptografía. Se ocupa de que un secreto no esté en manos de una sola persona sino que participen varias y que sólo se pueda recuperar el secreto cuando se junten un número determinado de ellas.
Además de interesante, este tema se puede convertir en un recurso didáctico en nuestras clases de Matemáticas tanto a nivel de bachillerato como a nivel universitario.

**Nivel educativo**: Bachillerato, Universidad.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Existen ocasiones donde una información secreta no es deseable que esté en manos de una sola persona. Puede interesar que varias personas posean parte de dicha información y que sólo se consiga recuperar la información completa si se juntan varias de estas personas. Por ejemplo, el director de un banco puede interesarle que ningún empleado de la misma posea la clave que abre la caja fuerte. Por el contrario, puede repartir entre 5 empleados, por ejemplo, parte de la información, de forma que para conseguir la clave de la caja fuerte tengan que juntarse al menos 3 de los 5 empleados. Esta idea se conoce como esquema umbral (5,3).

El primer artículo sobre este tema fue publicado en 1976 por A. Shamir, un criptógrafo muy conocido (Shamir, 1976). En su artículo Shamir propone el uso de polinomios para llevar a cabo un esquema umbral para el reparto de un número secreto. Posteriormente se han publicado una gran cantidad de trabajos. Por ejemplo en el artículo de Thien (Thien et al., 2002) explica cómo aplicar el esquema de Shamir para compartir una imagen secreta. En el artículo de Parakh (Parakh, 2011) se propone una variación del método de Shamir.

## 2. ESQUEMA DE SHAMIR.

La idea es muy sencilla. Supongamos que nos interesa hacer un esquema (6,3). Eso quiere decir que hay 6 participantes y que sólo al juntar al menos a 3 de ellos es posible recuperar el secreto.

Supongamos que la clave secreta es $s=1234$. El distribuidor del secreto escogerá dos números cualesquiera, que indicaremos $a_1$ y $a_2$, con los que construirá el polinomio de segundo grado: $P(x)=s+a_1 x+a_2 x^2$

Supongamos que $a_1=166$ y que $a_2=94$, entonces:

$$P(x)=s+a_1 x+a_2 x^2=1234+166x+94x^2$$

Calculamos 6 puntos cualesquiera del polinomio del polinomio, por ejemplo: (1, 1494), (3, 2578), (4, 3402), (6, 5614), (8, 8578), (11, 14434). Estos datos se suelen llamar "sombras" en los esquemas de reparto de secretos..

El distribuidor reparte aleatoriamente estos puntos entre sus seis empleados de confianza. Sólo cuando se junten al menos tres de ellos tendremos datos suficientes para poder construir el polinomio $P(x)$. Una vez construido el polinomio será fácil recuperar el secreto $s$ ya que: $s=P(0)$

Supongamos que al empleado nº 1 se le da el primer punto, al empleado nº 2 el segundo punto, y así en adelante. Como el polinomio desconocido tiene 3 coeficientes a determinar harán falta un mínimo de tres puntos para poder determinarlo. Si se juntan tres o más sí que podrán reconstruir el polinomio.

Por ejemplo, supongamos que se juntan los empleados 2, 5 y 6. El sistema a resolver sería:

$$\left.\begin{array}{l} s+3a_1+9a_2=2578 \\ s+8a_1+64a_2=8578 \\ s+11a_1+121a_2=14434 \end{array}\right\}$$

En el sistema anterior aparece el famoso determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)=(8-3)(11-3)(11-8)$$

Este determinante es no nulo, por lo tanto, el sistema es compatible determinado y podremos resolverlo, hallando el valor de *s*. La idea de Shamir es sencilla, el secreto se hace coincidir con el término independiente del polinomio y el grado del polinomio depende del número mínimo de empleados que deben juntarse para poder obtenerlo.

Para un esquema (6, 3) como el anterior, el polinomio debía ser de grado 2, para que el polinomio a determinar tenga 3 incógnitas y hagan falta como mínimo 3 puntos para poder determinarlo.

Esta idea se puede aplicar para compartir una imagen secreta, como fue propuesta en Thien (Thien et al., 2002). En este caso el secreto es cada uno de los niveles de gris que componen una imagen digital y el esquema de reparto de secretos anteriormente explicado se aplica a cada uno de los píxeles de la imagen.

## 3. UN VARIACIÓN DEL ESQUEMA SHAMIR.

Vamos a tratar en esta sección otro esquema de reparto de secretos Parakh, 2011). Es una variación de la idea de Shamir. Explicamos el método con un esquema (4,4).

Supongamos que deseamos compartir varios números secretos $s_0, s_1, s_2$ y $s_3$, por ejemplo. Averiguamos el polinomio interpolador que pasa por los puntos $(0, s_0), (1, s_1), (2, s_2), (3, s_3)$ que indicaremos por $P(x)$, que será en este caso un polinomio de grado 3. Evaluamos el polinomio en 4 puntos distintos de la forma:

$$D_1 = P(4), D_2 = P(5), D_3 = P(6), D_4 = P(7)$$

Damos al primer participante el punto $(4, D_1)$, al segundo el punto $(5, D_2)$, etc.

Está claro que cuando se junten los 4 participantes, tendrán cuatro puntos para averiguar el polinomio que pasa por ellos, es decir, el polinomio interpolador $P(x)$. Después bastará con evaluar dicho polinomio en 0, 1, 2 y 3 para obtener los tres números secretos.

La idea se representa en la figura 1. Los primeros 4 puntos sirven para averiguar el polinomio interpolador y los 4 puntos siguientes nos permiten averiguar las 4 sombras.

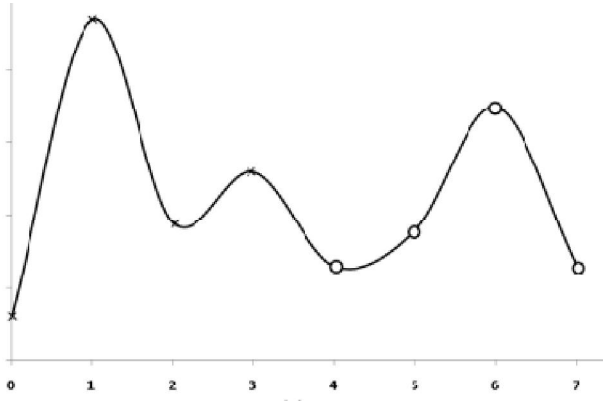



Figura 1. Idea del método

En la figura 2 se muestran algunos de los polinomios que pasan por los tres últimos puntos (es decir, cuando se juntan los tres últimos participantes). En este caso, hay infinitos polinomios interpoladores de grado 3 que pasan por esos tres puntos y seremos incapaces de saber cuál es el verdadero polinomio interpolador y, por lo tanto, no podremos saber los números secretos.

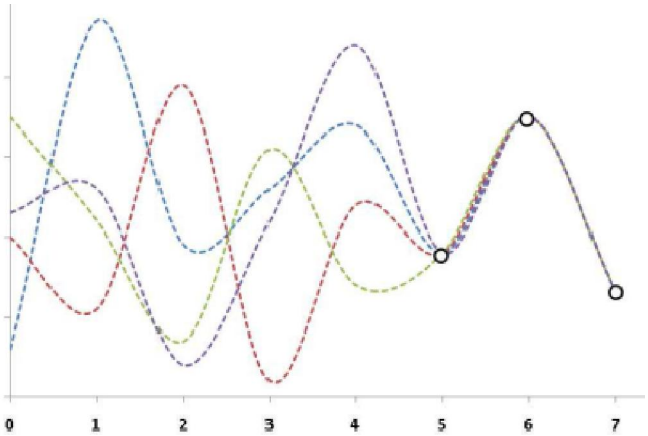



Figura 2. Si se juntan 3 de los participantes

Por ejemplo, si los números secretos fueran 7, 12, 31 y 82. El polinomio interpolador $P(x)$ que pasa por los puntos (0,7), (1,12), (2, 31), (3, 82) sería $P(x)=3x^3-2x^2+4x+7$. Después evaluamos el polinomio en 4, 5, 6 y 7 obteniendo 183, 352, 607 y 966 que serían las sombras de los 4 participantes.

En lo que sigue vamos a presentar una actividad desarrollada con nuestros alumnos en la que el secreto a dividir o repartir es un mensaje secreto.

Supongamos que el mensaje fuera: "BLANCO" y que usamos el siguiente alfabeto compuesto de 31 caracteres (incluye 27 letras, el punto, los símbolos de interrogación y el espacio en blanco indicado por *).

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | Ñ | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

| Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | . | ¿ | ? | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

Vamos a hacer un esquema (4, 3). Cogemos el mensaje en grupos de tres letras. A cada grupo de tres letras se le aplican las ideas anteriores.

- Primeras tres letras "BLA": se corresponden con {1, 11, 0}. Interpolamos por (0, 1), (1, 11), (2, 0) obteniendo el polinomio interpolador y después evaluamos dicho polinomio en 3, 4, 5 y 6 obteniendo -32, -85, -159, -254.
- Siguientes tres letras "NCO": se corresponden con {13, 2, 15}. Interpolamos por (0, 13), (1, 2), (2, 15) obteniendo el polinomio interpolador y después evaluamos dicho polinomio en 3, 4, 5 y 6 obteniendo 52, 113, 198, 307.
- Al participante 1 se le proporcionan los datos {-32, 52}, al participante 2 los datos {-85, 113,}, al participante 3 {-159, 198}, al participante 4 {-254, 307}.

Supongamos que se reúnen los tres primeros participantes, entonces:

- Con los puntos (3, -32), (4, -85), (5, -159) obtienen el polinomio interpolador que después evaluarán en 0, 1 y 2, obteniendo 1, 11, 0 que se corresponden con las letras "BLA".
- Repetirán la acción anterior obteniendo el resto del mensaje "NCO".
- Juntando las dos partes se recuperará el mensaje completo.

Las ideas anteriores se pueden usar a nivel de bachillerato, ya que el problema implica solamente la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, en primer curso de Ingeniería Informática, que es la titulación de nuestros alumnos, se puede hacer un paso más: hacer las cuentas en $\mathbb{C}_{31}$. Ahora las operaciones se realizarán módulo 31. Nuestros alumnos de Álgebra Lineal ya conocen la aritmética modular que han estudiado en la asignatura de Matemática Discreta que cursan simultáneamente a la asignatura de Álgebra Lineal. Por lo tanto, no hay ningún problema en trabajar con congruencias módulo 31 en lugar de trabajar con la aritmética habitual.

El proceso es el mismo que describimos anteriormente sólo que las sombras de los participantes serían:

- Participante 1: {-32, 52} mod 31={30,21}="*U"
- Participante 2: {-85, 113} mod 31={8, 20}="IT"
- Participante 3: {-159, 198} mod 31={27, 12}="•M"
- Participante 4: {-32, 52} mod 31={25,28}="Y¿"

Al trabajar en módulo 31, cualquier número enteros se convertirá en el resto de la división entera de dicho número entre 31, es decir, se convertirá en un número entre 0 y 30 que se puede hacer corresponder con un carácter del alfabeto. De esta forma, las sombras que reciben cada uno de los participantes son mensajes de texto también.

La forma de recuperar el mensaje secreto es idéntica a la forma descrita anteriormente sólo que ahora deberemos trabajar en $\mathbb{C}_{31}$. Así para recuperar las tres primeras letras del mensaje oculto con los tres primeros participantes deberemos averiguar el polinomio interpolador que pasa por los puntos (3, 30), (4, 8) y (5, 27) trabajando módulo 31.

El polinomio interpolador será: $P(x)=s_0+s_1x+s_2x^2$

$$\left.\begin{array}{l} s_0+3s_1+9s_2=30 \\ s_0+4s_1+16s_2=8 \\ s_0+5s_1+25s_2=27 \end{array}\right\}$$

En el sistema anterior aparece de nuevo el determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) = (4-3)(5-3)(5-4) = 2$$

Cualquier número no nulo será inversible módulo 31 (ya que 31 es un número primo). De hecho, el inverso de 2 módulo 31 es 16, ya que: $2\times 16 = 32 = 1 \pmod{31}$

Aplicando, por ejemplo, usando el método de Cramer podremos resolver el sistema:

$$s_0 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 16 \\ 27 & 5 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{684}{2} = 2^{-1}\ (684) = 16\ (2) = 32 = 1 \pmod{31}$$

$$s_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 9 \\ 1 & 8 & 16 \\ 1 & 27 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{-331}{2} = 2^{-1}\ (-331) = 16\ (10) = 160 = 5 \pmod{31}$$

$$s_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 30 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{41}{2} = 2^{-1}\,(41) = 16\,(10) = 160 = 5 \pmod{31}$$

Por lo tanto, el polinomio interpolador es:

$P(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 = 1 + 5x + 5x^2$

Evaluamos el polinomio para 0, 1 y 2, obteniendo:

- p(0)=1=1 (mod 31) $\Rightarrow$ letra "B"
- p(1)=11=11 (mod 31) $\Rightarrow$ letra "L"
- p(2)=31=0 (mod 31) $\Rightarrow$ letra "A"

Razonando de la misma forma se completa el ejercicio.

Ya para terminar, comentar que en clase de Álgebra Lineal, hemos realizado una actividad algo más complicada: el reparto de una imagen secreta entre varios participantes. Hemos implementado tanto el método de Shamir como el método de Parakh.

## REFERENCIAS.

PARAKH, A., SUBHASH, K. (2011). Space efficient secret sharing, Information Sciences, 181(2), 335-341.

SHAMIR, A. (1976). How share a secret, Communications of the ACM, 22 (11), 612-613.

THIEN, C.C., LIN, J.C. (2002) Secret image sharing, Computer and Graphics, 26 (5), 765-770.

# EL TABLÓN DE LAS MATES

**Carmen Galán Mata**,
I.E.S. P.J. Miravent (Isla Cristina, Huelva)
**Alicia González Ortiz**,
I.E.S. P.J. Miravent (Isla Cristina, Huelva)
**José Luis Ruiz Fernández**,
I.E.S. Alfonso XI (Alcalá la Real, Jaén)

## RESUMEN.

En esta comunicación queremos dar a conocer el trabajo que llevamos varios años desarrollando en nuestro centro para dar a conocer y estimular el conocimiento matemático entre nuestro alumnado. De esta idea surgió "El tablón de las Mates", un tablón donde, semanalmente, exponemos varios problemas de ingenio, matemáticos o matemáticas famosos que hay que descubrir, curiosidades, concursos, etc.

**Nivel educativo**: Hemos desarrollado el proyecto divido en dos niveles, la E.S.O. Y Bachillerato

## 1. INTRODUCCIÓN.

El tipo de alumnado con el que hemos trabajado es el matriculado en el centro IES P.J. Miravent, centro en el que desempeñamos nuestra labor docente. Se trata de un centro educativo situado en la localidad costera de Isla Cristina (Huelva). El nivel socioeconómico de la zona es medio-bajo, con un alto índice de fracaso escolar y absentismo. Las familias de nuestro alumnado se dedican al sector pesquero en su mayoría; también abundan las dedicadas a la hostelería y al turismo, sector en auge en la localidad. La principal problemática se deriva, al igual que en muchas localidades costeras, de la venta, contrabando y consumo de drogas. Con este proyecto hemos conseguido animar y motivar a nuestro alumnado, implicarles en el proceso de enseñanza-aprendizaje y combatir el fracaso y el absentismo escolares.

La historia de nuestra labor surge de la inquietud de un grupo de profesores y profesoras de matemáticas por mejorar la actitud de su alumnado ante esta materia, a veces una de las más temida. Al principio, los medios con los que contábamos eran escasos, pero las ganas, el esfuerzo y el empeño muchos. Poco a poco nos dimos cuenta de que nuestra ilusión se transformó en ideas, y posteriormente esas ideas impregnaron a todo el centro educativo, consiguiendo

la implicación del alumnado, compañeros y compañeras y hasta padres y madres de alumnos.

# 2. EL TABLÓN DE LAS MATES.

Se trata de un tablón de anuncios del centro donde hemos dispuesto semanalmente las siguientes secciones:

## 2.1. El Problema de la Semana.

Cada semana se proponían dos problema de ingenio o de matemáticas (uno para la ESO y otro para Bachillerato) que los alumnos y alumnas del centro debían resolver de forma voluntaria. Para la resolución de los mismos había que aplicar la lógica, procedimientos matemáticos sencillos y otros más complicados que a menudo se habían explicado en clase con anterioridad. Una vez resuelto el problema el alumnado debía explicar en un folio el procedimiento seguido y entregarlo a los profesores o profesoras que formábamos parte del proyecto. Las soluciones se depositaban en una urna habilitada a tal efecto y se corregían semanalmente, exponiendo una clasificación para motivar a nuestros alumnos y alumnas. El problema bien resuelto y correctamente explicado tenía una puntuación de 10 puntos, y los fallos en cualquier paso se penalizaban en función del error cometido. A final de curso se premió a los participantes, especialmente los que ocupaban los primeros puestos (al igual que en los concursos del Matemático Misterioso y Sudokus). Lo que más nos llamó la atención de esta actividad es que veíamos a los alumnos y alumnas por los pasillos comentando el problema y buscando soluciones, les llamaba la atención estaban haciendo matemáticas.




Figura 1: Ejemplo "El Problema de la Semana"

## 2.2. El Personaje Misterioso

Semanalmente se ponía una pista para que el alumnado descubra al matemático o matemática famoso que se esconde detrás. Los puntos se asignaban del siguiente modo: si se acierta con una sola pista, el alumno recibe 10 puntos, si es con dos, 9 puntos y así sucesivamente hasta un total de seis pistas. Cuando concluyan se expone la clasificación del alumnado y una biografía en forma de *Collage* del matemático en cuestión. Con esta actividad conseguimos cubrir una parcela a veces olvidada de nuestra materia: la historia de las matemáticas, que, muchas veces por falta de tiempo no vemos en el aula. Llama la atención la motivación incluso de compañeros y compañeras de otras áreas para descubrir la identidad del matemático o matemática famoso/a.

**PISTA 1:**
Planteó uno de los problemas que aún no están resueltos en matemáticas

**PISTA 2:**
Su diario ha sido estudiado

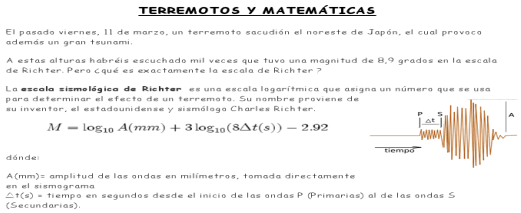
Figura 2: Dos primeras pista de "El personaje Misterioso"

## 2.3. Sudokus.

Se exponía uno semanalmente con las mismas reglas que el problema de la semana. La dificultad de los mismos fue variando de fácil a medio, y, por último de alto nivel de dificultad. De hecho, uno de los últimos fue el que estuvo en la fase final del campeonato de España, y tuvimos varias alumnas capaces de resolverlo.

## 2.4. Aplicaciones de las Matemáticas a la Vida Real

Elaboradas por un miembro del proyecto y expuestas de forma diversa, de tal forma que llamen la atención de nuestro alumnado.


TERREMOTOS Y MATEMÁTICAS

El pasado viernes, 11 de marzo, un terremoto sacudión el noreste de Japón, el cual provocó además un gran tsunami.

A estas alturas habréis escuchado mil veces que tuvo una magnitud de 8,9 grados en la escala de Richter. Pero ¿qué es exactamente la escala de Richter ?

La **escala sismológica de Richter** es una escala logarítmica que asigna un número que se usa para determinar el efecto de un terremoto. Su nombre proviene de su inventor, el estadounidense y sismólogo Charles Richter.

$$M = \log_{10} A(mm) + 3\log_{10}(8\Delta t(s)) - 2.92$$



dónde:

A(mm)= amplitud de las ondas en milímetros, tomada directamente en el sismograma
△t(s) = tiempo en segundos desde el inicio de las ondas P (Primarias) al de las ondas S (Secundarias).

Figura 3: Aplicación de las Matemáticas a la Vida Real

# 3. CONCURSO DE FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA

En un lugar con tanto encanto como es Isla Cristina, donde la luz llena cada recoveco y donde los bellos atardeceres cautivan para siempre, nos propusimos celebrar un concurso de fotografía que tuviera a las matemáticas como tema central. Son muchos a los que un concurso de esta temática les suena como algo raro y hace que realmente no sepan lo que fotografiar, por ello vimos necesario incluir en las bases una pequeña explicación de lo que se pretendía con el concurso.

Estaba abierto a toda la localidad, para "sacar las matemáticas a la calle" y demostrar que nos rodean, que están por todas partes. Pretendíamos que el alumnado y la población en general descubran las formas geométricas en la naturaleza y en su entorno más próximo, y los conceptos matemáticos mediante símiles con paisajes u objetos.

Recorrimos todos los colegios de la localidad y algunos cercanos para explicar las bases del concurso y pegamos carteles del mismo por toda Isla Cristina para conseguir la participación de sus habitantes. Nos sorprendió muy gratamente la participación de alumnado de colegios, por la calidad y la oportunidad de los títulos de las fotografías, de algunos habitantes y por supuesto, del alumnado de nuestro centro.

La participación, originalidad, relación con las Matemáticas y calidad de las fotografías presentadas nos llevó a organizar una exposición del material, en colaboración con el Exclo. Ayuntamiento de Isla Cristina en una Sala de Exposiciones de la localidad, estando abierta al público y anunciándose en prensa y televisión locales.



Infinito

Figura 4: Fotografía Matemática presentada por un alumno

# 4. CONCURSO DE TARJETAS NAVIDEÑAS MATEMÁTICAS

El Concurso de Postales Matemáticas Navideñas fue una idea un poco loca que surgió al ver como el Departamento de Inglés elaboraba postales para felicitar la Navidad y pensamos que, por qué no hacíamos nosotros algo parecido, postales matemáticas para felicitar la Navidad. El primer año el concurso tuvo poca participación pero no por ello lleno de originalidad y gracia: Papá Noel explicando matemáticas en una pizarra, unos Reyes Magos que son números, un compendio de números recortados de las diversas ofertas de supermercados y grandes superficies, un árbol de Navidad hecho de números, una "nevada" de números, etc. Sin embargo el segundo año el concurso fue un éxito de participación y un derroche de imaginación y creatividad de nuestros alumnos/as. Pongamos por ejemplo la postal ganadora que presenta en la portada un árbol de Navidad que resulta ser un triángulo de Tartaglia, y en su interior aparecen diversos polígonos y figuras geométricas tocando instrumentos musicales para celebrar la Navidad.

# 5. CONCURSO CIFRAS Y LETRAS

Nuestro grupo de trabajo en colaboración con el Departamento de Lengua y Literatura, propuso un concurso similar al juego "Cifras y Letras". Se hacían equipos de dos alumnos y tenían que competir entre ellos. Primero se hizo una liguilla y los clasificados pasaron a una semifinal y de ahí a la final. Hubo varias categorías por niveles: primer ciclo de la ESO, segundo ciclo de la ESO y Bachillerato. El juego que seguía la misma dinámica que el conocido programa constaba de varias pruebas de letras y de cifras: En la de "Letras" debían con 9 letras formar la palabra más larga; y en la de "Cifras" debían con 6 números debían obtener otro número de tres cifras o aproximarse lo más posible a él. La liguilla de clasificación y la semifinal se planteó en los recreos, y no sólo los alumnos/as participantes renunciaron a perderse el descanso del día en el que concursaban sino que además la actividad contaba con público. La fase final se realizó el día en el que el centro celebra el día de Andalucía y ésta fue para orgullo nuestro, una de las actividades estrella y de las que contó con mayor número de asistentes.

## 6. CONCURSO DE LOGOS MATEMÁTICOS

Propusimos este concurso con la idea de tener un logo que nos represente creado por nuestros propios alumnos y alumnas. El logo ganador aparecerá en poster que llevamos allí donde desarrollamos nuestro Taller de Matemáticas, que explicaremos posteriormente, y en camisetas que hacemos con el fin de recaudar fondos para la asistir como divulgadores y divulgadoras científicos a la Feria de las Ciencias de Sevilla. Al igual que en el concurso de Tarjetas Navideñas Matemáticas, el primer año la participación fue escasa, aunque muy original, y en años posteriores la participación nos ha desbordado con diseños muy trabajados.



Figura 5: Logo ganador del curso 2010/2011 que se utilizó para las camisetas para la Feria de las Ciencias

## 7. CONCURSO DE CARTAS DE AMOR MATEMÁTICAS

Con el lema "Díselo con Matemáticas" organizamos este concurso haciéndolo coincidir con San Valentín. Se trataba de agudizar el ingenio de nuestro alumnado haciéndoles escribir cartas de amor donde apareciesen las Matemáticas. Instauramos dos categorías, una para la ESO y otra para Bachillerato, ya que los recursos que puede utilizar un alumno o alumna de Bachillerato son más ricos y variados que un alumno o alumna de ESO. Este curso fue el primero en que hemos llevado a cabo este concurso, y hemos considerado que la participación ha sido más que suficiente, con cartas muy ingeniosas y variadas

# 8. TALLER DE MATEMÁTICAS

El alumnado que voluntariamente participaba asiduamente en nuestros concursos fue seleccionado para formar un grupo de "alumnado ayudante" de matemáticas, con los objetivos siguientes:

- Elaborar material de "juegos de ingenio matemáticos" con fichas que expliquen la historia del juego y la cultura que lo desarrolló, estudiando y elaborando estrategias ganadoras aplicando la lógica y el pensamiento matemático. El tablero de algunos juegos se elaboró interdisciplinarmente con el Departamento de Educación Plástica y Visual a través de su taller de cerámica. Otros tableros se hicieron interdisciplinarmente con el Departamento de Tecnología, algunos en madera y otros en cartón. Otros tableros fueron diseñados por el profesorado en diferentes materiales y por último, aunque no por ello menos importante, otros tableros los diseñaron y elaboraron los propios alumnos y alumnas. Entre los juegos de ingenio que desarrollamos cabe destacar:
  - Mancala: juego de lógica muy difundido en el continente africano. Combina la simplicidad de las reglas con la profundidad del pensamiento estratégico. Su historia se remonta al antiguo Egipto. Es un juego que consta de un tablero que alberga dos o cuatro hileras paralelas formadas por un número igual de agujeros u hoyos; en general las filas suelen ser dos. En los hoyos se depositan piezas con las que se juega, que en su origen eran semillas, guijarros o caracolillos de mar. El tablero que elaboraremos nosotros constara de dos hileras de seis hoyos. Este tablero se sitúa entre dos jugadores, dispuestos cara a cara; cada uno de ellos controlará los seis hoyos de su lado. En cada hoyo se colocan inicialmente cuatro piezas. Los jugadores mueven alternativamente, y cada una de sus jugadas consiste en una siembra de semillas y eventualmente en su captura. El vencedor es el jugador que ha capturado más semillas cuando la partida se da por finalizada. Esas siembras y capturas se realizan de acuerdo con unas reglas predeterminadas.

- Taller del número áureo: Fichas donde se explica qué es, cómo se obtiene y dónde aparece el número áureo, junto con un programa informático diseñado por el profesorado del proyecto donde se introducen las medidas del rostro de una persona y da una nota media (siendo el 10 el rostro perfecto que guarda todas sus proporciones áureas y 0 un rostro completamente asimétrico no proporcionado) y personajes famosos (del mundo de la política, la canción, el cine, el deporte, etc.) con una nota similar a la obtenida.
- Juegos numéricos: Juegos donde se pone de manifiesto las propiedades y curiosidades de los números, permitiéndonos conocerlos mejor.
- Tangram normal y tangram ovalado: consta de siete piezas: un cuadrado, un paralelogramo, dos triángulos grandes iguales, un triángulo mediano y dos triángulos pequeños iguales, que guardan entre sí un gran número de relaciones geométricas. Es uno de esos puzzles capaces de cautivar y motivar a nuestros alumnos y alumnas a descubrir relaciones geométricas. Además, es un rompecabezas de origen chino con una leyenda que data de, aproximadamente, el año 1976
- Go: El juego de origen oriental conocido como *Weiqi* en China, *Igo* en Japón y *Baduk* en Corea, se originó probablemente en China hace unos 4000 años; más tarde se extendió a Corea y Japón. En Occidente, donde es denominado *Go*, no fue practicado hasta finales del siglo XIX. Actualmente, su popularidad está creciendo en todo el mundo. Se juega sobre un tablero inicialmente vacío de 19x19 líneas, aunque también es habitual utilizar tableros menores, de tamaño 13x13, e incluso de 9x9 para iniciarse en el juego. Los dos jugadores que participan disponen de un abundante número de piedras de color negro o blanco, respectivamente, que se van colocando sobre el tablero.

➢ Explicar y jugar con sus compañeros y compañeras en la celebración del Día de Andalucía en el centro. El Taller de Matemáticas Recreativas, que

competía con Talleres como el de karaoke o una gymkana coeducativa, fue uno de los más visitados por el alumnado y uno de los que más éxito tuvo.

- Explicar y jugar con alumnado de los colegios e institutos de la localidad y cercanos a través de la "Semana de la Ciencia de Isla Cristina" celebrada en el Teatro Horacio Noguera durante el mes de mayo los dos últimos cursos académicos.
- Explicar y jugar con alumnado de toda Andalucía en la Feria de la Ciencia de Sevilla, donde hemos participado los tres últimos cursos en calidad de divulgadores y divulgadoras científicos.



Figura 6: Taller de Matemáticas




Figura 7: Participación de nuestro Taller en la Feria de las Ciencias de Sevilla

## 9. BLOG DE MATEMÁTICAS

Hemos creado un Blog donde actualizamos semanalmente los siguientes apartados:

- Tablón de las Mates: Semanalmente subimos el Problema de la Semana, las pistas para el Matemático o Matemática famoso/a y/o Biografía del anterior, el Sudoku y la Curiosidad.

- Actividades/Eventos de clase: Ejercicios de Refuerzo o Ampliación de los diferentes grupos, fechas de exámenes, exámenes resueltos, notas del alumnado, etc.
- Concursos: Fechas límite de los concursos convocados y anteriormente explicados, así como clasificaciones.
- Fotografías: Fotografías de los eventos llevados a cabo y fotografías presentadas al concurso de fotografía matemática

También tenemos secciones fijas como enlaces interesantes o recomendados, visita virtual a nuestro centro, libro de firmas, etc.



Figura 8: Blog del Departamento de Matemáticas

# REFERENCIAS.

http://www.dptomatesiesmiravent.blogspot.com.es/
http://www.divulgamat.net/
http://fermat.usach.cl/histmat/html/ia.html
http://www.galeon.com/tallerdematematicas/problemas.htm

# MATERIALES DIGITALES DE MATEMÁTICAS PARA SECUNDARIA

**José Muñoz Santonja**,
*IES Macarena, Sevilla (Sevilla)*
**Mariano Real Pérez**,
*Centro del Profesorado de Sevilla, Sevilla (Sevilla)*

## RESUMEN.

Estamos inmersos en una era digital. A pesar de su rechazo a los cambios, la enseñanza ha ido entrando poco a poco en esta nueva situación, en particular a partir del desarrollo de la escuela web 2.0. Las nuevas tecnologías han comenzado a entrar en las aulas, pero el cambio de medios no servirá para nada si no hay también un cambio de mentalidad y de metodología. Por eso, aparte de los ordenadores y pizarras digitales se necesitan materiales que signifiquen un nuevo enfoque educativo basado en los nuevos recursos.

Durante el año 2011 hemos participado en la elaboración de materiales digitales, para utilizar en las aulas presenciales, desarrollados por el Ministerio de Educación. En esta comunicación queremos presentarlos y enseñar como acceder a ellos.

**Nivel educativo:** Secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Es indiscutible que hoy vivimos en una sociedad digital. Basta observar a nuestro alrededor y observar nuestra dependencia de móviles, internet, redes sociales, etc… Desde hace unos años, la tecnología digital ha comenzado también a introducirse en el mundo educativo. En particular desde que la Junta de Extremadura apostó en el año (2002) por digitalizar todos los centros educativos, muchas otras Comunidades respaldadas por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes han desarrollado la escuela web 2.0, aunque ese desarrollo se va a ralentizar, cuando no parar, debido a la crisis en que estamos inmersos.

Pero el cambio que va a significar la revolución digital en la enseñanza no puede quedarse únicamente en dotar de ordenadores y pizarras digitales a los centros educativos, se necesita material digital para sacar rendimiento a ese material y para que realmente la escuela web 2.0 arrastre un cambio metodológico para adaptarse a las nuevas realidades.

Los que trabajamos en la enseñanza no universitaria tenemos muestra de los cambios que están realizando las editoriales para intentar adaptarse a esta nueva situación, y raro es ya el material que nos llega a los centros que no incluyan lo que llaman *libro digital*, un material realmente impresentable que suele consistir normalmente en el libro de texto en formato papel convertido en pdf y con algunos enlaces a páginas de internet en el que encontrar, a veces,

applets interactivos para que el alumnado manipule, pero en otras ocasiones meros boletines de problemas complementarios de los que existen en el libro.

Sin embargo hay estamentos públicos que llevan años elaborando material digital para utilizar en la enseñanza.

La Consejería de educación de la Junta de Andalucía, en colaboración con otras Comunidades Autónomas, lleva desde el año 2008 elaborando materiales para la educación de adultos, tanto en su modalidad a distancia como semipresencial. El desarrollo de esos materiales, en los que hemos trabajado nosotros, ha permitido tener todo el curriculum de secundaria y bachillerato para personas adultas. Ese material, que también es aprovechable en las aulas de enseñanza presencial, está a disposición de cualquier profesor interesado que puede utilizarlo, descargarlo y modificarlo a su gusto. Este material está colocado en el repositorio de AGREGA y puede acceder cualquier persona interesada desde la dirección siguiente:

www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales

Esta filosofía de ofrecer material ya elaborado para utilizar en clase y a disposición de cualquier profesor que quiera utilizarlos directamente en clase o modificándolos a su gusto, también ha sido la que ha llevado al MECD a realizar varios proyectos muy útiles para los docentes. Nosotros vamos a hablar aquí de los relaciones con matemáticas

El más antiguo es sin duda el Proyecto Descartes, que sigue dotándose cada vez de material y que incluso han ampliado, en los últimos años, con muchos proyectos bilingües para poder ser utilizados en los centros de este tipo. Su dirección es:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

A partir de este proyecto surgió el desarrollo de todos los cursos de secundaria en el Proyecto EDAD (Educación Digital A Distancia). La dirección, para la parte de matemáticas, es http://recursostic.educacion.es/descartes/web/edad.html




Figura 1. Proyecto EDAD.

Otro material imprescindible es el Proyecto Gauss, en el que se han desarrollado multitud de actividades basadas en el programa Geogebra. Puede consultarse en la dirección:

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Y por último vamos a llegar al último proyecto desarrollado en el que nosotros hemos trabajado y que queremos presentar en esta comunicación.

## 2. ITINERARIOS CURRICULARES LIGADOS POR TAREAS.

Durante el año 2011 y parte del 2012, el MECD a través del CeDeC (Centro Nacional de Desarrollo Curricular en Sistemas no Propietarios), dependiente del INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado) ha estado desarrollando materiales curriculares para el segundo ciclo de secundaria en las asignaturas de Lengua y Literatura y Matemáticas. Aunque las previsiones eran de realizar los cursos 3º y 4º, en las dos versiones de matemáticas, con los últimos cambios en el ministerio y los recortes que estamos sufriendo, de momento sólo se han desarrollado completamente los materiales de 3º de ESO y no se sabe nada de los de cuarto.

Como todos los materiales de los que hemos hablado en la introducción, estos materiales están licenciados bajo Licencia Creative Commons, con reconocimiento de autoría y obligación de compartir con la misma licencia. Por tanto, cualquier profesor puede utilizarlos de forma gratuita y manipularlos. Los materiales se pueden acceder a través de la web para trabajar en línea, o descargarlos desde el repositorio de AGREGA tanto en formato html como directamente en archivos fuentes para que el profesor los manipule y adapte a sus necesidades.

El grupo que hemos elaborado los materiales ha estado formado por los autores de la comunicación junto con el compañero Arturo Mandly Manson de la Sociedad Extremena "Ventura Prosper Reyes", a la que también pertenece el profesor Mariano Real.

Todos los materiales se han elaborado utilizando el programa gratuito exeLearning. Este programa ha sido mejorado, en los últimos tiempos, por el propio ministerio de educación y pueden conseguirse las últimas versiones en la dirección https://forja.cenatic.es/frs/?group_id=197.

Si algún profesor quiere acceder a los materiales desarrollados en el CeDeC, tanto de Lengua y Literatura, como de Matemáticas puede hacerlo desde la página del propio CeDec, en la dirección siguiente en la que aparecen enlaces, para ambas asignaturas, tanto a la descarga de materiales como a la navegación web por los propios contenidos.

http://cedec.ite.educacion.es/index.php/es/descargade-contenidos

Los materiales suponen por una parte, un cambio metodológico en el aula de matemáticas influenciado por las tareas con las que se propone en los mismos el desarrollo curricular de la materia. Tareas que atienden a la llamada del desarrollo de las competencias básicas en el alumnado y que inciden directamente en la competencia "tratamiento de la información y competencia digital". Por otra parte supone un cambio en el aprendizaje del alumnado y en la

forma en que éstos interactúan con los contenidos y llegan a asimilarlos, de forma que se sienten partícipes en la elaboración de muchos de ellos.

Si bien los dos cambios anteriormente mencionados podrán haber sido más profundos, se ha perseguido en todo momento que los materiales, su contenido y metodología estuvieran al alcance de todo el profesorado tendiendo puentes hacia metodologías más tradicionales que se pudieran estar desarrollando aún en el aula.

Estos materiales han sido pensados y programados para su utilización en las clases presenciales, recogiendo los contenidos teóricos de la materia pero sin entrar en profundidades. La investigación, la búsqueda de información y la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación son destrezas que el alumnado deberá manejar en el desarrollo y resolución de cada una de las tareas que se proponen.

Aunque la idea es trabajar en las aulas TIC de los centros o con los ultraportátiles de los alumnos (si disponen de ellos) hay que tener en cuenta que los materiales están estructurados de forma que el papel del docente es fundamental en la utilización de estos materiales. Como guía, como ayuda, como un referente del alumnado para conseguir desarrollar cada una de las tareas y asimilar los contenidos propios de la materia. Además, se ha tenido en cuenta la utilización de la pizarra digital interactiva en el aula, de forma que las applets interactivas y el contenido multimedia tiene el tamaño suficiente para este recurso.

Se han preparado también los materiales de forma que el profesor pueda bajarlos de Internet y trabajar directamente con ellos en clase de forma que los problemas de conexión que todos sufrimos en los centros educativos no nos impidan en ningún momento seguir la marcha normal de clase. Puede hacerse desde la dirección:

http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/mat3.zip

# 3. ESTRUCTURA DE LOS MATERIALES.

La distribución de los materiales organizados por el CeDeC es la misma en ambos cursos y en ambas materias. Vamos a ver en este epígrafe como están divididos los materiales y veremos en el siguiente qué tipo de recursos podemos encontrar dentro del material.

Aunque esta estructura es la misma en ambas materias, nosotros vamos a hacer referencia, a partir de este momento, a los materiales de matemáticas. Vamos a suponer que vamos navegando por los contenidos web en formato html. Para ello podemos acceder a la dirección:

http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/index.html

Una vez que accedemos a la dirección anterior nos encontramos con la pantalla de presentación del curso.

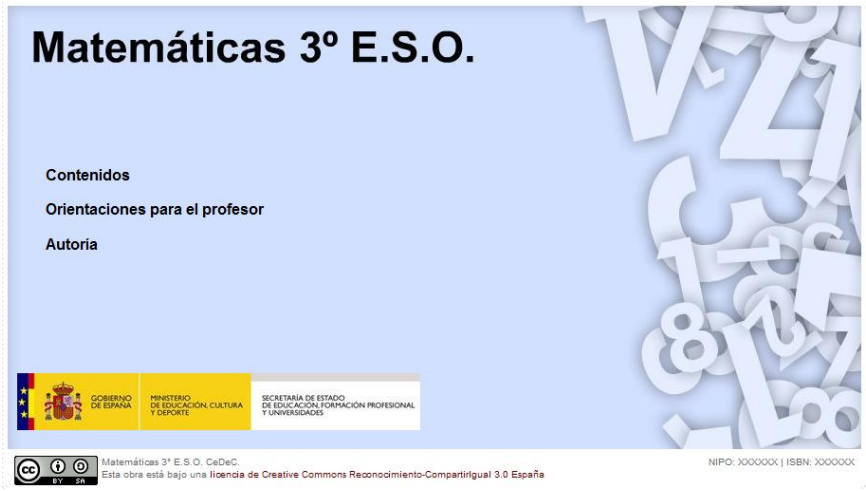


Imagen 2. Entrando en la aplicación.

## 3.1. ESTRUCTURA DE LOS CURSOS.

Cada curso está dividido en 12 unidades que abarcan el curriculum oficial. La distribución que hemos seguido en las matemáticas de 3º de ESO ha sido la siguiente:

Bloque Números:
- Unidad 1: Todo es número.
- Unidad 2: Aproximándose a la solución.

Bloque Álgebra:
- Unidad 3: Algo se oculta tras las letras.
- Unidad 4: Con una sola ecuación no tenemos bastante.
- Unidad 5: Un número detrás de otro.

Bloque Geometría.
- Unidad 6: Thales y Pitágoras.
- Unidad 7: Movimientos.
- Unidad 8: El mundo es un pañuelo… o no.

Bloque Funciones y gráficas.
- Unidad 9: ¡Que comience la función!
- Unidad 10: En la línea recta.

Bloque Estadística y probabilidad.
- Unidad 11: Estadística.
- Unidad 12: Probabilidad.

## 3.2. ESTRUCTURA DE CADA UNIDAD.

En la imagen tenemos el guión de la primera unidad en la que puede verse la estructura que es común a todas las demás.

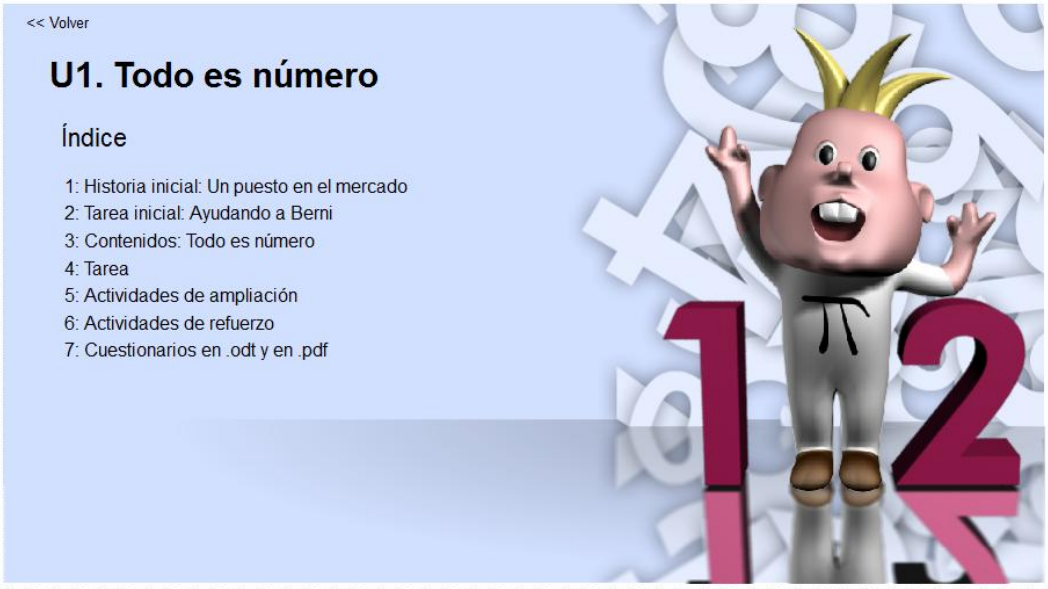


Imagen 3. Unidad 1 del itinerario de matemáticas para tercero de ESO.

Cada unidad comienza con una **historia inicial** en la que se presenta una situación relacionada con las matemáticas que se van a desarrollar en esa unidad. Lo normal es que se presente algún personaje que en su quehacer cotidiano tiene que utilizar matemáticas que van a desarrollarse en las páginas siguientes. En el caso de la unidad anterior se presenta a Beni que va a montar un puesto en el mercado de abastos de su ciudad.

A la historia inicial sigue siempre una **tarea inicial** basada en esa historia para que los alumnos entren en contacto con el tema a desarrollar.

A continuación vienen propiamente los **contenidos** del tema en los que se desarrollan los conceptos y actividades que se engloban dentro de ese epígrafe. Dentro de los contenidos existe una gran variedad de actividades entre las que el o la docente podrá seleccionar debido a la gran cantidad de ellas que aparecen en cada unidad y en la que el alumnado debe recurrir a todos los recursos que se ponen a su alcance para conseguir elaborar el producto final que se le solicita.

Una vez acabados los contenidos aparece una **tarea** a realizar para comprobar si se han asimilado los conceptos agrupados en esa unidad.

La unidad se complementa con un **cuestionario** de preguntas tipo test para que el alumnado compruebe sus conocimientos.

Con el fin de atender a la diversidad del aula, se completan las unidades con una de **tarea refuerzo** y otra de **ampliación**. En ambas, aparecen una serie de enlaces en los que se explican o repasan conceptos vistos en los contenidos de la unidad o que amplían lo visto en clase. Después se plantea una tarea adecuada a ese tipo de alumnado.

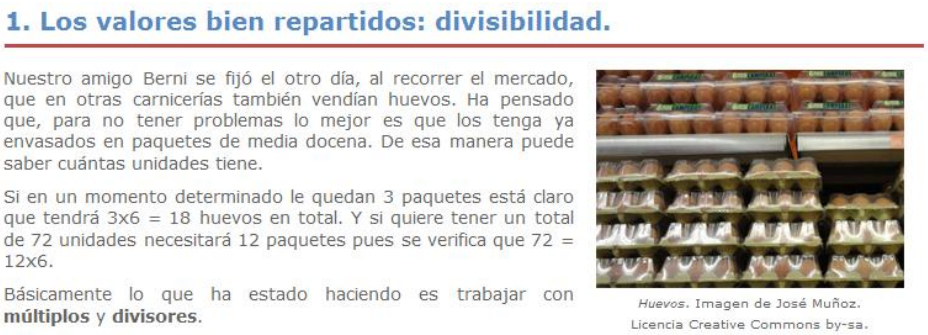
En todo momento, como dijimos antes, queda a criterio del docente quién debe hacer cada una de las tareas.

### 3.3. Estructura de los contenidos.

Dentro de los contenidos de la unidad podemos encontrar actividades muy diversas que básicamente pueden ser de distintos tipos:

- Párrafos de textos.

En ellos se explican los conceptos y si sitúan los contextos en los que se trabaja. Suelen incluir textos y dibujos. También se incluyen a veces vídeos ilustrativos.



**1. Los valores bien repartidos: divisibilidad.**

Nuestro amigo Berni se fijó el otro día, al recorrer el mercado, que en otras carnicerías también vendían huevos. Ha pensado que, para no tener problemas lo mejor es que los tenga ya envasados en paquetes de media docena. De esa manera puede saber cuántas unidades tiene.

Si en un momento determinado le quedan 3 paquetes está claro que tendrá 3x6 = 18 huevos en total. Y si quiere tener un total de 72 unidades necesitará 12 paquetes pues se verifica que 72 = 12x6.

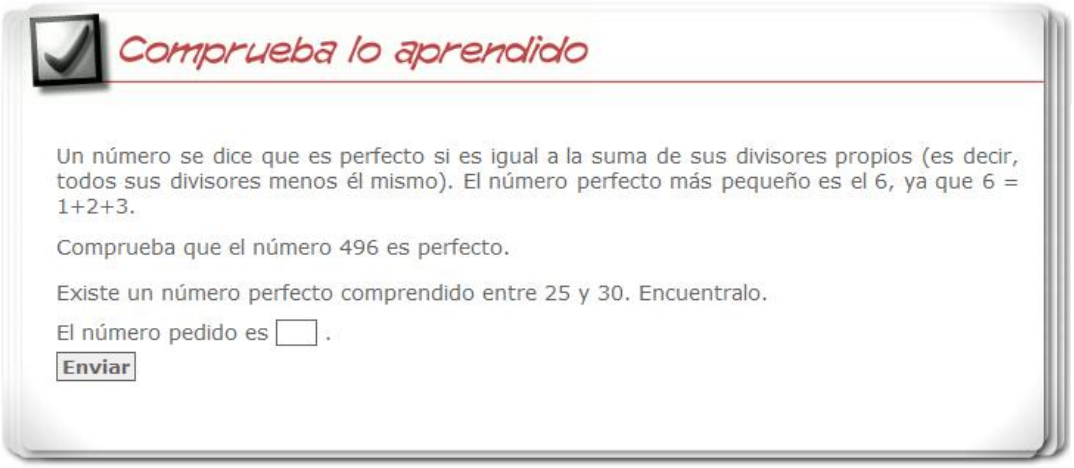
Básicamente lo que ha estado haciendo es trabajar con **múltiplos** y **divisores**.



Imagen 4. Cuadro de texto.

- Actividades autocorrectivas.

  Existen una serie de actividades para que realice el alumno sobre los propios contenidos que permiten su corrección inmediata. Existen de varios tipos: respuesta múltiple, verdadero o falso, rellenar huecos, etc.



*Comprueba lo aprendido*

Un número se dice que es perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios (es decir, todos sus divisores menos él mismo). El número perfecto más pequeño es el 6, ya que 6 = 1+2+3.

Comprueba que el número 496 es perfecto.

Existe un número perfecto comprendido entre 25 y 30. Encuentralo.

El número pedido es [ ] .

Enviar

Imagen 5. Comprueba lo aprendido.

- Enlaces externos.

  Existen recuadros en los que aparecen enlaces a Internet, bien a páginas con material extra, vídeos, actividades manipulables para practicar, etc.



*En la Red*

El siguiente enlace te lleva a una página en la que podrás practicar la diferencia entre los números primos y compuestos.

Asegúrate que está activada la casilla que pone Números primos y realiza varios cuestionarios cambiando el nivel de dificultad.

Es decir, practica con el Nivel 1, pero después selecciona el nivel 3, el nivel 5, ...

Imagen 6. En la red.

- Ejercicios resueltos.
  Hay otro bloque de actividades para que el alumno investigue directamente en la clase a partir de lo aprendido. En este caso se acompaña con el desarrollo del problema para que compruebe si ha llegado bien o, en caso contrario, vea cuál es el camino adecuado.

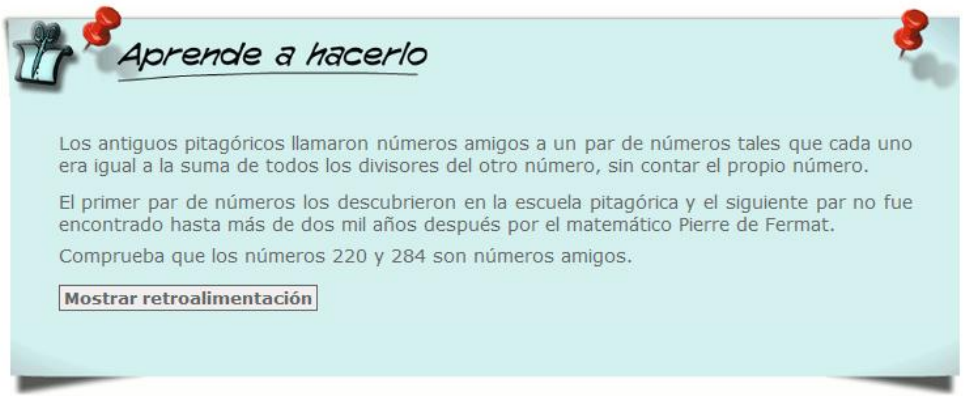
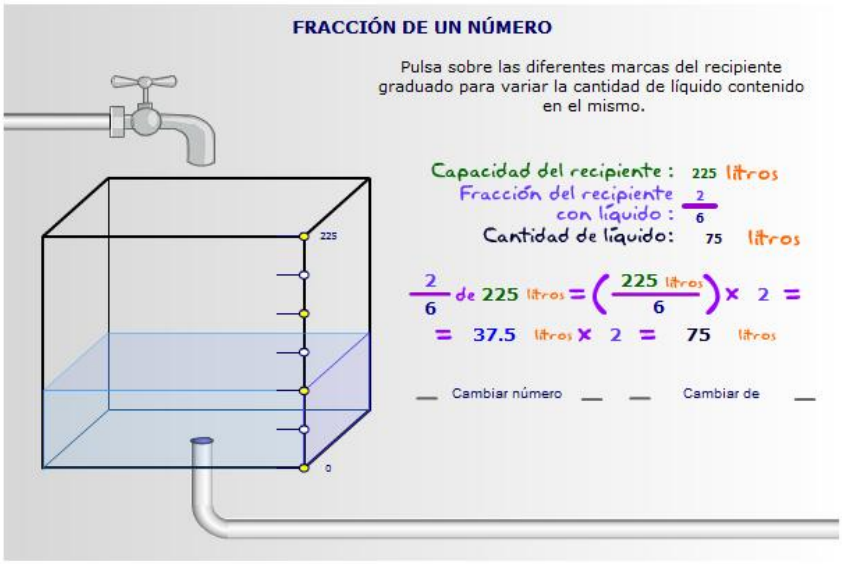



Imagen 7. Aprende a hacerlo.

- Animaciones.
  En general archivos en flash en los que el alumnado puede manipular algunas variables para ver como se comportan determinados elementos.




*Fracción de un número*. Animación de Juan García Moreno en Banco de imágenes del ITE.
Licencia Creative Commons by-nc-sa

Imagen 8. Animaciones.

- Presentaciones.
  La posibilidad de convertir presentaciones de Open Office en archivos flash y la facilidad para incrustar estos en exeLearning perite incluir muchos desarrollos en poco espacio.

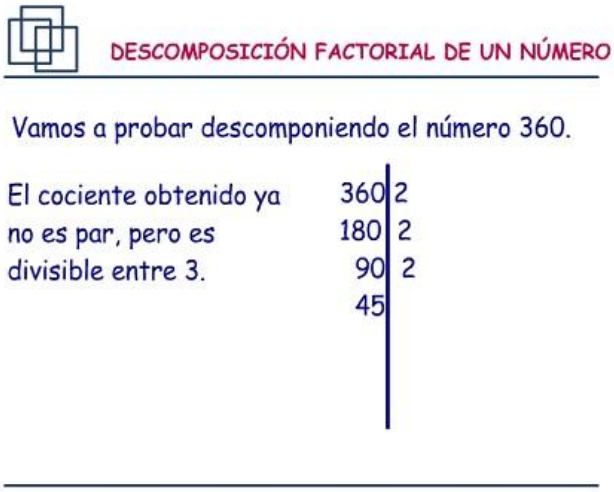



Imagen 9. Presentaciones.

- Actividades manipulativas.
  Los contenidos están llenos de actividades para que el alumnado manipule fácil y visualmente muchos conceptos. Podemos encontrar dentro de las unidades archivos de Descartes, Jclic, Geogebra, etc.

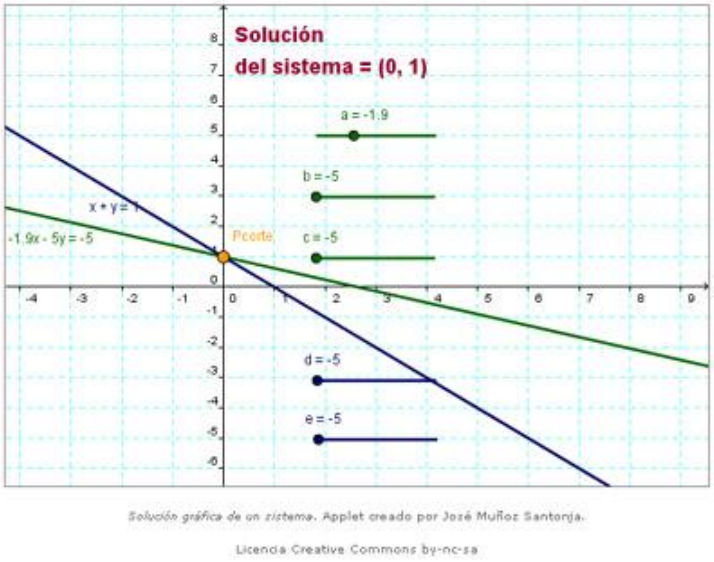



Imagen 10. Applets.

Pero, dado que estos materiales tienen por título *Itinerarios curriculares ligados por tareas competenciales*, la parte más importante de los contenidos son las tareas. El enfoque del aprendizaje de estos materiales es a través de tareas en las que el alumnado deberá aplicar sus conocimientos y desarrollar todas las competencias básicas, no solamente la matemática.

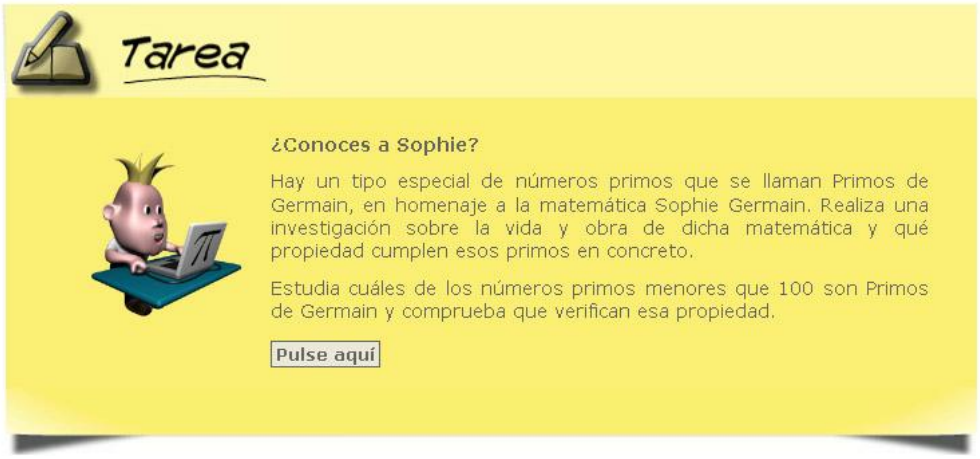



Imagen 11. Tareas.

Como creemos que el gran enfoque didáctico de este material está en ese trabajo por tareas hemos pensado que merece un tratamiento más detenido y por eso dedicaremos otra comunicación a analizar en profundidad ese tipo de trabajo.

## REFERENCIAS.

REAL PÉREZ, M. (2010). *Tratamiento de la información y competencia digital en el área de matemáticas*, SUMA+ 64, 71–80.

# ITINERARIO CURRICULAR PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS DE 3º DE ESO

**Mariano Real Pérez**,
*Centro del Profesorado de Sevilla, Sevilla (Sevilla)*
**José Muñoz Santonja**,
*IES Macarena, Sevilla (Sevilla)*

## RESUMEN.

Las competencias básicas llevan años incorporadas a los textos legales que desarrollan los currículos oficiales de educación primaria y de educación secundaria obligatoria. Unas competencias básicas que, a pesar de presentarse como anexo a estos currículos, suponen un cambio metodológico en la enseñanza y un aprendizaje ligado a poner en marcha mecanismos con los que resolver tareas dando sentido a los contenidos propios de las distintas materias, no como unidades aisladas, sino como conjunto de saberes que hacen funcionalmente activo al alumnado dentro de la sociedad en la que vive, que debe verse reflejado en el aula. En esta comunicación vamos a presentar una muestra de las tareas que aparecen en los itinerarios curriculares que hemos diseñado para el MEC y que contribuyen al desarrollo de las competencias.

**Nivel educativo**: Tercero de la ESO.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Desde febrero de 2011 los profesores Mariano Real Pérez (Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper") que ha actuado como coordinador de la elaboración y diseño de contenidos, José Muñoz Santonja (Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales") y Arturo Mandly Manson (Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper") hemos desarrollado para el Centro Nacional de Desarrollo Curricular en Sistemas no Propietarios (CEDEC), dependiente del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de formación del Profesorado (INTEF – Ministerio de Educación), unos materiales para el desarrollo curricular del área de matemáticas en tercero de la ESO a través de tareas que contribuyan al desarrollo de las competencias básicas.

Al finalizar cada una de las tareas, el alumnado deberá obtener un determinado producto que debe dar a conocer a sus compañeros y compañeras. Un producto que puede ser un objeto físico, un relato, un vídeo, una estrategia, unas conclusiones fruto de la investigación o de la reflexión, etc.

En la mayoría de las ocasiones, cada tarea está pensada para que el producto final que obtiene cada alumno o alumna o cada grupo de alumnos o alumnas, sea diferente, en función del entorno en el que se encuentro, de sus características personales o de la vivienda en la que vive cada uno o bien

simplemente en función de sus gustos o su imaginación. Esto hace que las tareas no sean caducas, sino que se puedan resolver independientemente del momento en el que se planteen, eso sí, aderezándola con las condiciones, circunstancias y datos de ese momento.

La abundancia de tareas con las que cuenta cada unidad proporciona al docente la posibilidad de seleccionar aquellas que considere más conveniente para cada momento e incluso darle pistas sobre tareas alternativas que pueda plantear al alumnado de forma que se aborden los contenidos de matemáticas procurando el desarrollo de las competencias básicas.

Cada tarea planteada se ha pensado independientemente del año y lugar en el que se utilice, algo que ha supuesto un hándicap debido a la riqueza que estos dos ingredientes suponen para el enunciado de las mismas, aprovechando hechos concretos que puedan estar sucediendo en un momento concreto. Por ejemplo, el tratamiento de la ley D´Hont en un periodo de unas elecciones concretas. Sin embargo, este tratamiento ha supuesto que esta ventana quedara abierta para que el profesorado en cada momento pueda aportar estos ingredientes.

## 2. CAMBIO DE METODOLOGÍA.

La aplicación que presentamos en esta ocasión tiene unas orientaciones al profesorado a través de las que se puede intuir la composición de la misma y la idea con la que ha sido realizado el itinerario que proponemos Toda una declaración de intenciones que van a hacerse efectivas en el desarrollo de las distintas unidades que lo componen y de las tareas que se proponen en cada unidad.

Al profesorado se le indica que debe crear un blog de aula que el alumnado utilizará posteriormente a la hora de resolver algunas de las tareas que se le proponen. En este tipo de acciones el alumnado realizará entradas en el blog incrustando alguna imagen o alguna presentación que haya realizado y subido posteriormente a algún espacio de Internet como Slideshare o bien incrustando algún vídeo que haya podido elaborar y subir posteriormente a Youtube. En estos casos, tanto los datos que deba manejar como el producto final que debe presentar serán distintos para cada uno, por lo que debe realizar las entradas en el blog con características especiales que se le indican en cada.

De cara al desarrollo específico de la competencia tratamiento de la información y competencia digital, se le solicita al alumnado que busque información en Internet con la que realizar una determinada tarea, que extraiga los datos necesarios de la misma y que elabore algún tipo de documento con los resultados de la resolución de la tarea en cuestión o con la propuesta justificada que consideren conveniente, bien de forma individual o en grupo.

Por otra parte también utilizará herramientas como un procesador de textos como Open Office, programas de tratamiento de imágenes como GIMP, la hoja de cálculo, etc. En algunas ocasiones se le indicará también que desarrollen contenidos con una determinada herramienta específica. En ese caso se hará alusión a esa herramienta en concreto.

Como hemos mencionado, en cada una de las tareas se le dan indicaciones al alumnado para que realice una determinada configuración a la hora de realizar esas entradas en el blog de aula, de forma que el profesorado puede conocer en cada momento cuántos alumnos o alumnas han presentado una determinada

tarea y cuántas tareas ha realizado un determinado alumno o alumna. Como ejemplo, podemos decir que entre las tareas con las que se puede encontrar el alumnado, el producto que deberá realizar en ellas puede ir desde un documento de texto o una hoja de cálculo a un vídeo, pasando por una presentación. Las tareas son muy variadas y, como se indica en las orientaciones, el producto final que obtiene cada alumno o alumna suele ser diferente, ya que se parte de elementos diferentes como pueden ser su propia casa, la calle en la que vive, una determinada factura, un tipo de coche que le guste, etc. El alumnado no solamente deberá utilizar todos los conocimientos y recursos de los que dispone para resolver la tarea, sino que, en la mayoría de las ocasiones, deberá exponer al resto del grupo las conclusiones de la tarea que ha desarrollado y defender el camino seguido para realizarla.

# 3. TRABAJANDO POR TAREAS: DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS.

Comenzamos esta parte destacando que se han tenido en cuenta los criterios de usabilidad y accesibilidad de la web de forma que el material pueda ser utilizado por el alumnado con deficiencias específicas y que necesiten lectores de pantalla u otros elementos adaptados.

A lo largo de este apartado vamos a recoger algunas de las tareas que se le proponen al alumnado, indicando los lugares en los que aparece cada una. Cada unidad comienza con una historia inicial relacionada con los contenidos que se van a estudiar en la unidad. Esta historia inicial puede aparecer posteriormente referenciada en los contenidos de la unidad o bien en alguna tarea que se pueda proponer en esos contenidos. A modo de introducción, presenta un escenario real en el que pueden ser utilizados los contenidos que se va a abordar en la unidad.

La historia inicial de esta unidad 1 es la siguiente:

*Hola ¿Te has enterado de la nueva noticia?...*

*¡Me han concedido un puesto poder instalarme en el nuevo mercado!*

*Disculpa, con la emoción se me ha olvidado presentarme. Mi nombre es Bernardino Higaderas, aunque la gente me llama Berni. Como te contaba, solicité un puesto en el nuevo mercado de abastos que ves en la imagen, ese en el que localizaron restos romanos cuando lo estaban construyendo.*

*Esta mañana me han dicho que me han concedido el puesto. Estoy loco de contento ya que voy a poder trabajar.*

*Al parecer, los gestores quieren que las tiendas que se monten sean variadas y que no haya demasiadas que se dediquen a la venta del mismo producto. Yo había solicitado instalar una pescadería, un frutería o una carnicería. ¡A mí me han concedido una carnicería!*

*Nunca me he dedicado a esto, por lo que me he ido raudo y veloz a otro mercado de abastos y he estado mirando atentamente las cosas que tenía y cómo servían a los clientes. Hasta he grabado un vídeo para saber cómo debo atender, cómo debo cortar los filetes, cómo debo colocar los precios y un sinfín de cosas. Vamos, que ahora voy a tener gran cantidad de trabajo para preparar todo el puesto.*

*Te dejo el vídeo para que lo veas. ¡Tengo un montón de cosas que hacer!*

Sobre esta historia inicial que gira en torno a un hombre al que le han concedido un puesto de venta en un nuevo mercado que se ha abierto, se le propone al alumnado la tarea que aparece en la imagen 3.

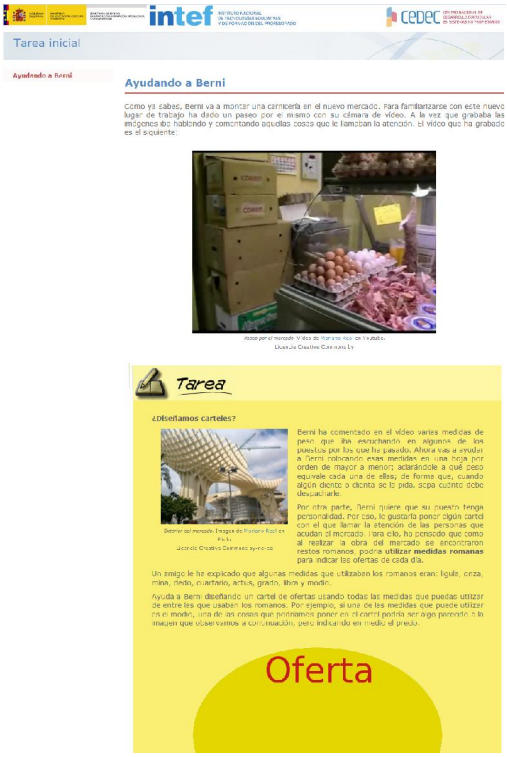



Imagen 3. Tarea inicial de la unidad 1.

En este caso se le pide al alumnado resolver una tarea tras un paseo el paseo por el mercado que han observado en el vídeo. Seguidamente, la tarea que se le propone al alumnado es la siguiente:

*Como ya sabes, Berni va a montar una carnicería en el nuevo mercado. Para familiarizarse con este nuevo lugar de trabajo ha dado un paseo por el mismo con su cámara de vídeo. A la vez que grababa las imágenes iba hablando y comentando aquellas cosas que le llamaban la atención. El vídeo que ha grabado es el siguiente:*

*Berni ha comentado en el vídeo varias medidas de peso que iba escuchando en algunos de los puestos por los que ha pasado. Ahora vas*

*a ayudar a Berni colocando esas medidas en una hoja por orden de mayor a menor; aclarándole a qué peso equivale cada una de ellas; de forma que, cuando algún cliente o clienta se la pida, sepa cuánto debe despacharle.*

*Por otra parte, Berni quiere que su puesto tenga personalidad. Por eso, le gustaría poner algún cartel con el que llamar la atención de las personas que acudan al mercado. Para ello, ha pensado que como al realizar la obra del mercado se encontraron restos romanos, podría utilizar medidas romanas para indicar las ofertas de cada día.*

*Un amigo le ha explicado que algunas medidas que utilizaban los romanos eran: ligula, onza, mina, dedo, cuartario, actus, grado, libra y modio.*

*Ayuda a Berni diseñando un cartel de ofertas usando todas las medidas que puedas utilizar de entre las que usaban los romanos. Por ejemplo, si una de las medidas que puede utilizar es el modio, una de las cosas que podríamos poner en el cartel podría ser algo parecido a la imagen que observamos a continuación, pero indicando en medio el precio.*

Dentro de la tarea, una de las acciones que también se le pide al alumnado realizar es ordenar unos determinados pesos que se van escuchando en el recorrido que el vídeo muestra por dentro del mercado.

En este caso, el alumnado debe obtener como producto final un cartel con una determinada oferta para colocar en el mercado. Previamente, el alumnado habrá tenido que seleccionar las distintas medidas que podrá utilizar de entre las que se le proponen ya que no todas son medidas de peso. En este caso debería realizar una búsqueda de información en Internet para obtener aquellas que realmente pueda utilizar en el puesto del mercado.

Otra información que deberá localizar el alumnado en esta ocasión será el precio de alguno de los tipos de carne para confeccionar su cartel. Para ello, también deberá hacer un cambio de medidas a aquella que vaya a utilizar de entre las que se le proponen. Evidentemente, cada alumnado podrá confeccionar el cartel de la forma que mejor considere: lápices, rotuladores, programas de tratamiento de imagen, composiciones con imágenes, etc. El producto físico final, queda abierto a la imaginación y las destrezas de cada alumno o alumna.

No todos los carteles deben ser iguales. Es más, lo probable es que todos los carteles obtenidos sean diferentes. Para realizar esta tarea, el alumnado debe buscar información, seleccionar la adecuada, manejar otras medidas que en la actualidad no se utilizan y obtener información matemática de un objeto audiovisual.

Al igual que las tareas que se recogen a lo largo del itinerario, ésta puede ser realizada de forma individual o por grupo, quedando a criterio del profesorado la forma más conveniente.

Además de la tarea inicial de cada unidad, dentro de los contenidos propiamente dichos de cada unidad, aparecen gran cantidad de tareas. Así mismo, al final de cada unidad también se recoge una con la que el alumnado

deberá demostrar la forma en que utiliza todos los contenidos estudiados en la unidad, además de los que poseía anteriormente, para conseguir solucionar la tarea.

Por otra parte, tanto en las actividades de ampliación como en las de refuerzo se recogen nuevas tareas con las que atender a la diversidad del alumnado en el aula. Concretamente, en la imagen 4 podemos observar la tarea de profundización de la unidad 1 que hace referencia a la interpretación del recibo de la luz de la casa de cada alumno/a en particular y al consumo eléctrico y su relación con el medioambiente




Imagen 4. Tarea de ampliación de la unidad 1.

En esta ocasión, en la tarea se les indica:

*¿Has visto el recibo de la luz que llega a tu casa?*

*¡Vaya lío! ¡Qué baile de cifras!*

*¿Sabías que utilizando la fracción como proporción y como porcentaje podrías interpretarlo mejor?*

*Vamos a intentarlo. Coge el último recibo de la luz que tengas en tu casa. Es parecido al que aparece en la imagen de la derecha. Si quieres comenzar a practicar te ofrecemos uno genérico en el siguiente enlace:*

*Ahora comenzaremos a estudiar y desmenuzar el recibo. Para ello realiza las actividades que te proponemos:*

*1.- Realiza un texto en el que expliques la forma de calcular el dinero que se debe pagar en la factura de la luz.*

*2.- Haz un resumen del gráfico de los consumos anteriores que aparece en la parte delantera del recibo. ¿Qué destacarías de ese gráfico? ¿Crees que es coherente?*

*3.- Respecto al origen de la electricidad que se ha utilizado ¿Qué opinión te merece? Compártela con tus compañeros del aula.*

*4.- Según la información que aparece en tu factura, ¿Cuánta energía has consumido este mes procedente de energías renovables? ¿Y de energía procedente de centrales nucleares?*

*5.- ¿Cuántos miligramos de residuo radiactivo generaste en el mes de septiembre?*

*6.- ¿Cuántas horas al día está encendido el televisor de tu casa? ¿De qué potencia es?*

*7.- Sabiendo los datos anteriores investiga cómo puedes calcular el consumo diario de electricidad que tiene el televisor. ¿Cuántos miligramos de residuo radiactivo genera al mes este aparato en tu casa? ¿Y en un año? ¿Y en tu vida?*

*8.- Realiza un esquema o mapa conceptual que te ayude a explicarle a tus compañeros los apartados anteriores de forma científica.*

*9.- Busca información sobre los residuos radiactivos. ¿Qué piensas sobre tu gasto eléctrico en relación a estos residuos? Debate con tus compañeros de aula sobre este tema.*

El alumnado debe hacer un estudio minucioso del recibo de la luz que llega a su casa. Ese estudio deberá utilizarlo posteriormente para compartir los resultados obtenidos con el resto de sus compañeros. Observamos que el alumnado debe realizar labores de investigación con las características del televisor de su casa y cómo esas características influyen en tener un mayor o menor consumo de electricidad. La resolución de la tarea conlleva relacionar los datos que se ofrecen en la factura de la luz con la realidad más inmediata que rodea al alumnado, haciéndoles ver que acciones indirectas pueden estar provocando acciones directas en la naturaleza. Tras la realización de esta tarea, no cabe duda de que el alumnado valorará desde otro punto de vista acciones cotidianas que realiza en su casa.

Por otra parte, en la imagen 5 podemos observar la tarea de refuerzo correspondiente a la unidad 8 del itinerario. Una unidad que se dedica a los meridianos, paralelos y husos horarios. En esta ocasión, en la tarea el alumnado debe hacer un recorrido por los distintos mundiales de fútbol celebrados desde España 82 hasta que la selección española consiguió proclamarse campeona del mundo.



Imagen 5. Tarea de refuerzo de la unidad 8.

Después de la presentación de la tarea que observamos en la imagen 5, se le pide al alumnado lo siguiente:

*Una vez conseguido el objetivo, Roberto estuvo meditando sobre las horas tan extrañas a las que había estado viendo partidos de la selección en los mundiales que se habían celebrado desde 1982 hasta entonces. Intentó recordar los distintos países en los que se habían celebrado, pero tras casi 30 años su memoria daba claros signos de flaqueza.*

*En este caso te vamos a pedir que ayudes a Roberto a recordar lo vivido para que pueda saborear con más profundidad el logro conseguido. Para ello vas a elaborar una presentación en Impress con tantas diapositivas como mundiales se celebraran entre 1982 y 2010 (incluidos estos dos años). Además, deberás añadirle una diapositiva al principio y otra al final. La primera será un diapositiva de presentación en la que aparecerá tu nombre. Cada una de las siguientes diapositivas estará dedicada a un mundial, debiendo contener la siguiente información: lugar de celebración, fase a la que llegó España, alguno de los partidos jugados por la selección, el resultado obtenido, el lugar de celebración del partido, las coordenadas geográficas de ese lugar, el entrenador de la selección en ese mundial y la hora a la que Roberto vio alguno de los partidos de ese mundial sabiendo que se jugó a las 18:00 horas en el país de celebración. En la última diapositiva, recogerás una dedicatoria a Roberto.*

*Posteriormente también realizarás un mapa en Google Maps colocando una marca en al menos una de las ciudades en las que jugó España en cada mundial. En la marca indicarás en que año se jugó ese mundial, la hora a la que Roberto tuvo que ver el partido y las coordenadas geográficas de la ciudad. El mapa lo compartirás con tu profesor o profesora.*

*Para finalizar subirás la presentación a Internet y crearás una entrada en el blog de aula en la que incrustarás la presentación y la dirección del mapa que has creado en Google Maps. A esta entrada debes colocarle dos etiquetas. La primera será la formada por la primera letra de tu nombre y tu primer apellido y la segunda será la palabra mundial.*

Como se observa en la tarea, el alumnado deberá utilizar los recursos y conceptos aprendidos a lo largo del tema para poder conseguir resolver la tarea. Buscar la información necesaria de cada uno de los mundiales, localizar las coordenadas geográficas de los lugares de celebración, crear un mapa en Google Maps y utilizar los husos horarios de forma conveniente para conocer el horario en el lugar en el que se encuentra el personaje de la tarea, etc. Además, para finalizar, el alumnado debe dar a conocer los resultados de su tarea a través del blog de aula.

Ya dentro de los contenidos se recoge una gran cantidad de tareas con las que se desarrollan las competencias básicas en el aula de matemáticas. Tareas de lo más variado y con alguna peculiaridad que la distingue claramente. Con la gran cantidad de tareas que aparecen, el profesorado podrá seleccionar en cada momento aquellas que considere más conveniente que realice el alumnado, de entre todas las que se ofrecen en cada unidad. Además, muchas de ellas se prestan a ser adaptadas a contextos concretos con los que el alumnado se puede sentir más identificado.

De entre esas tareas y a modo de ejemplo una de las tareas que aparece en los contenidos de la unidad dedicada a la probabilidad. En este caso, el enunciado de la tarea es:

*¿Te han hecho una encuesta alguna vez en casa? Seguramente la respuesta sea no. Por eso, te habrás preguntado de dónde salen las estadísticas que nos muestran en los medios de comunicación. La verdad es que es bastante complicado que seas entrevistado para una de estas encuestas. ¿Por qué? Intentaremos explicarlo a través de esta tarea.*

*Imagina que van a realizar un estudio sobre la altura de las personas para que los fabricantes de camas ajusten las medidas de las mismas al tamaño real de la población. Vamos a formularnos varias preguntas acerca de esta hipotética encuesta.*

*Lo primero que debes conocer es que cuando se realizan encuestas en casa, previamente se ha realizado un sorteo para conocer las casas en las que se va a realizar la encuesta. Esto se conoce como muestreo. Supongamos que en la provincia en la que vives se ha realizado un sorteo entre los distintos pueblos que la componen, para hacer una*

*encuesta. ¿Qué probabilidad hay de que haya salido seleccionada tu localidad?*

*Si dentro de tu localidad, ha salido agraciada la calle en la que vives, ¿Qué probabilidad hay de que sea seleccionado el portal o vivienda en la que vives?*

*Si dentro de tu vivienda se realiza un sorteo entre las personas que habitáis en ella, ¿qué probabilidad hay de que la encuesta te la hagan a ti?*

*Realiza un vídeo utilizando en el que expliques las respuestas a las anteriores preguntas y justifiques cada una de esas respuestas. En el vídeo deberás indicar además si crees que es fácil que seas elegido para una encuesta y por qué. Sube el vídeo a Internet y realiza una entrada en el blog de aula en la que cuentes las dificultades que has encontrado a la hora de resolver la tarea. Incrusta en la entrada tu vídeo. La entrada deberá tener dos etiquetas. La primera será la primera letra de tu nombre seguida de tu primer apellido (por ejemplo, de Mariano Real será mreal) y la segunda será el nombre de tu localidad.*

Como podemos comprobar, en esta tarea el alumnado debe hacer uso de todos sus conocimientos y deberá buscar información, que en cada caso, se ajusta a ese alumno o alumna en concreto. La localidad en la que reside, y la dirección de su hogar aderezan esta tarea proporcionando uno datos de contexto únicos para cada alumno o alumna. En esta ocasión, el alumnado deberá elaborar un vídeo con la resolución de la tarea. Un vídeo en el que deberá narrar paso a paso los motivos de los resultados que indica. Ese vídeo lo podrá a disposición de todo el grupo a través del blog de aula. Al igual que en el resto de tareas, el profesorado podrá decidir en cada momento hacerla con el alumnado de forma individual o grupal. Evidentemente, para esto segundo deberán ponerse de acuerdo en cada grupo para elegir la vivienda que van a utilizar para su estudio.

## REFERENCIAS.

REAL PÉREZ, M. (2010). *Tratamiento de la información y competencia digital en el área de matemáticas*, SUMA+ 64, 71–80.

# PROPUESTAS PARA EL DOCENTE DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA: MATEMÁTICAS Y CIENCIAS A TRAVÉS DE LA LITERATURA INFANTIL.

**R. Fernández Cézar,**
*Facultad de Educación de Cuenca, Universidad de Castilla La Mancha,*
**C. Aguirre Pérez,**
*Facultad de Educación de Cuenca, Universidad de Castilla La Mancha,*
**C. Harris,**
*Facultad de Educación de Cuenca, Universidad de Castilla La Mancha,)*

## RESUMEN.

Este trabajo muestra los resultados obtenidos en la búsqueda de libros de literatura infantil a partir de los cuales pueden trabajarse la competencia matemática y la de conocimiento del medio natural, además de otras áreas de las recogidas en el currículo oficial de educación infantil y primaria en Castilla la Mancha. Nos centramos en las primeras etapas de la educación, la Educación Infantil y el primer ciclo de Educación Primaria y se incluyen catalogados libros de literatura infantil, reflexiones de los autores sobre los mismos, y actividades y propuestas para su uso en el aula para los docentes de estas etapas de la educación.

**Nivel educativo**: Educación Infantil, Educación Primaria, Formación de Maestros.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Existen distintas definiciones de competencias que se recogen en todos los sistemas educativos, en países de Europa y de fuera de ella. Aunque esas definiciones tienen diferentes matices, en su mayoría se relacionan con lo que el estudiante va a saber, comprender y ser capaz de llevar a la práctica. En Iberoamérica, entorno geográfico en el que se desarrolla el proyecto *Tuning* se describen como *una combinación dinámica de conocimientos, comprensión, habilidades y capacidades. La mejora de estas competencias es el objeto de los programas educativos. Las competencias cobran forma en varias unidades de curso y son evaluadas en diferentes etapas.*

Situándonos en Europa, y concretamente en España, el currículo de educación primaria recoge ocho competencias, a las cuales en Castilla La Mancha [1] se añade una, incluyendo aquí por lo tanto nueve competencias básicas a adquirir mediante las asignaturas que se imparten a lo largo de esta etapa educativa. Entre esas asignaturas, las matemáticas han sido tradicionalmente una de las más complicadas para educadores, padres y estudiantes. Es considerada una asignatura de tipo instrumental y fundamental en la Educación Primaria en

España y en todos los sistemas educativos de su entorno, como la lengua del país o región. También el conocimiento del medio es importante en el desarrollo intelectual de los estudiantes: junto con las matemáticas, el conocimiento del medio ofrece al alumno estrategias de razonamiento para que pueda "aprender a pensar" y "aprender a aprender".

La educación primaria, primer tramo de la educación obligatoria en España, tiene como propósito que los estudiantes alcancen las "competencias básicas" que le permitan ser un ciudadano con recursos intelectuales suficientes para desenvolverse en su vida académica y cotidiana en la edad adulta. La legislación que en Castilla-La Mancha rige la educación primaria, el decreto 68/2007 de 1 de junio, recoge un grupo de competencias básicas entre las que se encuentra la "competencia de comunicación lingüística" en primer lugar, la "competencia matemática", en segundo, y la "competencia del conocimiento y la interacción con el mundo físico", en tercero.

La vía para adquirir estas competencias aparece desglosada en objetivos, contenidos, y criterios de evaluación. La adquisición de la competencia en comunicación lingüística puede resumirse en la capacidad de leer, entender y producir textos y mensajes orales de distinta naturaleza: narrativos, periodísticos, poéticos, tanto en lengua española como extranjera. La adquisición de la competencia matemática supone dotar al alumno de los conocimientos y destrezas necesarios para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos; que puedan, a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, llegar a resultados que le permitan comunicarse y hacer interpretaciones y representaciones de la realidad. Esto quiere decir, descubrir que las matemáticas están relacionadas con la vida y con las situaciones que lo rodean, más allá de la escuela. Por otro lado, la adquisición de la competencia del conocimiento y la interacción con el mundo físico se traduce, en definitiva, en que el alumno sepa actuar de forma coherente en ámbitos de la salud, actividad productiva, consumo, y de interpretar el mundo dedicando sus esfuerzos, dentro de sus posibilidades, a asegurar el uso responsable de los recursos naturales, el cuidado del medio ambiente, el consumo racional y responsable, y la protección de la salud individual y colectiva.

Resumiendo, el papel de la etapa de educación primaria en el sistema educativo español consiste en desarrollar en el alumnado la habilidad de desenvolverse en situaciones de su vida cercana en las que tenga que emplear los conocimientos adquiridos en la escuela. Para que suponga un aprendizaje a medio y largo plazo, nos parece que esa adquisición debe llevarse a cabo de forma no compartimentada confiando en que los alumnos encuentren conexiones entre las materias que estudian, sino de forma interdisciplinar, que es como el ser humano aprende en la vida real. Este razonamiento es soportado en la literatura tanto para niveles preuniversitarios (Ortiz Hernández, 2006) como para formación de maestros a niveles universitarios (Altava Rubio et al., 1999) desde hace tiempo, y es también compartido por los autores de este trabajo, por lo que tratamos de contribuir con él a ese tipo de aprendizaje.

### 1.1. ANTECEDENTES.

Buscar la intersección entre matemáticas, ciencias y literatura puede parecer una buena idea, pero hay que dejar patente que la pretensión de realizar el estudio de las matemáticas y las ciencias a través de la literatura no es nuevo.

Algunos investigadores, incluso de dentro de nuestra universidad, han trabajado en esta visión de la enseñanza de las matemáticas a través del cuento o la novela, como Marín Rodríguez (2007) con el Proyecto Kovalevskaya. Estas investigaciones tratan de actuar sobre el dominio afectivo del estudiante (Gil et al. 2005) y evitar las barreras que surgen cuando ellos perciben lo que estamos enseñando como algo muy alejado de sus vidas, descontextualizado. Esta no es solo una situación de enseñanza-aprendizaje que se dé en las matemáticas, sino también en otras disciplinas, como ciencias y lenguas extranjeras. También se sabe que, al menos en las matemáticas, como recoge el Informe Cockcroft (1985), la edad a la que se hacen más evidentes esas reticencias está en torno a los 11 años. Y sobre esas edades han trabajado los estudios a los que anteriormente nos referíamos.

En el caso de las ciencias, la situación es diferente. El nivel en el que estas se imparten en la educación primaria no incluye las subdivisiones entre las ciencias naturales y sociales, y de las primeras en física, química, geología y biología. Es habitual encontrar para niveles de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), bachillerato o superiores, estudios de alguna de esas ciencias por separado, en combinación con la literatura, por ejemplo el estudio de Palacios (2007) particularmente para la física y la literatura de ciencia ficción. También hay algunos trabajos hechos sobre la química y la literatura, como el de Mata (2006). Pero para el resto de ciencias naturales, biología y geología, no se encuentra literatura relevante, creemos que por ser de más fácil visualización y contextualización, así como porque requieren de menor abstracción que la física, la química o las matemáticas.

Este trabajo pretende aportar ideas para que el docente acometa la tarea de enseñar en edades tempranas las matemáticas y las ciencias contextualizando el aprendizaje, que es como los expertos dicen que se aprende a largo plazo (de Guzmán Ozámiz, 2007) tomando libros de literatura infantil como punto de partida. Se pretende con ello aportar una forma de trabajar en el aula tendente a vencer las reticencias frente a estos contenidos que se observan en investigaciones realizadas con alumnos de edades posteriores en la educación primaria y/o secundaria obligatoria en nuestro país.

## 2. METODOLOGÍA Y OBJETIVOS.

Este es un estudio de naturaleza exploratoria sobre colecciones y ejemplares de literatura infantil en los que puedan encontrarse incluidos de manera explícita contenidos de conocimiento del medio y matemáticas, y por lo tanto puedan ser empleados en el aula. De esta forma, los docentes podrán sacar el máximo partido a los libros al abordarlos de manera interdisciplinar.

El trabajo se ha hecho analizando literatura infantil en lengua española, y, en menor medida, literatura infantil en lengua inglesa, adecuada para su uso en la etapa de educación infantil y en el primer ciclo de educación primaria, donde la enseñanza puede ser desarrollada mediante el cuento o relato corto como composición literaria, o mediante una obra más larga, estableciendo capítulos. Es

sabido que hay algunas obras literarias de este tipo no solo en castellano, sino también en inglés. En ellas se plantean situaciones con un lenguaje literario rico, entendible por el niño, que le aporta ocasiones en las que poner en práctica su producción lingüística tanto oral como escrita, que fomenta su creatividad y que tratan en alguna medida los contenidos de matemáticas y ciencias que se espera que adquiera, incluyendo el vocabulario y las construcciones lingüísticas relativas a los temas que tratan.

Los objetivos perseguidos han sido los siguientes:

1. Investigar y recopilar cuentos y/o relatos cortos que existen en lengua castellana e inglesa.
2. Analizar su calidad científico literaria y su adecuación al currículo de Castilla-La Mancha, estableciendo unos baremos objetivables.
3. Clasificar por niveles, editoriales, autores y lenguas las obras encontradas en tablas, distintas para cada lengua, para que puedan ser empleadas tanto por docentes que trabajan en lengua española como por aquellos involucrados en el programa bilingüe de la Junta de Comunidades de Castilla La Mancha.
4. Preparar guías de uso para los materiales encontrados que cumplen estas características.

Para conseguir el objetivo 1, se han consultado libros en diversas bibliotecas públicas municipales y universitarias de Cuenca, Valencia y Madrid, además de la Biblioteca Nacional. También se han comprado 35 ejemplares con fondos del proyecto HU20112284 financiado por la UCLM, que forman actualmente parte de los fondos del Centro para la Enseñanza y la Promoción de la Literatura Infantil (CEPLI) en nuestra universidad.
Para llevar a cabo la fase 2 y desarrollar los descriptores del baremo objetivable se han tenido en cuenta los documentos que rigen la educación Infantil y primaria en Castilla La Mancha, los decretos 67/2007 y 68/2007 respectivamente. De manera resumida se muestran en la siguiente tabla, tabla 1, para las áreas de matemáticas y conocimiento del medio natural y social.

| | **MATEMÁTICAS** | **CONOCIMIENTO DEL MEDIO** |
|---|---|---|
| **EDUCACIÓN INFANTIL** | Acceder mediante manipulación y conteo al concepto y representación de número.<br>Adquirir la idea de suma como adición y resta como sustracción.<br>Construir del pensamiento lógico en la resolución de problemas de juntar y quitar.<br>Manejar el orden y secuencias atendiendo a uno o dos criterios, cuantificadores de tiempo y espacio y situación en el mismo. | Explorar su mundo cercano con relación al espacio tiempo en situaciones de juego.<br>Reconocer el nombre y cualidades de partes del propio cuerpo y del de los otros.<br>Adquirir esquemas de relación cada vez más complejos.<br>Interactuar con el mundo que le rodea: construir hábitos de supervivencia y salud, evitar riesgos, conocer los efectos que su actuación produce y actuar con respeto.<br>Localizar y orientarse en espacios cotidianos, situarse en el tiempo y localizar acontecimientos relevantes. |
| **EDUCACIÓN PRIMARIA** | La comprensión, representación y uso de los números: operaciones (de adición, sustracción, multiplicación e introducción a la división) y medida. | El conocimiento y defensa del hombre y el resto de los seres vivos: la diversidad de los seres vivos; la salud y el desarrollo personal. |

| | | |
|---|---|---|
| | Interpretación y representación de las formas planas y la situación en el espacio.<br>Recopilación de información y resolución de problemas de su vida cotidiana incluyendo la explicación verbal de los mismos. | El conocimiento, construcción y conservación del entorno ambiental, social y cultural.<br>Elaboración de sencillos proyectos apoyándose en materiales con explicación verbal de los mismos.<br>Conciencia de derechos y deberes, de igualdad entre todos, reconocimiento de miembros de la familia, de profesiones del entorno social y cultural.<br>Producción de textos básicos. |

Tabla 1: Contenidos por área y etapa incluidos en el decreto 67/2007 para educación infantil y en el 68/2007 para educación primaria.

Para realizar la fase 3 se han recopilado en una tabla los libros analizados. Se han catalogado teniendo en cuenta los descriptores de la fase 2, y además otros, que son la editorial a la que pertenece el libro, el autor, la edad a la que va dirigido y la calidad literaria de la obra.
Para llevar a cabo la fase 4 se ha contado con esquemas publicados en páginas web que se han consultado y usado como muestra para realizar las guías de uso en el aula. Se ha completado para tres ejemplares analizados: uno en español para la etapa de educación infantil (De cómo el tigre aprendió a contar), otro para el primer ciclo de educación primaria (Los números son sorprendentes), y otro en lengua inglesa (The Bad tempered Ladybird). No ha podido completarse esta fase para todos los ejemplares analizados, dado el alto número de los mismos. Perseguimos que sirvan de guía a los docentes, y seguir preparando el resto en los próximos meses.

# 3. RESULTADOS.

Se ha realizado una búsqueda exhaustiva de libros para el rango de edades de nuestro estudio, educación infantil y el primer ciclo de primaria, de 3 a 8 años. La mayoría de estas obras se han adquirido con los fondos del proyecto antes mencionado para su análisis desde el punto de vista matemático, científico y literario. Algunas de las obras analizadas no se han encontrado en el mercado y no se han podido adquirir, por lo que se han consultado en los fondos de diversas bibliotecas municipales y/o universitarias en las ciudades de Cuenca, Madrid y Valencia.
Se ha elaborado unas tablas de datos en las que se incluye una clasificación sobre cada obra relativa a: idioma (español/ inglés), título, autor, editorial, disciplinas que se trabajan (matemáticas, conocimiento del medio natural y social), otras disciplinas a trabajar, ciclo al que va dirigido (infantil y/o 1$^{er}$ ciclo de primaria), y se ha incluido un apartado de *observaciones*. En este último apartado incluimos, por ejemplo, información referente a si la edad a la que se recomienda el libro por habilidad lectora del niño se corresponde con aquella a la que van dirigidos los contenidos matemáticos o de conocimiento del medio que se tratan o aparecen, y también si las obras analizadas son verdadera literatura infantil, o libros que carecen por completo de calidad literaria.
Las tablas se adjuntan en los anexos 1, 2 y 3, que incluyen los libros para educación infantil en español, para educación primaria en la misma lengua, y en inglés para ambos ciclos, respectivamente.

## 3.1. LIBROS CATALOGADOS.

| Título | Autor | Editorial | Disciplina: Matemáticas (mat) Conocimiento del medio natural y social (cmn, cms) | | | Otros/ Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | mat | cmn | cms | |
| Colección "El Zoo de los números" | María Caparrós | Ed. Bruño (Ana I. Jiménez) | Recuento, símbolo del número y relación número-cantidad. | Animales como personajes: fauna variada | | Aprender a leer. Vocabulario |
| Colección "Mi primer libro" Contrarios (1)<br><br>Formas (2)<br><br>1 2 3 (3) | Ruth Thomson | Anaya | (1)Tamaños y dimensiones: grande/pequeño; estrecho/ancho.<br>(2) Figuras planas, su características y particularidades; figuras en volumen, descripción.<br>(3) Recuento y símbolos numéricos. Relación cantidad -símbolo | | | Vocabulario relacionado con tamaños, formas, partes de las figuras, números. |
| Colección "Mi mundo y yo" Diez abejas en el naranjal (1) La granja de Simón (2) | (1)Marilar Aleixandre (2)Enric Lluch | Círculo de lectores | (1)Números: recuento y símbolo | (1)Insectos (2)Animales domésticos de granja. Formas de vida de los mismos. | | Verso, colores. |
| Colección "A través de la ventana" (color azul: nociones y colores) ¿Dónde está el cuadrado?(1) ¿Dónde está el triángulo?(2) ¿Dónde están los círculos? (3) | (1)Pascale de Bourgoing, Celine Bour<br><br>(2)Pascale de Bourgoing, Colette Camille<br><br>(3)Pascale de Bourgoing, Colette Camille | La Galera | Formas planas, reconocimiento y partes | Animales domésticos y diferentes entornos | | Expresión oral y escrita. Vocabulario asociado |
| Colección "Descubrimos" Para qué sirven los dientes (1) Quién sigue a un elefante (2) Uno, dos, tres(3) | (1) Gusti (2) Teresa Novoa (3) Guadalupe Espejo | Alfaguara infantil | (1)Números y grafía<br><br>(2,3)Recuento y símbolo | (1)Animales de distintos ecosistemas: terrestres y marinos. (2,3) Animales variados | | Expresión oral y escrita. Vocabulario del tema. Verso y prosa. Rima. |
| El laberinto del pequeño indiecito | No aparece | Edaf | Orientación (izda/dcha; arriba/abajo; cerca/lejos) | | | Recompensa al trabajo bien hecho. Autoevaluación.(llega al punto final o no). |
| Buenas noches dulces mariposas | María Casas, Mónica Pérez-Campdepadrós | Beascoa, Random House, Mondadori S.A. | Recuento, iniciación a suma y resta | Animales: Insectos | | Colores. Verso. Expresión oral y escrita. |

Tabla 2: Libros para Educación Infantil (4-5 años).

| Título | Autor | Editorial | Disciplina: Matemáticas(mat) Conocimiento del medio natural y social (cmn, cms) | | | Otros/ Observaciones | Inf/ Prim | Ciclo o nivel. Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | mat | cmn | cms | | | |
| La amiga más amiga de la hormiga Miga | E. Teixidor | SM | Direccionalidad(arriba/abajo, subir/bajar) Comparación de tamaños: grande/ pequeño, ancho/angosto Secuencias: adelante/ atrás | Clasificación animales: vertebrados/ invertebrados. Diferenciación insectos alados y sin alas. | | Lingüística: formación de palabras. Contrarios. Prosa/verso. Actitudes: visión positiva del trabajo en equipo; actitud de respecto a uno mismo y a los demás. | 5-7 años | Contenidos: 5-7 años.<br><br>Lector: 3er ciclo<br><br>Conclusión de uso: emplear como punto de partida y adaptar a cada necesidad. |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Historia del uno | F. Krahn y M.L. Uribe | Destino infantil y juvenil | Números 1-10. Grafía y relación con recuento. Par/ impar | Distintos ecosistemas: montes, ríos, desiertos, playas. | | Verso. Actitudes hacia otros diferentes a uno mismo. | 4-6 años | Inf |
| Cuando la Tierra se olvidó de girar | Fina Casalderrey | SM | NO | Movimientos terrestres y estaciones. Temperatura: frío/calor. Tiempo: día /noche. | | | 5-7 años | 1er ciclo.<br><br>Promover deducciones sobre contenido del libro. (Algunos comentarios inducen a concepciones erróneas) |
| Para Elisa, tres lobos y un cerdito feroz | Claudi Alsina | Proyecto Sur de ediciones S.L. | Situaciones de la vida cotidiana en las que aparece vocabulario matemático: orden (dcha/izda); tamaño (alto/bajo); ordinales (primero, segundo…) Situaciones en las que encontramos números, unidades de medida. | | | Creatividad. Verso/prosa. | 2º-3er ciclo Primaria | Lector: a partir de 8 años.<br><br>Contenidos: 1er ciclo |
| El sapo y la rana se saltan la evolución | Antonio Rodríguez Almodóvar | Colección cuentos de ciencia | | La evolución de las especies. Conservación del medioambiente | | Actitud frente al medioam biente. | 2º-3er ciclo Primaria | |
| De cómo el tigre aprendió a contar | Janosh | Kokinos, 2003 | Números, recuento y grafía. Unicidad de cada elemento en un conjunto (no contar dos veces) Comparaciones: el más grande. | Animales de distintos ecosistemas: terrestres (de granja o salvajes) y marinos. | | Amistad | 4-6 años | Inf. |
| El gran libro de las matemáticas del Ogro feroz | Gregory Oster | Ediciones Oniro | Plantea situaciones cotidianas que suponen el empleo de las operaciones matemáticas con números naturales | | | Vocabulario. Expresión oral y escrita. | 8-12 años | 2º-3er ciclo Primaria |
| Multiplicaciones a toda máquina | David Blanco Laserna | Nivola colección numeriverso | | | | | | No es una novela, sino juego en forma de libro que cuenta una historia y que implica trabajo matemático para seguir avanzando. |
| Las sumas que vinieron del espacio | David Blanco Laserna | Nivola Colección numeriverso | | | | | | No es una novela, sino juego en forma de libro que cuenta una historia y que implica trabajo matemático para seguir avanzando. |
| El dragón que no sabía sumar ni restar | David Blanco Laserna | Nivola Colección numeriverso | | | | | | No es una novela, sino juego en forma de libro que cuenta una historia y que implica trabajo matemático para seguir avanzando. |
| Así se aprenden las tablas de | Susana Obrero Tejero | Colección El rompecab | Tablas de multiplicar a través de una | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| multiplicar | | ezas. | historia con personajes: Edu. | | | | | |
| El fantasma que odiaba las matemáticas | Rafael Ortega de la Cruz | Nivola: Lucía y Bruno | Numeración consecutiva, de 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4 y 5 en 5. Problemas simples de sumas y restas | | Geografía | Amor por los libros. Valor de la amistad. | 1er-2º ciclo Primaria | |
| Juana sin miedo | | Pizca de sal | | Animales mamíferos de diferentes ecosistemas: selva, sabana, domésticos, marinos. Concienciación del peligro de extinción de los animales. | | Amor por los libros y su empleo para aprender. Actitud hacia los animales. | 2º ciclo Primaria | |
| Números pares, impares e idiotas | Juan José Millás. | SM: Barco de vapor | Distintas ideas matemáticas: conjunto vacío, infinito, múltiplos, etc. | | | | 3er Ciclo | Nível: a partir de 9. Matemático algo inferior. |
| El Cero | --- | Colección Matemática Pequeña | Grafía de números de 0 a 8. Semejanzas y diferencias. | | | Aceptación de uno mismo; afirmación y autoestima individual y de grupo. Mayúscula/minúscula | Infantil-1er ciclo Primaria | |
| Los números son sorprendentes | Claudi Alsina-Elisenda Solà-Niubó | Colección Matemática Pequeña | Grafía de números de 0 a 10. Relación número y cantidad | Partes del cuerpo; la família. | | Respeto a personas mayores y sabiduría. | Infantil-1er ciclo Primaria | |
| Los Pares | ------ | Colección Matemática Pequeña | Grafía de números; semejanzas y pares. | | | Mayúscula/minúscula | Infantil-1er ciclo Primaria | Error inducido: incluye números del 1 al 10, y no todos son pares. |
| Treinta y tres son treinta y tres | Carlo Frabetti | SM: Barco de Vapor | Grafía de números. Representación en el ábaco. Los números en situaciones de la vida cotidiana. Doble, triple, números capicuas. | | | | 1er ciclo Primaria | No tiene riqueza literária, más allá del vocabulário que introduce. |
| Al-Jwarizmi y la magia de las matemáticas | Jorge de Barnola | Colección El Rompecabezas | Historia del sistema de numeración hindoarábigo | | | La España musulmana | 2º ciclo Primaria | Mucho vocabulário de la época. |

Tabla 3: Libros para 2º ciclo de Educación Infantil y 1er ciclo de Educación Primaria.

## 3.2. ACTIVIDADES DE AULA.

Una de las propuestas es la incorporación de los libros analizados como material de clase en el caso de Educación Infantil, y como ejemplares que formen parte del del Plan de lectura o Proyecto lector desarrollado para todos los alumnos del centro, comenzando en el primer ciclo de Educación Primaria. Previa observación de las *guías de uso* que incluimos en las figuras 1 y 2 para los libros antes mencionados, y que permitirán contextualizar el libro y sacarle el máximo partido, los docentes podrán promover el desarrollo de la actividad de lectura del libro despertando una motivación inicial y prosiguiendo con los siguientes pasos:

1. Motivación a la lectura del libro elegido, analizando la portada del mismo, el nombre del autor y la contraportada. Realizar un debate dirigido en el que se incluirán preguntas como: ¿cómo nacieron los números?, ¿los inventó alguien?, ¿sabéis qué es un sistema de numeración y para qué sirve? Para ir preparando el análisis del

contenido matemático del libro. De igual forma si tratara sobre figuras geométricas se variarían las preguntas sobre ese tema.

2. Lectura del libro: concedemos a los alumnos un tiempo para que lean el libro, si pueden hacerlo solos, o lo leemos juntos en clase. Como tratamos con alumnos de 1er ciclo de educación primaria, es más apropiada la lectura en clase. Les sugerimos que apunten lo que les llame la atención, o lo vamos detectando a lo largo de la lectura. También pueden ser necesarias preguntas para detectar lo que les resulta de más interés. Les hacemos ver qué matemáticas hay: números, formas geométricas, tamaños y dimensiones, comparaciones, etc
3. Análisis de los sucesos importantes acontecidos en el libro, asegurándonos la comprensión básica de la historia, trabajando así la comprensión lectora. Nos aseguramos también de detectar con los alumnos los contenidos matemáticos que encontramos, haciendo hincapié en cómo surgen y cómo los emplean los personajes.
4. Destacamos también los otros contenidos o valores que se encierren en la historia transmitida por el libro elegido: compañerismo, amistad, trabajo en equipo, respeto, aceptación del diferente, etc.
5. Finalizaremos haciendo actividades que pongan en práctica los contenidos matemáticos y de conocimiento del medio natural incluidos en el libro, por ejemplo, actividades sobre contar colecciones, ordenar colecciones, inventar canciones con los números, repetir nombres de animales que aparecen en la historia, cantar canciones en las que aparezcan partes del cuerpo humano, etc.




Figura 1: Guía de uso del libro para Educación Infantil: De cómo el tigre aprendió a contar (4-6 años).

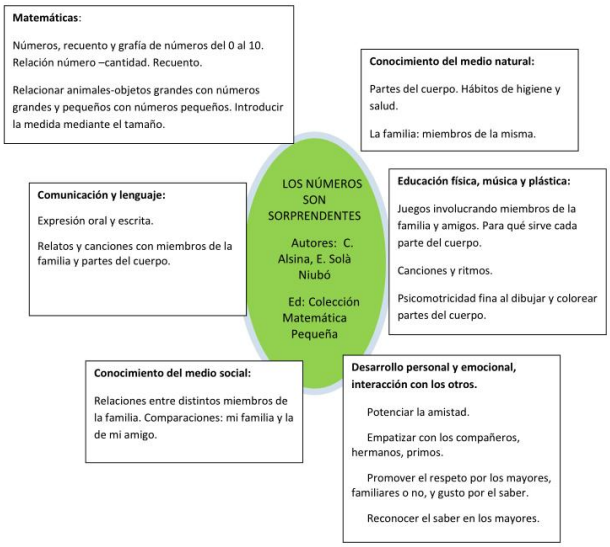



Figura 2: Guía de uso del libro para Educación Primaria: Los números son sorprendentes (6-8 años).

# 4. CONCLUSIONES.

Se ha procedido a la elaboración de una clasificación de datos sobre libros de literatura infantil (tablas 2 y 3) que se muestran en forma de tabla y se catalogan según sus características literarias, contenidos de matemáticas y conocimiento del medio natural y social, y se añaden observaciones sobre otros contenidos.

Algunos de los libros analizados no son en absoluto literatura, como los de la editorial Nivola colección Numeriverso del autor David Blanco Laserna. Son meras instrucciones a seguir para alcanzar un objetivo final, como en un juego, pero en absoluto hay contada una historia de ficción o real.

En cuanto a algunas otras obras, como el libro Historia del Uno, de F. Krahn y M.L.Uribe, plantean situaciones que nunca pueden ser consideradas como obra literaria por lo artificiales que son: nunca un uno puede ser protagonista de una historia. Creemos a este respecto que para que una obra sirva para estudiar las matemáticas y sea a la vez un obra literaria, no debe centrarse en mostrar aspectos de la fase gráfica o simbólica del aprendizaje matemático, que son artificiales y creadas por el ser humano, sino en la concreta o manipulativa que es la que aparece en la vida cotidiana. Plantear situaciones así, queriendo ver símbolos matemáticos en nuestro entorno natural o urbano, es como si pretendiéramos ver letras y no objetos. Por lo tanto, un aspecto del aprendizaje matemático que siempre se va a poder hacer aparecer en libros será aquello que suponga la resolución de una situación problema, de mayor o menor dificultad. Y eso es lo que podría buscarse en la literatura. Cualquier otra cosa es algo demasiado artificial. La simbología se debería introducir posteriormente con el maestro, pero no esperar que aparezca en el libro.

Por último, se recomienda la inclusión de los títulos que aparecen en las tablas 2 y 3 en el Plan lector del centro para ser empleados en el aula siguiendo los pasos indicados en la sección 3.2, y partiendo de las guías de uso que se han preparado para dos libros de los analizados: uno para Educación Infantil y otro para primer ciclo de Educación Primaria. Para el resto se preparará en los

próximos meses y se incorporará a este trabajo. El propósito es que estos esquemas sirvan para ayudar a los maestros de infantil y primaria a emplear estas obras en sus clases de forma interdisciplinar, contribuyendo así a que la enseñanza se aleje del modelo tradicional compartimentado en áreas o disciplinas y a que puedan implementarse procesos de enseñanza-aprendizaje más globales.

**AGRADECIMIENTOS.**

Este trabajo ha sido realizado con ayuda económica de la Universidad de Castilla-La Mancha, bajo el proyecto HU20112284.

## REFERENCIAS.

[1] DOCM, 68/2007 de 1 de junio, accesible el 14 de febrero de 2012 en http://docm.jccm.es/portaldocm/

[2] DOCM, 67/2007 de 1 de junio, accesible el 14 de febrero de 2012 en http://docm.jccm.es/portaldocm/

ALTAVA RUBIO, V., PÉREZ SERRANO, I., RÍOS GARCÍA, I., (1999). La interdisciplinariedad como instrumento de formación del profesorado, Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado, 2 (1), pp. 243-249.

COCKCROFT, W.H., (1985). Las matemáticas sí cuentan, Editorial: Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

GIL, N., BLANCO, L. J., GUERRERO, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos, Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2, pp. 15-32.

DE GUZMÁN OZÁMIZ, M.(2007), Enseñanza de las ciencias y la matemática, Revista Iberoamericana de educación, 43, pp. 19-58.

MARÍN RODRÍGUEZ, M. (2007). El valor matemático de un cuento, Sigma, 31, pp 11-26.

MATA, R. (2006). Química y literatura, Boletín del Instituto de Investigaciones Bibliográficas de México, XI (1- 2), pp. 227-236. Accesible el 12 de marzo de 2012 en http://www.revistas.unam.mx/index.php/biib/article/view/18964.

ORTIZ HERNÁNDEZ, E. (2006). Retos y perspectivas del currículo integrado, Cuaderno de investigación en la educación, 21, pp. 35-56.

PALACIOS, S.L. (2007). El cine y la literatura de ciencia ficción como herramientas didácticas en la enseñanza de la física: una experiencia de aula, Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 4 (1), pp. 106-122. Accesible el 12 de marzo de 2012 en http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=92040107.

# JUGANDO CON LA CICLOIDE

**Juan Núñez Valdés,**
*Universidad de Sevilla*
**María Luisa Rodríguez Arévalo,**
*Universidad de Sevilla*

## RESUMEN.

En esta comunicación se describe una experiencia pedagógica realizada por los autores en una clase de Matemáticas de 3º de Secundaria, con el objetivo de hacerles algo más interesantes y motivadores los conceptos geométricos que normalmente los alumnos estudian desde un punto de vista exclusivamente teórico, presentándoles dos propiedades notables de una curva plana, de la que tal como se observó, ellos no habían oído hablar antes, pero que puede resultar muy familiar para todos aquéllos que se tiran por un tobogán o simplemente montan en bicicleta. Se hace un análisis cuali y cuantitativo de la experiencia y se muestran finalmente algunas conclusiones.

**Nivel educativo**: Secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Aunque tú, amigo lector probablemente no lo sepas, la *cicloide* es una de las curvas planas que te deberían resultar más familiares y que tienen mayor incidencia en la vida real, sobre todo si te has tirado alguna vez por un tobogán o sabes montar en bicicleta.

Imaginemos que sí sabemos montar en bicicleta y que señalamos sobre una rueda de nuestra bicicleta un punto luminoso y después la hacemos rodar. La trayectoria que sigue dicho punto es precisamente la curva llamada *cicloide*. Se la define como el lugar geométrico de los puntos del plano generado por un punto de una circunferencia al rodar, sin deslizamiento, sobre una línea recta.

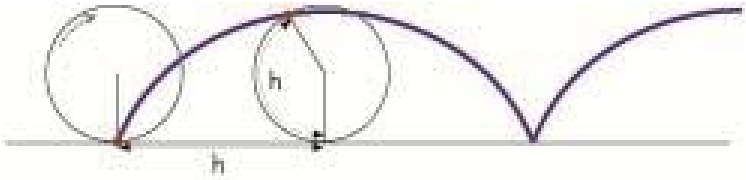



Figura 1. Construcción de la curva cicloide.

Como se verá a lo largo de esta comunicación, esta curva, estudiada por primera vez por Nicolás de Cusa y cuyo nombre se le debe a Galileo, tiene varias propiedades, entre ellas dos que resultan sorprendentes. Se trata de las propiedades *braquistócrona* y *tautócrona* (esta última también llamada *isócrona*). El poner de manifiesto estas dos propiedades a los alumnos de un curso de 3º de Secundaria, a través de una experiencia realizada con maquetas, es precisamente el objetivo principal de esta comunicación.



Figura 2. Maqueta en la que se muestra la propiedad braquistócrona.

La historia de la introducción de esta curva es ciertamente apasionante y de no ser por razones de extensión de esta comunicación debería estar incluida en estas líneas. No obstante, nos vamos a limitar en ellas a comentar la experiencia anteriormente indicada y a extraer de ella algunas conclusiones que puedan servir de aprovechamiento para los docentes de la asignatura de Matemáticas de este curso y nivel. Para los lectores interesados, una lectura amena y bastante exenta de tecnicismos sobre la historia de esta curva y sus propiedades más interesantes puede encontrarse en (Benjumea y Núñez, 2010 y en web2).



Figura 3. Experimentando la propiedad isócrona.

# 2. LA EXPERIENCIA REALIZADA

Se comenta en esta sección la experiencia realizada, con indicación de sus características y datos más importantes.

## 2.1. DATOS TÉCNICOS DE LA EXPERIENCIA.

- Lugar: I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.
- Curso y Grupo: 3º E.S.O., grupo A.
- Día de realización: Miércoles, 29 de febrero de 2012.
- Horario. De 14 a 15 horas, durante la clase de Matemáticas.
- Profesor del I.E.S.: D. Eduardo Algaba Seco, Catedrático de Matemáticas de Bachillerato.
- Número de Alumnos: 25, de los cuales 15 son varones (60%) y 10 mujeres (40%).
- Material utilizado en la experiencia:

a) Cuestionario de 10 preguntas sobre curvas en general, algunas de las cuales, con casi toda seguridad, no podían ser conocidas por los alumnos.

b) Maqueta de madera de formación de una cicloide de dimensiones 70x12x7 cm. en la que los alumnos podían observar la construcción de esta curva haciendo girar una rueda con un punto fijado por un bolígrafo sobre una recta.

c) Maqueta de madera de la curva braquistócrona, de 60x30x30 cm, en la que se podía observar esta propiedad característica de la cicloide dejando caer dos canicas, una sobre una trayectoria recta y otra sobre esta curva.

d) Maqueta de madera de la curva isócrona, de 100x30 cm, representando diferentes monumentos famosos de distintas ciudades, en la que se podía observar esta propiedad también característica de la cicloide dejando caer dos canicas situadas a diferentes alturas sobre la curva.

e) Dos pósters rectangulares de 120x85 cm representando uno de ellos distintos tipos de curvas y superficies y el otro dedicado a la curva cicloide y sus propiedades.




Figura 4. Material utilizado en la experiencia.

- Incidencias: A esta experiencia asiste, invitado expresamente por el profesor de la asignatura y los autores de la misma, Don Manuel Pérez Espina, profesor ya jubilado de este centro, responsable de haber concertado esta visita y otro compañero del departamento de matemáticas del mismo, también jubilado, Don José Luis Messía Márquez.

## 2.2. LUGAR DE LA EXPERIENCIA.

El centro elegido para desarrollar la experiencia fue, como ya se ha indicado, el I.E.S. Ramón Carande, de Sevilla capital.

Este Instituto está ubicado en el Sur de Sevilla, entre las barriadas de las Tres Mil Viviendas y el Tiro de Línea. Las Tres Mil Viviendas es un barrio deprimido, con problemas de droga y delincuencia, lo que influye en el comportamiento y otras características de los alumnos que proceden de él (un 60%). El Tiro de Línea es un barrio de gente trabajadora, no pudiéndose calificar como de clase media-alta por su nivel de estudios y poder adquisitivo, sino inferior. De este último procede un 40% de los alumnos del centro.

En la actualidad el Instituto escolariza alumnos con un perfil psicológico que refleja un bajo nivel de autoestima, participando en una escala de valores en la que no aparece de forma definida la importancia del conocimiento ni de la educación como algo crucial para su futuro.

Los alumnos tienen una tasa de fracaso escolar media-alta debido a sus condiciones socioculturales (familias gitanas desestructuradas con escaso interés por los estudios de sus hijos, en muchos casos) y económicas; el nivel de competencia curricular del alumnado de nuevo ingreso en el centro es medio-bajo, existiendo en 1º de ESO un porcentaje significativo de alumnos con necesidades especificas no diagnosticadas.

Por todo ello, en este centro son bastante comunes las siguientes características del alumnado:

- Abandono del estudio por incapacidad de seguir la marcha de la clase.
- Pérdida del interés por la asistencia al centro, al no poder integrarse en el trabajo cotidiano.
- Aparición de conflictos con el profesorado y con sus compañeros.
- Aparición del absentismo a partir de los 14 años como forma habitual de reaccionar a un modelo que no satisface las necesidades y expectativas del alumno, cada vez más alejado de la marcha del grupo.
- Alejamiento del alumno de las normas que regulan la vida del centro.

Finalmente, indicar que el número de alumnos del centro se acerca ligeramente a los 600, con un número de grupos de 21, y 28 alumnos de ratio media. El criterio de agrupamiento de los alumnos es por nivel de conocimientos, siendo los grupos A los de nivel más alto, y los D los de nivel más bajo (nuestra experiencia tuvo lugar en el curso 3º de la ESO, grupo A, aunque esta circunstancia se debió más a ventajas de horario por parte del profesor y de los propios autores que a otras razones).

## 2.3. EL CUESTIONARIO.

29 de febrero de 2012. NOMBRE:

Por favor, responde a las siguientes preguntas. Muchas gracias por tu colaboración.

**1.**- Dibuja un objeto geométrico, el que tú quieras.
**2.-** ¿Crees que una línea recta es una curva?
**3.-** Razona tu respuesta anterior: Porque…
**4.-** Escribe el nombre de cuatro curvas que conozcas.

**5.-** Escribe el nombre de cuatro cuerpos geométricos que conozcas.
**6.-** ¿Has oído hablar antes de la "cicloide"?
**7.-** Tanto si has oído antes hablar de la cicloide como si no, ¿con qué objeto de la vida real la relacionarías?
**8.-** ¿Con qué medio de transporte relacionarías una curva llamada "catenaria"?
**9.-** Aunque no la conozcas, ¿qué forma crees que tiene una "cardioide"?
**10.-** Imagina que tienes un capirote de nazareno y lo cortas con un cuchillo muy grande. ¿Cuántas curvas distintas (de forma, no de tamaño) te podrán salir dándole distintas posiciones al cuchillo? Indica sus nombres, si los sabes.

| | Varones | | Hembras | |
|---|---|---|---|---|
| P1 | Dado | 1 | Dado | 2 |
| | Triángulo | 1 | Triángulo | 2 |
| | Cuadrado | 3 | Cuadrado | 1 |
| | Cilindro | 6 | TV | 1 |
| | Exágono | 1 | Cilindro | 3 |
| | Octógono | 1 | Mesa | 1 |
| P2 | Sí | 1 | Sí | 2 |
| | No | 14 | No | 8 |
| P3 | Relativamente Correcta | | | |
| P4 | NC | 8 | NC | 5 |
| | Catenaria | 4 | Catenaria | 3 |
| | 2 curvas | 0 | 2 curvas | 0 |
| | 3 curvas | 0 | 3 curvas | 0 |
| | 4 curvas | 1 | 4 curvas | 0 |
| | Errores | 2 | Errores | 2 |
| P5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 2 | 2 | 2 | 0 |
| | 3 | 0 | 3 | 2 |
| | 4 | 1 | 4 | 7 |
| | Error | 0 | Error | 0 |
| P6 | Sí | 1 | Sí | 0 |
| | No | 14 | No | 10 |
| P7 | Círculo | 2 | Círculo | 1 |
| | Motocicleta | 1 | Motocicleta | 2 |
| | Bicicleta | 5 | Bicicleta | 4 |
| | Autobús | 0 | Autobús | 1 |
| | Absurdos | 2 | Absurdos | 2 |
| | NC | 4 | NC | 0 |
| P8 | Bicicleta | 1 | Autobús | 2 |
| | Moto | 2 | Coche F1 | 2 |
| | Coche | 5 | Tren | 2 |
| | Camión | 1 | Avión | 2 |
| | Tren | 5 | Moto | 0 |
| | NC | 5 | NC | 2 |
| P9 | | | Redonda | 1 |
| | | | Corazón | 1 |
| | | | Cuadrada | 1 |
| | | | Curva | 1 |
| | | | Ovalada | 1 |
| | | | Absurdo | 3 |
| | | | NC | 2 |
| P10 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | 2 | 4 | 2 | 0 |
| | 3 | 0 | 3 | 0 |
| | 4 | 1 | 4 | 1 |
| | Varios | 1 | Varios | 1 |
| | NC | 9 | NC | 7 |

La tabla anterior refleja las respuestas dadas por los alumnos a las preguntas del cuestionario anterior. A los autores nos ha parecido oportuno separar estas respuestas por sexo, indicando además en cada una de ellas la totalidad de respuestas escritas por los alumnos, así como el número de cada una de ellas.

## 2.4 DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se realizó de la siguiente forma: en primer lugar el autor se autopresentó a los alumnos y les presentó después a sus compañeras, la autora y una prima de ésta que iba a desempeñar la misión de reportera gráfica y les explicó brevemente en qué iba a consistir la experiencia.

Como anécdota al respecto, indicar que uno de los alumnos de la clase, Cristian, le preguntó al autor que cuánto dudaría esta experiencia. Éste le dijo que cuánto creía él que iba a durar, a lo que el alumno le contestó que *un ratillo*. Entonces, el autor le preguntó al alumno que cuánto era para él un ratillo, a lo que éste respondió que 10 minutos. Luego, el profesor le comentó al alumno que la experiencia iba a durar *un rato en vez de un ratillo* a lo que el alumno volvió a preguntar que cuánto era para el profesor un rato. Éste aprovechó para contestarle que en matemáticas se podía seguir con ese proceso hasta el infinito, y que como además no tenían infinitos minutos, lo más procedente era cortar ya aquel intercambio de preguntas, aunque le hizo ver al alumno lo acertada de su intervención.

Seguidamente, los autores repartieron a los alumnos el cuestionario que llevaban preparado y les comentaron que no hacía falta que pusiesen su nombre y apellidos, sólo el nombre, y que contestaran las preguntas que supiesen, advirtiéndoles que no considerasen aquello como un examen y que únicamente pretendían conocer qué tipo de conocimientos geométricos de tipo general sabían los alumnos, independientemente de que los hubiesen estudiado en clase o no.



Figura 5. Repartiendo el cuestionario.

Mientras los alumnos contestaban, una de ellas, Janely, le comentó al profesor (en adelante nos referiremos indistintamente a los autores de esta comunicación como autores o como profesores) que no sabía lo que era un capirote, palabra que aparecía en la última de las preguntas del cuestionario. Algo extrañado, éste se lo explicó y le preguntó a su vez si ella no había presenciado nunca la Semana Santa, a lo que ella contestó que no porque era sudamericana recién llegada a nuestro país.

Una vez recogido los cuestionarios, aproximadamente entre 10 y 15 minutos después de repartidos, el profesor les hizo a los alumnos algunas preguntas orales sobre el mismo. Así, preguntó a la clase en general que quién había contestado la segunda pregunta respondiendo que una línea recta sí era una curva. Sólo levantaron la mano un chico (Jesús) y dos chicas (Mª Ángeles y Janely), aunque los razonamientos de estas dos, el que *las rectas tienen varias formas* y el que *una calle recta puede ser curva*, eran erróneos. Jesús, sin

embargo, se aproximó algo más al contestar que: *sí, porque, por ejemplo*, *la tierra nosotros la vemos recta pero es redonda vista desde el espacio*. Algunas de las respuestas de los que respondieron que no eran también incorrectas ya que por ejemplo, Felipe dijo *que no, porque las líneas rectas pueden ser paralelas (sic) pero las curvas no son paralelas.*

En este momento el profesor aprovechó para mostrarles a los alumnos uno de los dos pósters que llevaban en el que aparecían las gráficas de una serie de curvas planas, la mayoría no conocidas de los alumnos. Entre ellas, la cicloide, la catenaria, la espiral, la rosa de cuatro pétalos y algunas otras más. A preguntas del profesor, la mayoría de los alumnos comentaron que no habían oído hablar antes de ninguna de ellas. Entonces el profesor les indicó que el resto de la charla lo iban a dedicar a conocer una de estas curvas en profundidad, concretamente la cicloide.

A continuación la autora de esta comunicación les mostró a los alumnos la maqueta de construcción de la cicloide y les preguntó que si se hacía girar la rueda sobre la horizontal, qué figura dibujaría el bolígrafo de la maqueta. Algunos alumnos, como Dani y Manuel, respondieron que *una espiral*, mientras que Cristian dijo que *una especie de cable telefónico*. La profesora pasó a mostrar a continuación el experimento y les comentó a los alumnos que la figura dibujada era la curva que en geometría se llama una *cicloide*, nombre que les había aparecido en el cuestionario en las preguntas 6 y 7.



Figura 6. Explicando cómo se forma la cicloide.

Seguidamente, les preguntó qué ocurriría si la curva se empezase a dibujar por el lado contrario y los alumnos dieron las mismas respuestas que al principio. Unos decían, como Ana, que *se ponga como se ponga el lápiz, la figura siempre sería la misma*. Paola también decía que *la misma curva*, mientras que otros, como Óscar, Pedro y Laura, que *saldría para abajo*. La profesora le pidió a Paola que volviese a repetir el experimento y contra lo que algunos de sus compañeros pensaban, todos vieron que volvía a salir dibujada la misma curva.

El profesor tomó la palabra para preguntarles a los alumnos que *cuál era para ellos la curva que daba la menor distancia entre dos puntos*. La mayoría de ellos respondió que *la recta*, e incluso Felipe se permitió hacer un chiste comentando que *sí, que era la recta, pero siempre que no hubiese mesas por medio*.

La autora pasó entonces a realizar un segundo experimento utilizando la maqueta de la *propiedad braquistócrona* de la cicloide. La pregunta ahora era que *si se dejaban caer a la vez una canica por la recta y otra por la cicloide cuál*

*llegaría antes*. La respuesta estuvo bastante dividida ya que aproximadamente una mitad de la clase se inclinaba por la recta y la otra (probablemente por pensar que la respuesta no debía ser la más elemental) por la cicloide. Para responder experimentalmente a esta cuestión, la autora tiró las canicas y mostró que llegaba antes la que se desplazaba por la cicloide. Los alumnos quedaron totalmente convencidos y la profesora aprovechó para explicarles que ésta era una propiedad característica de esta curva, que se denominaba braquistócrona, porque "braquis" significa en griego "lo mismo" y "cronos", "tiempo".

El profesor tomó entonces la palabra y manteniendo un bolígrafo en cada mano a distinta altura uno de otro le preguntó a los alumnos que *cuál creían ellos que llegaría antes al suelo si los dejaba caer*. Cristian contestó que *cuanto más alto estuviese el bolígrafo, antes llegaría al suelo* y Felipe dijo que *dependía del peso del bolígrafo*, aunque el profesor le contestó que en este caso los bolígrafos pesaban mas o menos lo mismo. Después de dejar caer los dos bolígrafos, los alumnos observaron que llegaba antes el situado a menos altura y entonces la profesora les preguntó que si dejaba caer dos canicas situadas a diferente altura en una cicloide cuál de ellas llegaría antes a la horizontal.

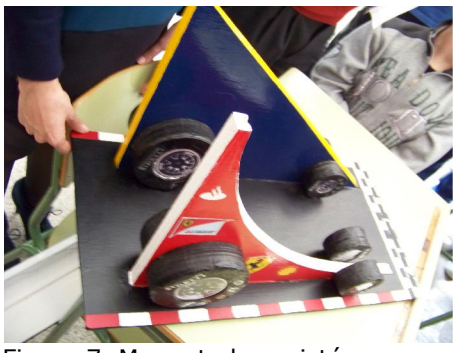

Figura 7. Maqueta braquistócrona.


Figura 8. Maqueta isócrona.

Seguidamente la profesora tomó otra maqueta en la que iba a mostrar la *propiedad isócrona* de la cicloide, y colocó sin dejarlas caer dos canicas a diferentes alturas sobre la curva y les preguntó a los alumnos cuál pensaban ellos que llegaría antes a la horizontal. Ana contestó que *la que está más alta, por tener más inclinación*. Felipe dijo que *las dos llegarán al mismo tiempo porque aunque una está situada a menor altura, la de mayor altura cogerá mayor velocidad* y Cristian indicó que *la que está más baja porque está más cerca*. A este razonamiento se opuso María Ángeles diciendo que *la de arriba llegaría antes por estar más inclinada*. La profesora pasó entonces a realizar la experiencia y todos los alumnos vieron que curiosamente las dos bolas llegaban a la horizontal al mismo tiempo. La profesora les explicó entonces que esta era una propiedad característica de la cicloide que no tenían otras curvas y que por supuesto tampoco tenía la recta.

Tomó ahora la palabra la profesora para mostrarles a los alumnos el segundo de los pósters que habían llevado a la clase, el titulado "*la Helena de las curvas*". Para empezar les preguntó a los alumnos si ellos sabían quién era Helena de Troya, a lo que algunos de ellos respondieron afirmativamente porque habían visto la película "Troya". La profesora les contó que Helena era una princesa griega bellísima y que en aquella época los príncipes e hijos de reyes se disputaban su amor, llegando incluso a la guerra por ella. Pues bien, haciendo una similitud con este hecho histórico, los matemáticos llegaron a pelearse entre

sí por encontrar las principales propiedades de esta curva, a la que por esta razón se la denominó *la Helena de las curvas*.

En el póster se mostraban las propiedades braquistócrona e isócrona de esta curva antes citadas y se indicaban algunas aplicaciones de estas propiedades en la vida real, como pueden ser la forma de los toboganes en los parques de atracciones (aunque para evitar accidentes la mayoría de estos toboganes suelen tener una forma casi rectilínea). También quedaba indicado cómo la segunda de estas propiedades es muy útil en los relojes de péndulo y en navegación.

Dado que faltaban cuatro o cinco minutos para terminar la clase, el profesor no quiso acabar esta experiencia sin hacerles un pequeño truco matemático a los alumnos, para divertirlos con las Matemáticas, basado en las propiedades de las congruencias módulo 9, aunque obviamente no comentó para nada estas últimas palabras. Se trataba de escribir los números desde el uno al nueve, uno a continuación del otro y con excepción del número ocho y preguntarle al profesor invitado (que se tomó como conejillo de indias) cuál de todos aquellos números le había salido peor escrito, para obligarle a repetirlo varias veces sin más que realizar una sencilla multiplicación.

Para que quedara recuerdo de la realización de esta experiencia la reportera gráfica tomó una foto del grupo de alumnos acompañados por los profesores, que se muestra a continuación.



Figura 9. Alumnos y profesores.

Finalmente el profesor autor de la experiencia pasó a agradecerles a todos los alumnos, al igual que a su profesor de la asignatura, la colaboración prestada, al tiempo que ensalzaba el buen comportamiento y actitud de todos ellos en la realización de la misma.

# 3. CONCLUSIONES.

A raíz de la experiencia comentada, los autores desean indicar a continuación algunas conclusiones que han obtenido de su realización. Obviamente, no se pretende generalizar, dado que la muestra no es en absoluto significativa, pero sí

es cierto que lo observado puede ser interesante como objeto de debate entre el profesorado. Estas conclusiones son las siguientes:

1. Los alumnos se mostraron especialmente interesados en seguir las explicaciones de los profesores y en contestar sin ningún tipo de temor las preguntas de los mismos. Es posible que el hecho de que estos profesores no fuesen los que ellos tienen habitualmente les supusiese menos problemas para adoptar esta conducta.
2. Es indudable que el hecho de llevar a clase maquetas, póster y otro tipo de herramientas favorece ampliamente las explicaciones del profesor y contribuye a mejorar el interés y la motivación de los alumnos.
3. A nivel de 3º de Secundaria los alumnos poseen un gran desconocimiento de los conceptos geométricos en general. Han oído hablar de rectas, circunferencias y polígonos, pero poco más.
4. El nivel de comprensión de los alumnos de estos niveles es relativamente bajo. Esto se puede comprobar en el hecho de que en el cuestionario que se les presentó aparecían varios nombres de curvas que luego ellos fueron incapaces de considerar como tales cuando se les preguntaba por ellas en el cuestionario.
5. A la pregunta oral realizada a los alumnos por los profesores de si les gustaría repetir este tipo de clase con otra experiencia distinta la respuesta afirmativa fue abrumadora, lo cual significa que podría ser interesante para el profesor de la asignatura tener previstas dos o tres experiencias similares a realizar por otros compañeros, para ir mostrándolas a lo largo de la misma.

## REFERENCIAS.

[1] BENJUMEA, J. C. y NÚÑEZ, J. (2010), Caminando sobre las curvas. Capítulo 6 del Libro de Divulgación de las Matemáticas "Prisma. Un paseo entre las Matemáticas y la Realidad". Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla. 93-116.

[web2]http://almargendefermat.wordpress.com/2009/02/22/la-cicloide-i-braquistocrona-y-tautocrona/
(Blog de WordPress.com sobre la cicloide).

# CURVAS Y TRAYECTORIAS

**Francisco Orti Navarro**,
*I.E.S. Las Fuentezuelas, Jaén*

## RESUMEN.

En el ámbito de las matemáticas y la diversidad, se propone una vía de actuación con alumnos de altas capacidades, que hace especial énfasis en la fase de matematización del método científico.

Es una experiencia interdisciplinar, en la que se desarrollan contenidos de ciencias, tecnologías y artes, cuyo eje de giro, es el uso de las TICS y en la que el desarrollo histórico de las matemáticas y de la ciencia se usa como elemento motivador y como instrumento metodológico.

Usamos las TICS empleando software específico, sobre todo GeoGebra, y software ofimático, también software online, como, actividades del proyecto DESCARTES y GAUSS, vídeos, página WEB de consulta, aulas virtuales, espirógrafos online, etc.

En el apartado de hardware además de portátiles y PDI, usamos cámaras fotográficas digitales, etc…

Las actividades extraescolares desarrolladas, proporcionan la imagen real necesaria, en la que la actividad se encuadra.

**Nivel educativo**: Primer y segundo ciclo de ESO.

## 1. INTRODUCCIÓN.

La Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, en el año 2005, publicó su *Manual de atención al alumnado con necesidades específicas por presentar altas capacidades intelectuales,* en la que desarrolla orientaciones al profesorado para la organización de la respuesta educativa en el aula, particularmente coincidimos en:

- *Presentación de contenidos de distinto grado de dificultad y ampliación.*
- *Propuesta de actividades de carácter interdisciplinar que requieran la conexión entre contenidos de distintas áreas y materias.*
- *Diseño de actividades diversas, amplias, de libre elección, individuales.*
- *Adaptación de recursos y materiales didácticos.*
- *Organización flexible.*
- *Adecuación de los procedimientos e instrumentos de evaluación.*
- *Agrupamientos para trabajo colaborativo.*

En este ámbito la administración ha abierto un campo de investigación educativa muy adecuado, el programa Profundiza, desde el que es posible desarrollar contenidos y herramientas curriculares, que con posterioridad sean transportables al aula.

En la ponencia mostramos, la actividad desarrollada en el proyecto de Curvas y Trayectorias que dentro del programa Profundiza, hemos venido desarrollando durante este curso 2011-2012.

# 2. METODOLOGÍA.

Desde un punto de vista metodológico destacamos la concepción de la actividad como el desarrollo de un proyecto de investigación, en el que se abordan los contenidos de forma diversa, es decir por distintas vías y en varias etapas de concreción. Se realizan agrupaciones y se adaptan los espacios estableciendo el aula virtual, como herramienta básica de trabajo. La elaboración de listas de enlaces y actividades de ampliación permite un aprendizaje personalizado. También se estimula la creatividad con actividades abiertas.

El safari fotográfico por la ciudad, y el uso del "Cuaderno de Campo", es una actividad que acerca al alumno al contenido del curso, le hace ver su aplicación en el arte, en la arquitectura, en la tecnología o en la naturaleza y estimula su creatividad.

## 2.1. ACTUACIÓN EN EL AULA

Por un lado, se parte de lo fenomenológico o descriptivo, utilizando la historia de la ciencia como herramienta didáctica, y utilizando materiales como vídeo, juegos y actividades online para estimular la creatividad y proporcionar un primer conocimiento imprescindible.

En las primeras sesiones, vídeos especializados, como los de la serie *más por menos* de la televisión, y otros más genéricos, como el *Pato Donald en el país de las Matemáticas*, juegos online, como el espirógrafo, imágenes, etc… las causas históricas, las aplicaciones prácticas, y por supuesto el aspecto lúdico de los contenidos a desarrollar.

El segundo nivel de concreción es el desarrollo de actividades de distintos proyectos. Como ejemplo, el uso del osciloscopio virtual, del proyecto Descartes, la batería de actividades sobre coordenadas polares, o sobre espirales del proyecto Gauss, la serie sobre trocoides, o sobre funciones, de la sociedad de profesores de matemáticas de Navarra. También se desarrolla un cuaderno de actividades que incide en aquellos procedimientos que resultan más interesantes.

Posteriormente utilizamos la potencia de GeoGebra para establecer la proximidad entre el alumnado y conceptos que antes eran verdaderamente complejos de visualizar. Es interesante la versatilidad de herramientas que ofrece que proporciona autonomía en el aprendizaje y diversidad de enfoque al alumno de NEE.

Investigar las situaciones en las que se producen determinadas trayectorias de partículas y puntos, proporciona los conceptos de coordenadas, cartesianas y polares, y el concepto matemático de lugar geométrico o recorrido de dicho punto. Es este el primer paso hacia el establecimiento de la ecuaciones de las curvas, y de su clasificación.

Es aquí donde hemos querido centrar la actividad desde un punto de vista conceptual, y es en este sentido en el que consideramos que establece el fundamento de la etapa de matematización del método científico.

Merece la pena volver al descubrimiento por parte del alumno de las coordenadas, que en los puntos de una curva están ligadas, y cuya ligadura, como es el caso de las interferencias de ondas, es más directamente asumible, utilizando un parámetro, y en otros casos como en las espirales, nos conduce al concepto de coordenadas polares, etc…

### 2.2. ACTIVIDADES EXTRAESCOLARES

La idea es establecer un *safari fotográfico,* actividad consistente en un recorrido por los lugares histórico-artísticos de una ciudad, en el que los alumnos haciendo uso de cámaras fotográficas digitales, rellenan las páginas de su *Cuaderno de Campo,* con sus fotografías.

Esta actividad tiene varias sesiones preparatorias y otras subsiguientes de conformación.

Son necesarias al menos dos sesiones de preparación para:

- Realizar un proceso de familiarización y personalización del cuaderno. En dicho proceso el alumno, dibuja de forma contextual en las páginas de su cuaderno.
- Presentar al alumnado fotografías reales del recorrido realizadas por el profesor en las que se muestre sus posibilidades fotográficas y su idoneidad.
- Establecer normas y materiales.

Por otro lado las sesiones posteriores son necesarias para configurar el trabajo:

- Por ejemplo las fotografías se imprimen en color en un folio pudiendo modificarse su textura su tamaño e incluso proporcionándole efectos.
- Se establece una sesión de Safari en la Red en el que el alumno captura imágines en la red con la que realiza una presentación.
- Puede usarse eventualmente alguna de estas imágenes en el *Cuaderno de Campo,* si no ha sido posible encontrar la fotografía.

## 3. PARA LA PONENCIA.

En los veinte minutos se utilizarán:

- Presentación PowerPoint ilustrando los niveles de concreción.
- Película de diapositivas del Safari fotográfico.
- Película de diapositiva de Cuadernos de Campo del alumnado 2011-2012.
- Algunos Cuadernos de Campo para ser hojeados por los asistentes.

## REFERENCIAS.

BARRERA DRABIO, ÁLVARO, Y OTROS.(2005) MANUAL DE ATENCIÓN AL ALUMNADO CON NECESIDADES ESPECÍFICAS POR PRESENTAR ALTAS CAPACIDADES INTELECTUALES. Consejería de educación, Junta de Andalucía.

FERRÉOL, ROBERT. (1993). ENCICLOPEDIA DE CURVAS.

PÁRAMO FONSECA, AQUILES. Temas de cálculo integral, la belleza de las trocoides. Departamento de Matemáticas - Universidad de Los Andes - Bogotá - Colombia - Octubre del 2004.

SADA ALLÓ, MANUEL.(Noviembre 2006). http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/, Proyecto Descartes. Proyecto Gauss.

SAIZ ALONSO, EDUARDO. CUADERNO DE CAMPO.
OTROS SITIOS.

# INVENTAR PROBLEMAS: UNA FORMA DE DESARROLLAR LAS COMPETENCIAS BÁSICAS

**Juan Jesús Barbarán Sánchez**,
*Universidad de Granada*
**José Antonio Fernández Bravo**,
*Universidad Camilo José Cela*
**Ana Huguet Ruiz**,
*I.E.S. Almina, Ceuta*

## RESUMEN.

En esta comunicación presentamos los resultados de una investigación llevada a cabo con alumnos de 2º de ESO en la que estudiamos la relación entre el uso de un programa de intervención en el aula basado en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas y el desarrollo de su competencia matemática y lingüística, observándose una mejoría significativa en los alumnos a los que se les aplicó el programa con respecto al resto.

**Nivel educativo**: Secundaria

## 1. INTRODUCCIÓN.

El interés de la comunidad educativa por fomentar el desarrollo de las competencias básicas de nuestros alumnos de ESO ha crecido en los últimos años tras la implantación de la ley orgánica 2/2005, de 3 de mayo, que sitúa a las competencias básicas como uno de los elementos fundamentales del currículo. Nos vamos a centrar en dos de ellas: la competencia matemática y la competencia lingüística.

La resolución de problemas ha ocupado un papel importante en los currículos de Matemáticas contenidos en las diferentes leyes educativas tanto en España como en países de nuestro entorno. Según el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), los contenidos elegidos para las Matemáticas en la ESO se deben presentar en un contexto de resolución de problemas. English (1997) señala que la resolución de problemas lleva de la mano la invención de problemas. La invención de problemas fue aplicada en el ámbito educativo de forma pionera por Kerschensteiner cuyos trabajos tuvieron mucha resonancia en la primera mitad del siglo XX. Sin embargo, a pesar de las recomendaciones dadas por investigadores en cuanto a lo apropiado que resulta el uso de la invención de problemas para enseñar matemáticas, en pocas ocasiones se lleva a la práctica en clase (Silver, 1994). Teniendo en cuenta lo anterior nos planteamos llevar a cabo una investigación en la que estudiamos si el usar con alumnos de 2º de ESO un programa de intervención en el aula basado en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolla su competencia matemática y lingüística. El programa que hemos usado es el llamado programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas propuesto por Fernández Bravo (2000).

# 2. EL PROGRAMA DE INVENCIÓN-RECONSTRUCCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS.

El programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas consta de seis metamodelos procedimentales: generativos, de estructuración, de enlaces, de transformación, de composición y de interconexión. A partir de ellos, surgen un total de cuarenta y nueve modelos de situaciones problemáticas. Incluimos seguidamente algunos ejemplos:

- *Situaciones sin número.* Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna
- *Problemas de lógica.* No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía.
- *Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada.* El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.
- *Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática.* Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.
- *Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones:* llegar a la solución que se nos ha indicado y utilizar (todos/no todos) los datos numéricos que se nos han dado.
- *Expresar preguntas y respuestas a partir de un enunciado dado.* La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida.
- *Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática.* Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución.
- *Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y la/s operación/es a seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema.*
- *Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. Se presentan varias preguntas.* La labor del alumno consiste en crear un enunciado, y sólo uno, capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas planteadas.
- *Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente.*
- *Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar las soluciones de ambos.*
- *Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar ambas soluciones.*
- *Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado.*
- *Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.*
- *Mezclar las preguntas de dos problemas.*

- *Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución.*
- *Inventar un problema con: un vocabulario específico y la/s operación/es que debe utilizarse para su resolución.*
- *Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve, …*

# 3. METODOLOGÍA.

La presente investigación pretende evaluar los efectos de un programa de intervención educativa basado en la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas sobre la competencia matemática y lingüística. Este programa constituye la variable independiente. El programa no se aplicó a la totalidad de los alumnos que formaron parte de la muestra sino únicamente a los que formaron parte de los grupos experimentales; el resto de los alumnos conformaron los grupos control.

En la presente investigación se ha seguido un diseño cuasi-experimental comparativo, con 2 grupos control y 2 experimentales. La muestra estuvo formada por 102 alumnos de un IES de titularidad pública de la Ciudad Autónoma de Ceuta de los cuales 52 alumnos formaban parte de los 2 grupos experimentales y 50 alumnos conformaban los 2 grupos control. La selección de los grupos control y experimentales se llevó a cabo al azar, al igual que la de los sujetos que formaron parte de los mismos. El hecho de que los sujetos de cada curso pertenecieran a dos estados de control subraya la característica pretest-postest. El conocimiento de los efectos de la aplicación del programa se apoya en la preintervención-postintervención, más concretamente, se trata de un diseño: pretest-intervención-postest. Esto permite llevar a cabo una inferencia correcta de las relaciones entre las variables dependientes e independiente, cuando comparamos los resultados de los grupos experimentales y control. El equipo investigador lo formaron los profesores de Matemáticas y Lengua de los grupos que tuvieron la condición de experimentales.

Se planteó la siguiente hipótesis de estudio: Si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas con alumnos de 2º de ESO, entonces se desarrolla su competencia matemática y lingüística.

La variable independiente en esta investigación ha sido el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Las variables dependientes estudiadas fueron la competencia matemática y la competencia lingüística. Los valores de las variables dependientes vinieron dados:

- En el caso de la competencia matemática, por la puntuación obtenida por cada alumno en la prueba de diagnóstico elaborada por el Ministerio de Educación para alumnos de 2º de ESO (que se obtuvo sumando las puntuaciones asignadas a cada ejercicio). Los ejercicios se puntuaron siguiendo el siguiente criterio:
  - 0: Respuesta incorrecta o sin respuesta
  - 1: Respuesta parcialmente correcta.
  - 2: Respuesta correcta.
- En el caso de la competencia lingüística, por la suma de las puntuaciones obtenidas por el alumno en las pruebas de habilidad mental verbal y capacidad para completar oraciones, dentro de la Batería de Aptitudes

Diferenciales y Generales (BADYG) "M" renovado, cuya descripción puede consultarse en Yuste, Martínez y Galve (2007).

De esta forma, el rango de valores enteros de cada una de las variables dependientes estudiadas fue el siguiente:

| Variable dependiente | Rango de valores enteros |
|---|---|
| Competencia matemática | 0-33 |
| Competencia lingüística | 0-64 |

Tabla 1. Recorrido de valores de las variables dependientes.

Las variables intervinientes que podían, a priori, estar sistemáticamente relacionadas con la variable independiente, y que podían afectar de forma diferencial a los valores de las variables dependientes que se consideraron fueron las siguientes: metodología empleada, dificultad en el aprendizaje de la matemática y de la lengua, asistencia a clase y nivel socio-cultural de la familia.

## 3.1. PROCEDIMIENTO

La fase pretest tuvo lugar en el mes de septiembre de 2010 y en ella los alumnos de 2º de ESO cumplimentaron, en su aula habitual y de forma simultánea, la prueba para medir el grado de desarrollo de la competencia matemática antes citada y el BADYG "M" renovado, en este orden. La corrección de la prueba se llevó a cabo de forma consensuada entre todos los profesores intervinientes en la investigación y ningún profesor participante corrigió las pruebas de sus alumnos.

La fase de intervención se llevó a cabo durante un periodo de ocho meses dentro del curso escolar 2010/11 y en ella se aplicó el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas a los dos grupos experimentales. Los principales agentes fueron los alumnos de estos grupos y el equipo investigador. Este programa se desarrolló en sesiones semanales, dentro del horario lectivo y en el aula correspondiente. El horario fijado coincidió en todos los cursos. Las sesiones se estructuraron como "unidades de actuación cerradas". Cada unidad de actuación cerrada se compuso de cinco fases concretas con representación independiente, tanto por el contenido formal, como por el orden de aparición. Fueron las siguientes:

- Apertura: Se le planteó al alumno el desafío. Se le explicó con claridad, asegurándonos de que había comprendido perfectamente lo que había que hacer.
- Ejecución: Fase en la que se realizó la propuesta. La ejecución pudo realizarse: en gran grupo o grupo-clase, a partir de un diálogo en común; en parejas de alumnos; o, de forma individual.
- Contrastación: Fase en la que se contrastaron las ideas mediante el diálogo. Si la fase anterior se había realizado de forma individual, esta fase se llevó a cabo por parejas. Si la ejecución se llevó a cabo por parejas, esta fase se realizó por parejas de parejas. Si en la fase anterior había intervenido el grupo-clase, la fase en la que estamos ahora formó parte de la anterior.
- Exposición: Fase en la que intervino el grupo-clase con la libre participación de todos y cada uno de los alumnos que quisieron exponer sus ideas. Mediante el diálogo en gran grupo y las preguntas del profesor, se

canalizaron las ideas y se recogieron las estrategias matemáticas que se habían reconocido como válidas.

- Finalización: Se escribieron y anotaron las conclusiones que se obtuvieron: conceptuales, procedimentales, etc.

El seguimiento del programa se concluyó con 22 sesiones a lo largo del curso escolar, una sesión por semana de dos horas de duración. El equipo investigador se había formado, previamente, mediante seminarios de grupo para la aplicación práctica del programa de intervención que tuvieron lugar durante el curso escolar 2009/10.

Como material para el alumno, se elaboró un cuaderno de trabajo con 60 situaciones problemáticas, seleccionadas o adaptadas de Fernández Bravo (2000). En cada sesión se realizaron dos problemas por término medio, con la finalidad de tener tiempo para generar un debate en el que fluyeran las ideas. Con una periodicidad quincenal se llevaron a cabo reuniones en las que participaron los miembros del equipo investigador y en ellas se presentaron de forma abierta tanto los avances percibidos como las dificultades encontradas y se compartieron experiencias particulares de cada aula.

La fase postest se llevó a cabo durante el mes de junio de 2011 y en ella se les aplicaron a los alumnos los mismos instrumentos de evaluación que se les había aplicado en la fase pretest, a la misma hora y en el mismo orden. La corrección de las pruebas siguió el mismo procedimiento descrito en la fase pretest.

# 4. RESULTADOS DEL ESTUDIO Y CONCLUSIONES

El análisis estadístico se llevó a cabo usando el programa Statistical Package for the Social Sciences (SPSS), versión 15.0. Los análisis llevados a cabo para el tratamiento estadístico de los datos fueron los siguientes:

a) Análisis descriptivos y gráficos, a partir los cuales pudimos observar las puntuaciones medias de cada grupo (Experimental pretest "1"; Control pretest "2"; Experimentales postest "3"; Control postest "4"), su desviación típica, el error típico y el intervalo de confianza para la media, al 95%.
b) Tests no paramétricos que nos sirvieron para determinar hasta qué punto los datos muestrales se ajustan a una distribución teórica. Este estudio lo realizamos con todos los datos, tanto de la fase pretest como postest. Se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov.
c) Análisis paramétrico unifactorial de la varianza para el contraste de las hipótesis estadísticas. Con este análisis se comprobó si el cambio pretest-postest en cada una de las variables estudiadas difirió en cada una de las aulas, respecto a la utilización, o no, del programa de intervención (variable independiente). También estudiamos si los cambios habían sido significativos y si estos se habían debido a la utilización del programa, verificando su repercusión en los grupos experimentales. Se analizó el estadístico F y su significación (Sig F) para los 6 niveles de grupos. Si la F global del análisis de la varianza es significativa ($p<0.05$), sólo podemos concluir que, por lo menos, dos niveles de la variable producen distintos efectos en la variable dependiente. Para investigar en qué niveles se dan esas diferencias significativas, establecimos comparaciones múltiples, mediante la prueba T de Student. El contraste de hipótesis estadísticas lo basamos en un contraste de igualdad de medias de dos poblaciones

normales de varianzas desconocidas que verifican que el número de sujetos del grupo experimental más el número de sujetos del grupo control es mayor que 30. El contraste se realizó con las medias de los grupos experimentales pretest y postest por un lado, y de los grupos control pretest y postest, por otro. El contraste fue bilateral considerando como hipótesis nula que las medias obtenidas por un grupo, antes y después, son iguales. La hipótesis alternativa fue la existencia de diferencias en las medias obtenidas. La existencia de diferencias significativas nos haría rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa.

En la fase pretest, se estudió mediante un análisis de la varianza si existían diferencias estadísticamente significativas ($p<0.05$) en las variables evaluadas en la fase pretest, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

Con la finalidad de comparar los cambios producidos por la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en los grupos experimentales se realizó un análisis de varianza múltiple en relación con todas las variables evaluadas, investigando, también, la repercusión del citado programa en los valores de las variables intervinientes. Se estudió la existencia o no de diferencias significativas respecto a la ocupación de los padres, la situación familiar, la asistencia a clase, el nivel de estudios de los padres y la dificultad para las matemáticas o la lengua, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

| VARIABLE | Razón F | Sig. de F |
|---|---|---|
| Competencia matemática | 12.6583 | .004 |
| Competencia lingüística | 17.5674 | .03 |

Tabla 2. Resultados del ANOVA realizado comparando los grupos experimentales y control.

Como podemos observar en la tabla 2, la razón F indicó que los cambios pretest-postest en los grupos experimentales fueron:

- Estadísticamente significativos al 100% en la competencia matemática.
- Estadísticamente significativos al 97% en la competencia lingüística.

Los cambios producidos en los grupos experimentales de la fase postest fueron significativos respecto a todos y cada uno de los otros grupos en las dos variables mencionadas. Esto evidencia que el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolló significativamente en los alumnos de 2º de ESO, y para la muestra utilizada, tanto la competencia matemática como la competencia lingüística.

Actualmente, un objetivo importante de nuestro sistema educativo es incrementar el nivel de competencias básicas de nuestros alumnos. Para alcanzar este objetivo, sugerimos que se incluyan en el currículo de Matemáticas de la ESO programas en los que se potencie la invención y reconstrucción de problemas.

## REFERENCIAS.

ENGLISH, L. (1997). *The development of fifth-grade children's problem -posing abilities*, Educational Studies in Mathematics, 34 (3), 183-217.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000). *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos,* Praxis, Barcelona.

SILVER, E. A. (1994). *On mathematical problem posing*, For the Learning of Mathematics, 14 (1), 19-28.

YUSTE, C., MARTÍNEZ, R. y GALVE, J. L. (2007): *Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales (BADYG-M renovado)*, CEPE, Madrid.

# EL INSTITUTO DE ESTADÍSTICA Y CARTOGRAFÍA DE ANDALUCÍA

**Cristina Fernández Álvaro**,
*Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía*
**Diego Daniel Iglesias Espinosa**,
*Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía*

## RESUMEN.

El Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía tiene entre sus objetivos impulsar y coordinar la estadística y la cartografía en Andalucía. Dentro de este contexto tan general, la comunidad docente constituye un foco de especial y obligada atención.

Son muchas las acciones emprendidas, pero entre las más importantes destacaremos la creación de una web escolar, el desarrollo de cursos de formación específicos para profesores y la organización de eventos, como la visita de escolares a las sedes del Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía o la presencia en jornadas y congresos.

**Nivel educativo**: Educación Secundaria Obligatoria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

La estadística pública es el resultado de una minuciosa y amplia planificación, que se establece en planes plurianuales y se desarrolla y concreta en programas anuales. Esta planificación y su desarrollo no se llevan a cabo por un organismo concreto, sino que implica a todo el Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía. La justificación de este hecho es inmediata, los tipos de usuarios que precisan de información estadística fiable son muy variados: administraciones públicas, empresas, investigadores, estudiantes o particulares; y por lo tanto se requiere de la participación de representantes de todas las partes para tratar de satisfacer a su vez todas las necesidades de información estadística.

Así, el Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía forma parte del Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía (Figura 1), que también está integrado por:

- Consejo Andaluz de Estadística y Cartografía.
- Comisión Interdepartamental Estadística y Cartográfica.
- Comisión Técnica Estadística y Cartográfica.
- Comisiones estadísticas y cartográficas de las diferentes Consejerías de la Junta de Andalucía.
- Unidades estadísticas y cartográficas de las diferentes Consejerías de la Junta de Andalucía, y, en su caso, de los organismos autónomos y demás entidades públicas a ellas adscritos.
- Puntos de información estadístico-cartográficos de Andalucía.

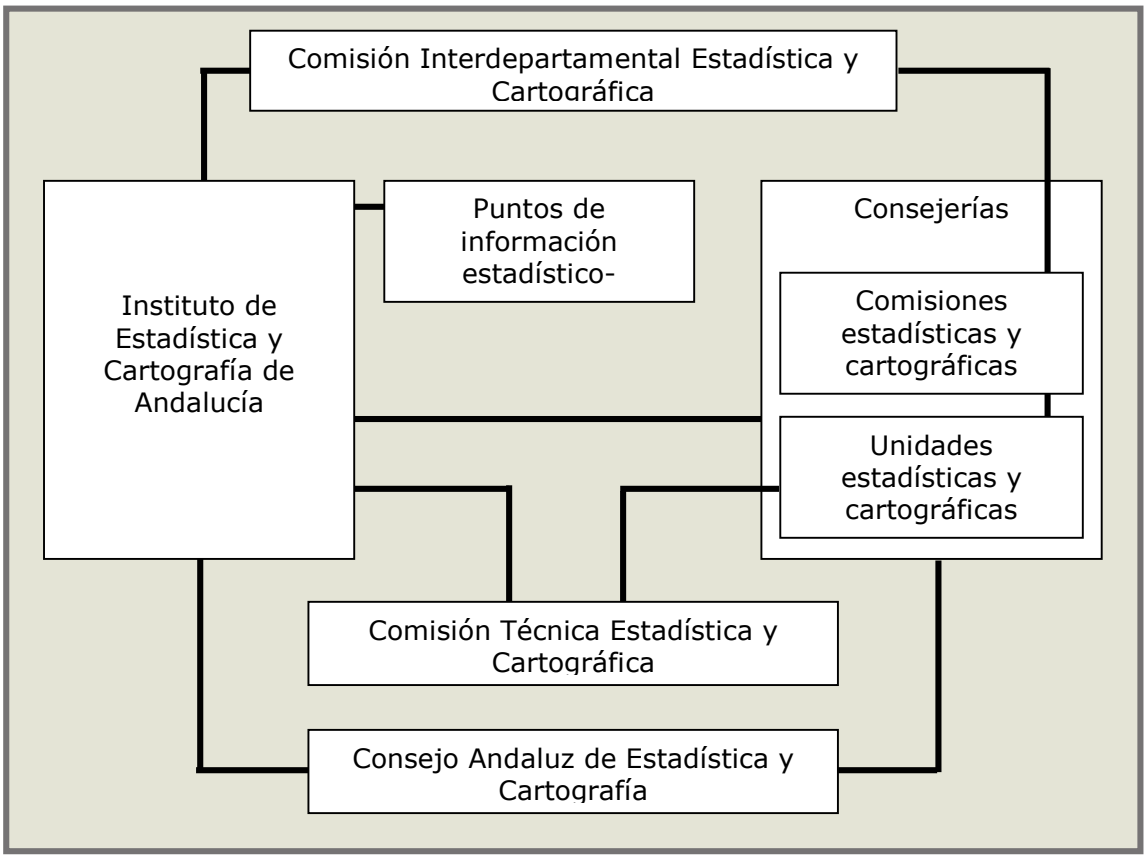



Figura 1. Esquema organizativo del Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía

Entre las funciones del Instituto podemos destacar, aparte de las obvias de elaborar las actividades estadísticas y los productos cartográficos asignados al mismo, así como difundirlos, las de:

- Coordinar la ejecución de la actividad estadística y de los sistemas de información geográfica de los órganos y entidades del Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía.
- Coordinar técnicamente la actividad cartográfica en la Administración de la Junta de Andalucía, dando soporte a las distintas Consejerías, organismos y entidades de la Junta de Andalucía en materia cartográfica y de información geográfica.
- Crear, mantener y gestionar bases de datos de interés estadístico para la Comunidad Autónoma.
- Utilizar los datos de fuentes administrativas con fines estadísticos y cartográficos, así como promocionar su uso por el resto de entidades y órganos estadísticos del Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía.
- Aplicar y vigilar el cumplimiento de las normas relativas al secreto estadístico en la realización de las estadísticas.
- Crear y mantener una red de posicionamiento que permita la prestación de servicios basados en la localización geodésica.

- Colaborar en materia estadística y cartográfica con las Corporaciones Locales, con el órgano o entidad estadística de las Comunidades Autónomas, de la Administración del Estado y de cuantos organismos nacionales o internacionales se considere procedente.
- Impulsar y fomentar la investigación estadística y cartográfica que contribuya a mejorar el conocimiento de la realidad social y económica de Andalucía, así como el perfeccionamiento profesional del personal del Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía.

Además, en el vigente Plan Estadístico de Andalucía 2007-2012 se establecen unos objetivos. Entre ellos se encuentra el siguiente: "Potenciar los sistemas integrados de información estadística a fin de garantizar la transparencia y utilidad de la actividad estadística pública, y promover una estrategia de difusión activa que mejore la claridad, comprensibilidad, adaptabilidad, disponibilidad y accesibilidad de los resultados estadísticos."

Entre las tareas emprendidas para cumplir con este objetivo, se han abierto vías de difusión dirigidas a usuarios específicos, de forma que éstas se adapten a sus necesidades. Dentro de esta estrategia de difusión focalizada, los escolares constituyen un grupo preferente ya que son los futuros usuarios de la información estadística. Las acciones llevadas a cabo cuentan con varias actividades formativas y divulgativas y la creación de una web escolar dirigida a estudiantes y adaptada a sus conocimientos, lenguaje y necesidades.

## 2. CURSO DE FORMACIÓN A PROFESORES.

Este curso está incluido en el Plan de formación 2012 del Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía, en el marco del convenio de colaboración con la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, como formación externa de conocimiento básico de la estadística pública.

Está dirigido a profesorado en general y personas interesadas en el tema objeto del curso, aunque principalmente indicado para profesores de matemáticas de secundaria.

Sus objetivos son:

- Acercar los procesos generales de elaboración de estadísticas a los profesores, con sus virtudes y sus limitaciones, capacitándoles así de una mejor comprensión de los datos finales.
- Mostrar las metodologías y capacidad informativa de las principales actividades estadísticas elaboradas en España y Andalucía.
- Facilitar la enseñanza en materia estadística a través de múltiples herramientas de apoyo.

El curso tiene una duración de 30 horas, repartidas a lo largo de 2 meses y en modalidad de teleformación a través de una plataforma moodle de THALES. La primera edición se llevó a cabo del 15 de marzo al 15 de mayo y la segunda del 10 de abril al 10 de junio.

Para cada una de las ediciones se disponía de 30 plazas. La demanda fue muy grande, cubriéndose las plazas disponibles muy rápidamente, tanto es así que no estaba prevista una segunda edición y desde THALES se nos solicitó la posibilidad de poder repetir el curso en más ocasiones.

## 2.1. CONTENIDOS.

El contenido del curso se estructura de la siguiente forma:

- Módulo I: Información estadística
  Unidad 1: La estadística pública. Órganos estadísticos y funciones
  Unidad 2: Fuentes de información estadística
  Unidad 3: Tipos de información estadística
  Unidad 4: Principales actividades estadísticas
- Módulo II: La estadística en el territorio: Atlas Estadístico de Andalucía
  Unidad 1: Conociendo la herramienta
  Unidad 2: Análisis de las principales fuentes estadísticas utilizadas
  Unidad 3: Unidades didácticas
- Módulo III: SIMA. Banco de datos y generador de mapas
  Unidad 1: Objetivos de SIMA
  Unidad 2: Realización de consultas
  Unidad 3: Elaboración de mapas
  Unidad 4: Elaboración de gráficos y pirámides
- Módulo IV: Enseñanza estadística en la web escolar
  Unidad 1: ¿Por qué una web de estadística pensada para escolares?
  Unidad 2: Clasificación de las materias

En el Módulo I se trata la generación y planificación de la información estadística pública. Se ha intentado no entrar en demasiados detalles, usando diagramas para explicar las relaciones entre organismos de estadística, entre actividades estadísticas, cómo funcionan las operaciones estadísticas más importantes,... Se han incluido algunos datos anecdóticos para suavizar los contenidos y utilizado algunos ejemplos para explicar conceptos como la representatividad de una muestra.

El Módulo II es prácticamente una presentación pormenorizada de la publicación "Atlas Estadístico de Andalucía". No había mucho margen para amenizar el contenido más allá de lo que lo hace el propio Atlas, aún así se han utilizado nubes de etiquetas para resumir los contenidos de cada bloque de la publicación y se han tratado de explicar detalladamente los objetivos que persiguen los mapas y actividades didácticas.

El Módulo III constituye una especie de tutorial sobre SIMA basado en ejemplos que se pueden ir realizando conforme se va avanzando por las unidades del módulo. Al mismo tiempo se dan algunos consejos sobre cómo mostrar la información estadística en mapas desde un punto de vista de una difusión adecuada y eficaz.

El Módulo IV hace un repaso por la web escolar. Dicha web no estaba terminada en el momento de presentar el módulo, así que no se profundiza demasiado, sino que se queda en una presentación. También se complementa con la inclusión de contenidos educativos procedentes de otras webs estadísticas públicas de España y del mundo.

Al final de cada módulo se plantea una actividad que debe realizar el alumno y subir en un fichero a la plataforma.

- Actividad 1: Contrastar información estadística publicada en medios de comunicación
- Actividad 2: Planteamiento de una actividad didáctica para cada uno de los temas
- Actividad 3: Representar información estadística en mapas

- Actividad 4: Plantear un juego o adaptar actividades didácticas

Además, se utilizan otros dos documentos adicionales: la agenda del curso, donde se indica la distribución de horas de dedicación a cada parte del curso y el calendario con las fechas de entrega de las actividades.

Todos estos documentos se presentan en un formato pdf. Se ha elegido esta opción para permitir que el alumno descargue el material en su equipo y no precise de estar conectado a la plataforma necesariamente. Este formato también asegura que su posible impresión en papel sea fiel a la presentación electrónica.

## 2.2. DESARROLLO.

Los módulos se han ido habilitando gradualmente, cada vez que se cumplía el plazo de entrega de una actividad. Este plazo era la medianoche de cada día correspondiente, intentando que cayera en domingo, ya que este día de la semana posibilita que se pueda disponer del fin de semana para hacer la actividad.

Al principio se habilitaba el módulo siguiente a primera hora del día siguiente de la entrega, normalmente un lunes. Pero los alumnos sugirieron si se podía hacer antes y se optó por habilitarlo el viernes anterior a la entrega, para que los que la entregaran pronto ganaran ese fin de semana para el módulo siguiente.

En este punto hay que decir que a los alumnos no les agrada estar pendientes de que se vayan habilitando los módulos para hacer las actividades poco a poco, prefieren que estén todos los contenidos disponibles de una vez, así nos lo han hecho saber. Sin embargo, un desarrollo gradual del curso parece dar buenos resultados, si saben que hay unos plazos de entrega correlativos se lo toman con más calma. Además, al tener que estar pendientes cada cierto tiempo de entrar para descargar los nuevos contenidos es más fácil que participen en los foros. De otro modo se corre el riesgo de que dejen todo para el final y hagan las actividades de forma apresurada y sin asimilar conocimientos, se descargarían todo el material en su equipo y no entrarían más hasta el final del curso.

Para el primer módulo, el más extenso, se han dejado casi 3 semanas de plazo, teniendo en cuenta además que era el comienzo del curso y hay que contar con un tiempo para familiarizarse con la plataforma. Para el resto se han dejado 2 semanas (Figura 2).

| | LUN | MAR | MIE | JUE | VIE | SAB | DOM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Inicio | 15 | 16 | 17 | 18 |
| Marzo | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 1 Entrega de la actividad 1 |
| Abril | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 Entrega de la actividad 2 |
| | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 Entrega de la actividad 3 |
| | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Mayo | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | 14 | 15 Entrega de la actividad 4 | | | | | |

Figura 2. Calendario de la primera edición

Además de los materiales ya mencionados, se ha tratado de dinamizar el seguimiento del curso con el planteamiento de cuestiones y material adicional a través de los foros.

## 2.3. ACTIVIDADES PROPUESTAS.

La plataforma permitía escoger entre varias formas de valoración de las actividades, se ha optado por escoger una forma de valoración categórica predefinida: No satisfactorio / Satisfactorio / Supera lo esperado. Así, aparte de distinguir entre "apto" y "no apto", se puede reconocer alguna actividad entregada que destaque sobre el resto. No obstante, si se entrega fuera de plazo no se puede obtener la máxima calificación. Cuando la actividad tiene un resultado "no satisfactorio", se orienta al alumno en las causas y se le invita a enviarla de nuevo con las modificaciones oportunas.

La superación del curso correspondería a un mínimo del 80% superado. Dado que hay 4 actividades y 3 de ellas supondrían el 75%, se ha valorado también la participación activa en los foros en caso de la falta de una actividad o la no superación de la misma.

A cada alumno se le ha comentado individualmente su trabajo, destacando las virtudes y defectos, aunque también se han hecho comentarios generales a través de los foros.

La primera actividad consistía en buscar tres noticias relacionadas con estadísticas, contrastar la información y hacer una crítica. El material de este primer módulo debe haber capacitado a los alumnos para discernir entre buenas y malas interpretaciones al conocer la forma de elaboración de las estadísticas. Un buen número de alumnos ha captado el enfoque crítico y el resultado ha sido bastante satisfactorio. Se hizo una selección de los mejores comentarios y se

publicaron en un hilo del foro, debidamente anonimizados para que nadie se molestara, con una buena acogida por parte de los alumnos.

En la segunda actividad se pedía elaborar una breve actividad didáctica para cada uno de los cinco bloques utilizando los mapas y gráficos del Atlas Estadístico de Andalucía. El objeto de esta actividad era que conocieran en profundidad la publicación y vieran su utilidad como recurso didáctico. Algunos alumnos optaron por escoger mapas de otras fuentes y solicitaron información al respecto, así que se aprovechó para explicar la creación de mapas estadísticos con BADEA y el Servicio de mapas estadísticos de nuestra web, ampliando el material del curso.

La tercera actividad era relativa al SIMA, había que hacer una consulta de dos variables y crear una tercera calculada con las dos anteriores (Líneas ADSL por cada 1.000 habitantes), para luego representar esta última en un mapa. Se utilizó un hilo del foro para hacer comentarios generales acerca de cómo representar información estadística en un mapa de forma adecuada.

Para la cuarta actividad se pensó en un primer momento que consistiera en proponer una actividad didáctica para realizar en clase tomando un formato similar a las de la web escolar, pero dado que se parecía demasiado a la segunda actividad, se propuso también la posibilidad de elegir otra opción, que era hacer un juego basado en estadísticas. Casi todos los alumnos optaron por hacer un crucigrama o una sopa de letras con términos estadísticos, aunque también han presentado algunos juegos más curiosos como completar supuestas noticias de datos estadísticos o puzles que forman frases.

## 2.4. RESULTADO.

Desde el Instituto se considera que tanto la forma de presentación de los materiales como el procedimiento seguido en el desarrollo general del curso han sido apropiados. No obstante, se ha pedido a los alumnos que respondan a una breve encuesta de evaluación:

1. De entre todo lo aprendido, ¿qué consideras que resultará de más utilidad en clase?

En las respuestas destaca sobre todo el SIMA. Se menciona la web escolar (que ha tenido muy buena acogida), toda la web del Instituto y también se cita el Atlas Estadístico de Andalucía,… Hay varias opiniones que valoran simplemente la facultad de poder usar datos reales en los ejemplos de clase.

2. ¿Qué mejorarías o qué has echado de menos en los contenidos?

Las opiniones son muy variadas: poder subir actividades propias a la web escolar, dedicarle más tiempo al curso (más horas de duración), más recursos en la web escolar, que las actividades solicitadas en el curso fueran más concretas en lo que se pide y actividades adicionales de tipo cuestionario, profundizar en la relación entre variables, más profundidad en el SIMA, trabajar con parámetros estadísticos (media, moda o mediana),… También hay varios alumnos que no echan nada en falta.

3. ¿Se han cumplido tus expectativas sobre este curso?

Las respuestas son muy positivas en este aspecto. Algunos hablan de "sorpresa" por el enfoque que se le ha dado, ya que esperaban que fuera más numérico. Hay solicitudes de una mayor profundización en una hipotética segunda parte del curso.

# 3. WEB ESCOLAR.

La web escolar se concibe con el propósito de dar a conocer el Instituto y, sobre todo, la información que genera todo el Sistema Estadístico y Cartográfico de Andalucía a un público que necesitará en un futuro próximo hacer uso de esta información. El objetivo concreto de la web escolar es acercar estos contenidos al alumnado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de Andalucía en un formato adaptado.

Aparte de esta labor de acercamiento a los alumnos, facilitando la comprensión de conceptos estadísticos, realiza una función formativa complementaria en otras materias de la ESO y proporciona información sobre la Comunidad Autónoma relacionada con dichas materias. Es decir, además de la enseñanza de estadísticas, el alumno puede extraer información sobre distintos temas que le permitan conocer mejor la realidad de Andalucía.

## 3.1. FUNCIONALIDAD.

La web escolar es una página diferente e independiente de la web oficial del Instituto. Se ha pretendido que el diseño de esta página sea atractivo (con multitud de elementos gráficos), resulte fácil de utilizar y sea rápida en el acceso a los contenidos. Estas características intentan fomentar su uso y atraer a su público objetivo.

El diseño de la web promueve un uso independiente por parte del propio alumno sin necesidad de tutela, sin embargo, también puede ser empleada por el profesor para apoyar sus clases. Las actividades, que son principalmente interactivas, pueden imprimirse para su realización en una clase normal de una asignatura. Por tanto, se incentiva el acceso individualizado del alumno a la web con el fin de completar la comprensión de los conceptos introducidos por el profesorado, a través de actividades resueltas on-line.

Las cuestiones que se plantean en los diferentes núcleos temáticos se ilustran mediante estadísticas oficiales. Estos datos se presentan resumidos y en un formato comprensible para el alumnado de ESO.

## 3.2. ESTRUCTURA DE CONTENIDOS.

La web escolar (Figura 3) se estructura en las siguientes secciones:

- Acceso Temático. Consta de cinco temas (Territorio, Población, Sociedad, Economía y Medio Ambiente) que se dividen a su vez en bloques y contienen información estadística adaptada a los alumnos mediante preguntas y actividades estadísticas. Para cada pregunta se da la oportunidad de ampliar la información sobre la misma, ya sea en cuanto a otros contenidos relacionados o mediante una mayor desagregación territorial. De este modo se ofrecen resultados estadísticos por medio de preguntas y titulares amenos, de forma simplificada. Cuando se accede al contenido, en un primer momento se recurre a elementos gráficos y pequeñas introducciones, sin embargo, al final siempre se muestra la tabla con los datos que respaldan los gráficos y comentarios resaltados. También se puede realizar una actividad sobre los datos mostrados y consultar información sobre la fuente de la que proceden los mismos.
- Curiosidades. Presenta una serie de titulares que recogen datos curiosos de entre toda la información de la web. Resalta los datos que se consideran

más interesantes o que pueden llamar la atención de los alumnos. Se puede ampliar el titular y acceder al apartado donde se expone la información completa.

- Actividades. Mediante esta sección se puede acceder a listados de actividades agrupadas por curso (1º, 2º y 3º de ESO) y por asignatura asociada (Ciencias sociales, Matemáticas y Ciencias naturales). Eligiendo cualquiera de estas opciones, se presentan amplios listados de todas las actividades que se pueden enmarcar en esos contextos de cursos y materias.
- Contador de población. El contador de población consiste en una representación dinámica de la evolución de la población andaluza, nacional y mundial. Permite conocer el número de habitantes en tiempo real mediante unas cifras estimadas, calculadas en función de una serie de parámetros que se van actualizando. Adicionalmente, se puede consultar el contador para todas las provincias andaluzas. Podemos ver que el dato mundial sube muy rápido, y conforme bajamos de ámbito territorial debemos esperar más tiempo para ver un cambio en la cifra de población.
- Profesores. Dado que la web en sí está concebida principalmente para el manejo individual por parte del alumno, aquí se incluye material de apoyo para los profesores que refuerza la posibilidad de llevar a cabo actividades de grupo en clase.
- Concurso. En esta sección se puede encontrar la convocatoria de concursos para alumnos: bases de los mismos, plazos de presentación y fallo del jurado.
- Enlaces de interés. Recoge otros recursos didácticos relacionados y disponibles en la red que pueden ser de interés para profesores y alumnos.
- Volando voy. Consiste en un visualizador interactivo que permite ver Andalucía como si se estuviera volando por el cielo.
- Acceso a Juegos. Viene a dotar de un carácter lúdico a la web, a través de varios juegos relacionados con la estadística.
- Área de usuarios. Con la realización del registro en la web escolar, llevado a cabo al rellenar un formulario muy sencillo, los usuarios pueden consultar el historial de las actividades realizadas y las puntuaciones que han obtenido en ellas.




Figura 3. Página principal de la web escolar

## 4. VISITAS.

Es posible visitar las sedes del Instituto. Ya son muchos los colegios e institutos de secundaria que han pasado por nuestras instalaciones. Se les da una charla a los escolares sobre la organización estadística y las principales actividades que se elaboran en estadística pública: el Índice de Precios de Consumo, la Encuesta de Población Activa y la diferencia de cifras con el paro registrado, el Padrón y los Censos,… Si quiere concertar una visita póngase en contacto con nosotros a través del número de teléfono 900 101 407.

# FUNCIONES DE CRECIMIENTO - UNA EXPERIENCIA DE APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE BASADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA.

**José Manuel Dos Santos Dos Santos**,
Escola Secundária D. Afonso Sanches*, Vila do Conde- Portugal*

## RESUMEN.

En este trabajo se presenta el resultado de una experiencia de aplicación del Aprendizaje Basado en Resolución de Problemas (ABRP) en la disciplina de matemática de la formación profesional de nivel secundario. La modalidad de ABRP utilizada se basa en la propuesta de Ann Lambros (2004) de aplicación del Problem Based Learning. Aquí se presenta resumidamente esta metodología y se describe su aplicación, en una clase de formación profesional, en el último año de educación secundaria. La experiencia decore en el Modulo 9 – Funciones de Crecimiento y pretende responder a dos cuestiones: i) Puede el ABRP ser una mas-valía para el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos en los cursos de formación profesional? ii) El uso del GeoGebra puede ser un facilitador para la ejecución de las tareas propuestas en el aula?

**Nivel educativo**: Cursos Profesionales de Educación Secundaria, Módulo 9 - Funciones de Crecimiento, 12º año de escolaridad.

## 1. CUADRO TEÓRICO.

El ABRP aparece en 1969, por John Evans, en la Escuela de Medicina de la Universidad McMaster en Ontario, Canadá (Haslett, 2001).

ABRP es una metodología de enseñanza, centrada en el estudiante, parte de un problema para el aprendizaje autónomo y coherente de los alumnos, en colaboración con sus colegas. Esta estrategia visa la autonomía del estudiante, el desarrollo de su creatividad y su sentido crítico, en un entorno colaborativo. El ABRP es compatible con las teorías del aprendizaje cognitivo, constructivismo de Piaget y el Constructivismo Social de Vygotsky. El aprendizaje implica un papel activo del individuo, asistido por sus compañeros y mediado por el profesor.

En esta metodología, el profesor tiene una visión racionalista de la ciencia contemporánea, de manera similar a lo que ocurre en la enseñanza de la investigación como una manera de construir teorías para comprender mejor el mundo (Lucas citado por Clara Vasconcelos, 2010), ser un facilitador y un amigo-crítico del trabajo de los estudiantes.

Los problemas deben promover el pensamiento flexible y la interdisciplinariedad. Algunos de los problemas deben ser poco estructurados y abiertos, de modo a apoyar la motivación intrínseca, tener un carácter realista y

de acuerdo con las experiencias de los estudiantes. Un problema que promueva el feedback permite a los estudiantes: evaluar los conocimientos que poseen; promover la formulación de nuevos problemas; el razonamiento y estrategias de aprendizaje. Los problemas también deben promover la conjetura y la argumentación. La formulación del problema debe ser lo suficientemente compleja para requerir la interrelación de varios conocimientos y debe motivar a los estudiantes conocer y aprender más. (Hmelo-Plata, 2004)

Uno de los axiomas de esta metodología de trabajo y de colaboración es el cuidado que se debe tomar en el seguimiento del trabajo de los grupos, fomentando las preguntas, compartiendo opiniones, formulando hipótesis y la capacidad para defenderlas o de confirmarlas. La comunicación y el trabajo en el grupo es esencial, tanto para compartir los resultados con los compañeros de grupo o en las sesiones plenarias en la clase, por lo que las conclusiones suelen validar el conocimiento construido. Así, el debate en sesión plenaria es esencial para sistematizar lo que se ha aprendido (Savery, 2006).

Según Lambros (2002), citado por Vasconcelos 2010, el ABRP depende de una estructura propia, pasando por ciertas etapas, así, "después de que los alumnos han comprendido el problema, estos deben: (i) preparar una lista de los hechos proporcionada por el problema, (ii) preparar una lista de lo que necesitan saber para entender el problema, y (iii) definir una lista de lo que tienes que buscar para solucionar el problema. Después de esta secuencia, el proceso continúa con la lista de posibles soluciones. Esta lista traerá algunas posibles formas de resolver el problema y exigir el establecimiento de una nueva lista de contenidos a aprender. La última lista debe permitir a los estudiantes recoger información para defender o no, las posibles soluciones."

Esta metodología ha demostrado ser prometedora, han aparecido varios cambios tanto en la forma como en los contextos que es utilizada. Una profundización de esta metodología se basa en proyectos más amplios, a diferencia del problema más restringido, se están aplicando en los distintos niveles de la educación, proporcionando un enfoque interdisciplinar. Algunas investigaciones muestran que el éxito de este enfoque está estrechamente relacionado con la formación del profesorado y de sus propias concepciones (Hmelo-Plata, 2004, p. 261).

## 2. CUADRO CURRICULAR

En el desarrollo del Módulo 9 - Funciones de Crecimiento, de la asignatura de Matemáticas, en una clase del décimo segundo año, del curso profesional de Técnico de Gestión Ambiental, se pretende trabajar el tema de la resolución de problemas. Una de las tareas previstas para el trabajo en el aula, pasa por que los estudiantes elijan los modelos más adecuados para la descripción de una situación dada. En este contexto, se pensaran cuatro tareas que se presentaron a los grupos de trabajo con el fin de desarrollar las capacidades e contenidos matemáticos, previstos en el currículo de matemática de la educación secundaria de los cursos profesionales.

En relación a competencias, el currículo prescribe la necesidad de desenvolver, en los estudiantes, la capacidad de:

- hacer e investigar los modelos matemáticos con el recurso a la utilización de tecnologías;
- hacer e investigar los modelos matemáticos con el recurso a la utilización de tecnologías;
- diseñar, analizar y describir los modelos de los fenómenos reales utilizando modelos no lineales de crecimiento;
- representar las relaciones funcionales de diversas maneras y pasar unos pocos tipos de representación a otra, utilizando reglas verbales, tablas, gráficas y expresiones algebraicas, y entre otras cosas, la tecnología de gráficos;
- comunicarse oralmente y por escrito las situaciones problemáticas y sus resultados.

(Carvalho, 2005, p. 47-48)

Desde el punto de vista de las materias matemáticas, el currículo establece la intención de que el alumno pueda:

- reconocer y dar ejemplos de situaciones en las que los modelos exponenciales son buenos modelos, tanto para la lo que se observa como para lo que se espera;
- utilizar las reglas de las calculadoras gráficas o exponenciales y una computadora para encontrar los valores o gráficos que responden a los posibles cambios en los parámetros;
- interpretar una función de  y predecir la forma de su gráfica;
- resolver problemas sencillos y funciones de aplicación que utilizan diferentes modelos de crecimiento.

(Carvalho, 2005, 48)

# 3. CUESTIONES Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Planteando-se el cuadro teórico e curricular atrás referido, resumidamente explicado, en el desarrollo del Capítulo 9 – Funciones de Crecimiento, hemos seleccionado una secuencia de cuatro tareas (presentadas en la sección siguiente), que los estudiantes trabajaron en grupo, tratando encontrar la solución de los problemas propuestos. En el aula fueran utilizadas las tecnologías, calculadoras gráficas y el GeoGebra. Como metodología de enseñanza se uso el ABRP. Estas opciones fueran tomadas con la intención de responder a las dos preguntas siguientes:

i) Puede el ABRP ser una mas valía para el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos en los cursos de formación profesional?
ii) El uso del GeoGebra puede ser un facilitador para la ejecución de las tareas propuestas en el aula?

Al tentar responder a estas cuestiones el profesor-investigador es el agente principal para la recopilación e interpretación de datos. Estos datos tienen un carácter descriptivo y detallado, que permiten al investigador analizar las acciones y los hechos en detalle (Bogdan e Biklen, 1994). Por otro lado, se hace la opción por un experimento educativo (teaching experiment), como metodología de investigación, ya que tiene como objetivo "investigar las

posibilidades de mejora de la educación mediante la realización y posterior estudio de nuevas formas de aprendizaje" (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003, p.10).

# 4. SECUENCIA DE TAREAS

Cuatro tareas han sido elegidas para desarrollar un total de ocho aulas, todas ellas dirigidas a la creación de modelos exponenciales en diferentes contextos. Las tres primeras tareas fueron presentadas en un contexto "no matemático", la cuarta tarea es destinada a resolver una ecuación en un contexto puramente matemático. Hecho común a todas las tareas es que los estudiantes no sabían un método "estándar" para su resolución. En este sentido, las propuestas de trabajo son abiertas, las dos primeras, y cerradas, las dos últimas, todas ellas representaron un elevado grado de desafío para los estudiantes, como Ponte (2005) afirma tareas cerradas e complejas constituyen problemas reales para los alumnos, por otro lado tareas abiertas e complejas se figuran como investigaciones. La figura 1 muestra los cuatro problemas que se presentaran a los estudiantes.

| | |
|---|---|
| **Problema 1** | Imaginemos que un hacker ha creado un virus que se propaga a los dos contactos al abrir un mensaje infectado, sólo una vez en cada equipo. Las estadísticas de la ciudad, donde el virus se había extendido, indican la apertura de dos mensaje de correo electrónico a cada minuto. El país donde fue liberado el virus tiene un total de diez millones de ordenadores. Se sabe que el final de 20 minutos todos los ordenadores se infestaron. Al final de que tiempo estará infestado todo los ordenadores del país?<br>*Imagina que tienes de preparar el envío de un telegrama a las autoridades nacionales para alertar sobre el tiempo que le tomará a la infección total del país, presentando los argumentos que justifican tu mensaje.* |
| **Problema 2** | Vieron una colonia de bacterias en una placa de Petri con un radio de 5 cm, cada bacteria se encontraba en un área de 0,1 mm2. Además de comprobar que cada bacteria, cada minuto, dando lugar a diez otras bacterias. Su compañero de laboratorio, dijo que la cultura ha sido elaborado con una sola bacteria en cada placa de Petri. ¿En cuanto tiempo el sistema entra en entropía?<br>*Usted debe preparar un informe que: describa cómo el cultivo de bacterias se desarrolla, presentar un modelo matemático adecuado, predecir el momento en que la colonia alcanza el punto de entropía del sistema; y presentar un resumen de los cálculos o razonamientos utilizados.* |
| **Problema 3** | Cuando se sirve una taza de café expreso, el café está demasiado caliente y tomará algún tiempo para que se pueda beber. La evolución de la temperatura, $T(°C)$, con el tiempo, $x\ (min)$ desde el momento en que el café se sirve, es una función definida por la expresión:<br>$T(x) = 60 \cdot 0{,}9^{x} + 20$<br>1. ¿A qué temperatura el café se entrega al cliente?<br>2. ¿Cuánto tiempo tiene que esperar para tomar el café, el cliente que lo prefiere a 60ºC?<br>3. ¿Por cuánto tiempo el café se mantiene entre los 40º y 35º grados? |
| **Problema 4** | ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 9x + 20)} = 1$ ?[1] |

Figura 1. Problemas que se presentaran a los alumnos.

[1] Una descripción mas pormenorizada de la aplicación de esta tarea se encuentra en: www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo14.pdf

## 4.1. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DE TAREAS EN AULA.

El experimento se llevó a cabo durante cuatro semanas de clases, en 135 minutos por semana, divididos en 90 minutos (1ª parte) y 45 minutos(2ª parte). Los diecisiete alumnos de la clase se dividieron en cuatro grupos, tres grupos con cuatro estudiantes y el cuarto grupo con cinco estudiantes. Los estudiantes tenían acceso al manual de texto escolar, la conexión con Web en un ordenador portátil, el GeoGebra (GGB) y dos calculadoras gráficas (MCG) por grupo, y, obviamente, la interacción con el profesor siempre que lo solicitaran.

Durante la clase el papel del profesor fue de ayudar a los estudiantes, disciplinando-se en no dar respuestas, pero si, por devolver la pregunta al grupo de trabajo, cuando este parecía capaz de encontrar las respuestas o formular mas preguntas. En otros casos el profesor indico lugares donde podían encontrar información que necesitaban, en el caso de la demanda inicial no se ha demostrado productiva, en pocas palabras el profesor asume un papel de "facilitador, mediador y organizador de la enseñanza y el aprendizaje, proporcionando orientación, que funciona como un recurso y la asistencia en los procesos de resolución cuando sea solicitado por los estudiantes" (Savery y Duffy, 1995; Jones et al, 1997; McInnis, 2000; Guerra, 2008; Guerra y Vasconcelos, 2008), citado en Guerra y Vasconcelos 2009.

En las sesiones de 90 minutos, primera parte de trabajo de cada tarea, los estudiantes trabajaran en grupo, tentando resolver el problema. Siempre tuvieran que hacer un informe donde indicaban: los hechos que integraba cada una de las tareas; la información necesaria; el contenido matemático necesario para resolver el problema; enumerando la información ya conocida y otra que, por casualidad, era necesario saber. Esta estructura es similar a la de trabajo propuesto por Ann Lambros (2002), citado por Vasconcelos 2010.

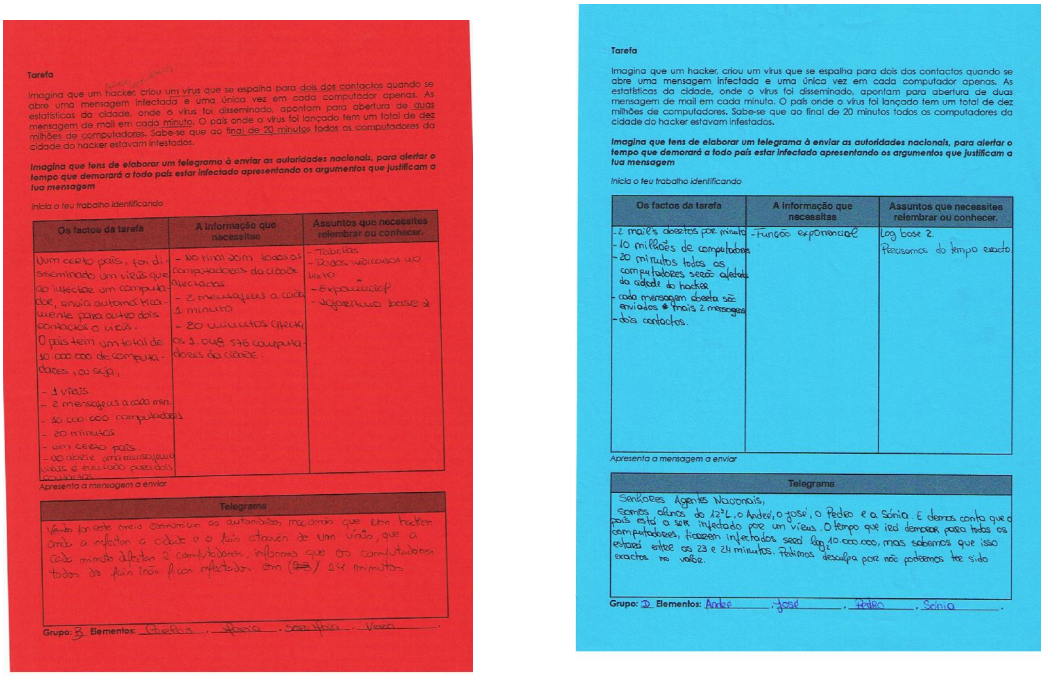



Figura 2. Hoja de registro del grupo B (izquierda) y D (derecha) para la primera tarea.

En la segunda parte, la sesión de 45 minutos, se uso para discutir los resultados y la preparación de resúmenes con los contenidos matemáticos utilizados. En las dos primeras tareas, *Problema 1* y *Problema 2*, los estudiantes recibieron las hojas de registro necesarios (fig. 2). En la tercera y cuarta tarea, los enunciados fueran proyectados en el aula y los estudiantes, en grupo, organizaron, ellos propios, sus registros. Cabe destacar que en la cuarta tarea, *Problema 4*, se ha hecho en un corto periodo de tiempo, la ejecución e la discusión de la cuarta tarea se hico en 90 minutos, por lo que los 45 minutos, de la segunda parte, se dedicó a una evaluación global de la labor realizada durante este experimento, conjuntamente, por los alumnos y el profesor. Cabe señalar que en la cuarta tarea, los grupos no realizaran cualquier registro más allá de la resolución de la tarea utilizando lenguaje matemático.

## 4.2. Resultados de la Aplicación de la Secuencia de Tareas en Aula.

El trabajo se llevó a cabo con la autonomía de los grupos y se obtuvieron resultados diferentes dependiendo de las estrategias utilizadas por los grupos y las tecnologías que se utilizan. Los resultados se registran sumariamente en la figura 3.

| | | Identifican en la tarea: | | | Presentan informe con: | | | | | Presentan solución del problema e un modelo | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Hechos | información necesaria | asuntos a recordar o conocer | Resumen | Esquemas | Aproximación numérica o por tablas | Análisis gráfica o funcional | Evidencia de recurso a tecnología | inadecuado | adecuado | muy adecuado |
| P1 | A | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | RA | 1 | 0 | 0 |
| | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| | C | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | MCG | 0 | 1 | 0 |
| | D | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| P2 | A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | MCG | 1 | 0 | 0 |
| | B | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| | C | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | MCG | 0 | 1 | 0 |
| | D | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| P3 | A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| | B | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| | C | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | MCG | 0 | 0 | 1 |
| | D | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | GGB | 0 | 0 | 1 |
| P4 | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | GGB(R) | 0 | 0 | 1 |
| | B | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | GGB (R) | 0 | 0 | 1 |
| | C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | RA | 0 | 0 | 1 |
| | D | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | GGB (R) | 0 | 0 | 1 |
| | | 12 | 12 | 11 | 8 | 14 | 6 | 9 | MCG-10 GGB-1 GGB(R)-3 | 2 | 2 | 12 |

| MCG – Maquina calcular Gráfica | GGB - Uso exclusivo del GeoGebra | GGB (R) – GeoGebra como recurso | RA – Resolución algebraica |

Figura 3. Resumen de resultados por problema e por grupos.

De las tareas propuestas, las que tenían contextos inter-discilinares, fueron las que tuvieron más impacto en la motivación de los estudiantes, aunque en ellas, ha habido un grupo que no llegó a las soluciones adecuadas. A medida que las tareas se han realizado los estudiantes se adaptaron a la metodología, elaborando sus registros de forma autónoma, sin necesidad de un protocolo proporcionado por el profesor.

El carácter más abierto e interdisciplinar de las dos primeras tareas llevo a que los alumnos se concentraran en encontrar una estrategia de resolución, utilizando tablas e esquemas para solucionar el problema, privilegiando un

abordaje más numérico. El uso de la máquina de calcular gráfica se limito a instrumento de cálculo, permitiendo a los estudiantes el cálculo de valores que necesitaban e testar funciones que podían representar las situaciones propuestas (fig. 4). Observe-se que estos estudiantes ya tenían usado, en el curso anterior

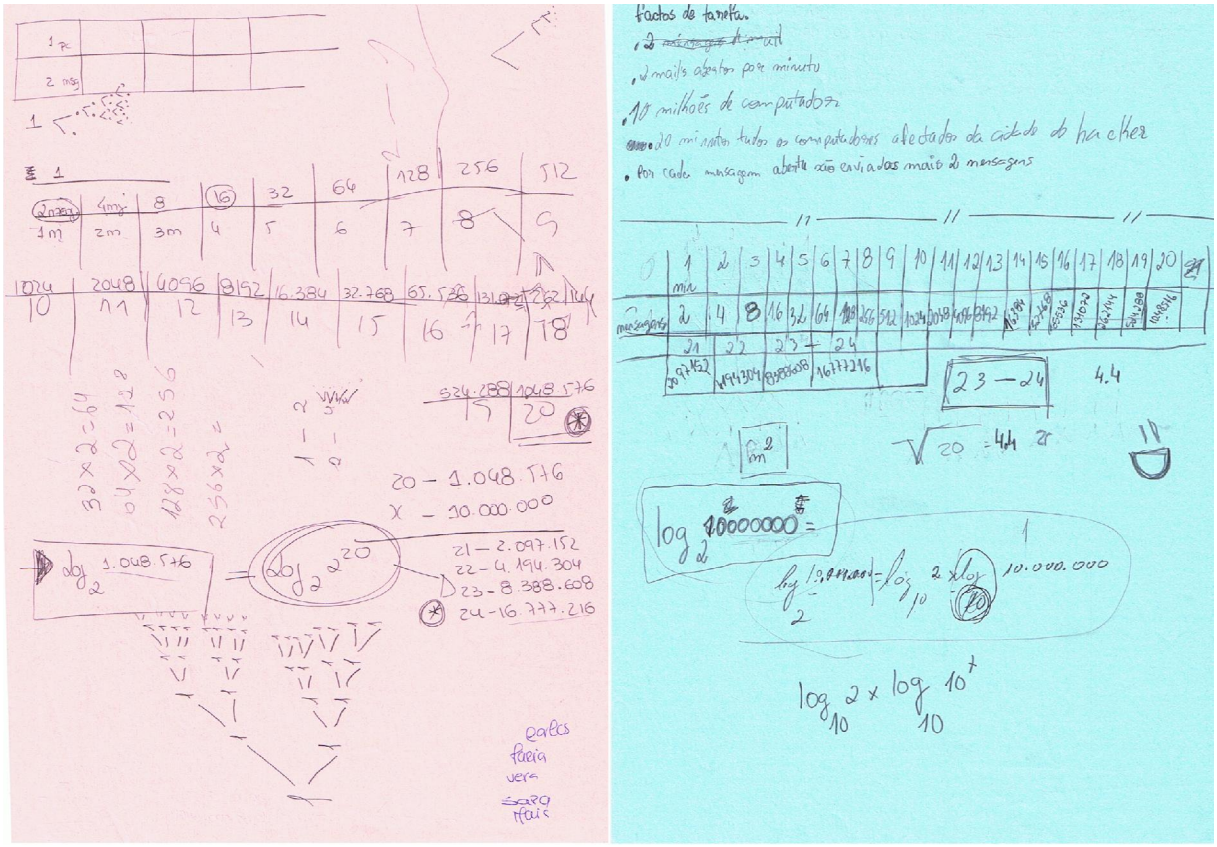


Figura 4. Hojas de trabajo del grupo B (izquierda) y D (derecha) para la primera tarea.

el GeoGebra en el Modulo A3 – Estadística, creando tablas e analizando variables estadísticas, a una e dos dimensiones. Sin embargo, en la primera e segunda tarea no usaran el GeoGebra para su trabajo optando por la calculadora.

En la tercera e cuarta tarea la mayoría de los grupos usaran el GeoGebra, lo que no seria de extrañar. En primer lugar, por que en estas dos tareas los estudiantes ya tenían el modelo matemático, en segundo, el GeoGebra permitía una mejor visualización para las funciones que integraban las tareas, por ultimo, en el módulo anterior, sobre derivadas, el GeoGebra fue muy utilizado.

### 4.3. Discusión de Resultados.

Considerando los resultados obtenidos en la solución de los problemas, el grupo de estudiantes que no completaron con éxito, las dos primeras tareas, presentan un rendimiento diferente, mejor si se compara con los métodos de enseñanza utilizados en el aula anteriormente. Aunque este grupo de estudiantes han trabajado duro no utilizaran modelos adecuados. Por otro lado, los

estudiantes con un menor rendimiento en general, tuvieron un desempeño muy por encima de su rendimiento habitual.

Como regla general, todos los estudiantes reportaron un mayor compromiso y actividad, mejorando sustancialmente las actitudes hacia las matemáticas. Debe tenerse en cuenta que es el grupo A, de los alumnos muestran en general un mejor rendimiento, que tuvieron más dificultades en adaptarse a la nueva metodología.

Los problemas planteados no eran muy complejos, dado las características de los alumnos de los cursos profesionales, más también, por haber la intención de mejorar la comunicación y la presentación de las ideas matemáticas de los varios grupos en el plenario. Sin embargo, las tareas presentadas a los estudiantes, con la excepción del problema 4, los llevaron a la creación de múltiples conexiones entre los diferentes saberes, matemáticos o otros, motivándolos a conocer y aprender otros tópicos matemáticos relevantes.

En cuanto al uso de GeoGebra como un recurso (sigla GGB-R de la figura 3) fue utilizado por tres grupos, sólo uno de los cuatro grupos obtuvo la solución del problema usando apenas el GeoGebra de un modo muy adecuado. Siempre que el GeoGebra fue utilizado los grupos llegaran a soluciones muy adecuadas del problema. Observe-se que al contrario del uso del GeoGebra, la calculadora gráfica fue usada esencialmente como apoyo a la realización de cálculos, provocando una comunicación menos rica y diálogos menos interesantes. Esto se ve, con detalle, en la análisis de los diálogos sostenidos entre alumnos y el profesor (DOS SANTOS, 2012)

Considerando el rendimiento de los estudiantes en la secuencia de tareas, observe-se que los grupos de estudiantes que tuvieran antes de la aplicación de esta experiencia, mejor rendimiento y clasificaciones elevadas, grupos A y C, fueran aquellos que encontraran mas dificultades con la ABRP, presentando soluciones poco adecuadas o adecuadas, contrariamente a los dos otros dos grupos de alumnos.

Fue evidente que la secuencia de tareas y la metodología de enseñanza fomentaran el uso de esquemas, estrategias diversificadas de análisis y resolución de problemas, los alumnos comunicaran sus resultados tentando confirmar o refutar sus conjeturas. En este punto fue fundamental la posición del profesor como mediador, por veces, mas uno entre ellos, en particular en las dos primeras tareas, que fueron un problema, genuino, para el profesor en función de las opciones de trabajo tomadas por los grupos, tentando el profesor interpretar el razonamiento de los alumnos de modo a hacer las preguntas adecuadas y nunca dando respuestas.

# 5. CONCLUSIONES

La opción por este experimento educativo e por el análisis cualitativo de los resultados fue una mas-valía para la investigación. Analizar el proceso de trabajo de los estudiantes con minucia, valorizando los procesos en detrimento del producto, permitió al profesor-investigador ayudar a los estudiantes a mejorar el proceso de aprendizaje.

El ABRP como metodología de enseñanza se revelo muy positiva, en particular para los alumnos de menor rendimiento en matemáticas. De este modo el ABRP

se adecua como método para la enseñanza de las matemáticas de los alumnos en los cursos de formación profesional que, en general, tienen bajas expectativas en esta asignatura.

El uso del GeoGebra fue un facilitador para la ejecución de las tareas mas cerradas. Observe-se que su utilización fue espontánea, los grupos lo usaran sin necesidad de ayuda del profesor. Puede afirmar-se que el software fue u facilitador para la cuarta tarea, donde el contexto matemático era evidente.

Entre las debilidades de esta experimento educativo se destaca: a) la necesidad de una mayor inversión de tiempo; b) de algunas dudas por parte de los estudiantes, especialmente en aquellos que revelaran mas rendimiento antes da aplicación de este experimento educativo, estos se cuestionaban si la inversión que estaban haciendo en el aula se traduciría en mas-valía de de su aprendizaje. Estas debilidades fueran ya apuntadas por Taplin e Chan (2001, p. 287) en experiencias anteriores de resolución de problemas en el aula.

## REFERENCIAS.

BOGDAN, R., & BIKLEN, S. (1994). Investigação qualitativa em educação. Porto Editora.

CARVALHO, J. et al. (2005). Programas de Matemática do Ensino Profissional, Direcção-Geral de Formação Vocacional. Lisboa.

COBB, P., CONFREY, J., diSESSA, A., LEHRER, R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational Researcher, 32 (1), 9-13.

DOS SANTOS, J. (2010) . Estadística e GeoGebra, ventajas e dificultades – Una experiencia en un Curso Profesional de Educación Secundaria en Portugal. I Jornadas GeoGebra en Andalucía – Conferencia de Encerramiento – Universidad de Córdoba.

DOS SANTOS, J. (2012). Quais as soluções da equação $(x^2-5x+5)^{(x^2-9x+20)}=1$ ?. In Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº 29, 161 – 172. ISSN: 1815-0640.

GUERRA, A. & VASCONCELOS, C. (2009). Aprendizagem baseada na resolução de problemas e construção de materiais didácticos na temática "Sustentabilidade na Terra". Revista CAPTAR: Ciência e Ambiente Para Todos. Vol.1, nº2, pp.147-165. Acedido a 10-01-2011, em: http://captar.web.ua.pt/media/%5B3%5D%20Guerra%20e%20Vasconcelos%20ED.pdf

HASLETT, L. (2001). 1969: McMaster University introduces problem-based learning in medical education. In Daniel Schugurensky (Ed.), History of Education: Selected Moments of the 20th Century [online]. disponible en: http://fcis.oise.utoronto.ca/~daniel_schugurensky/assignment1/1969mcmaster.html (en: 23-01-2011).

HMELO-SILVER CE (2004) Problem-based learning: What and how do students learn? Educational Psychology Review 16(3), 235–266.

LAMBROS, A. (2004). Problem-based Learning in Middle and High School Classroom: A teacher's guide implementation. California: Corwin Press.

LEBLANC, J. (1982) A model for elementary teacher training in probem solving. In: Lester FKJ, Garofalo J (eds) Mathematical Problem Solving. Issues in Research.

PONTE, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular, 11-34. Lisboa: APM.

Savery, J. R. (2006) Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. The Interdisciplinary Journal of Problem- based Learning, v. 1, n. 1, 9–20.

TAPLIN, M. CHAN, C. (2001) Developing problem-solving practitioners. Journal of Mathematics Teacher Education 4, 285–304.

VASCONCELOS, C. (2010) Notas da Unidade Curricular de Ensino das Ciências. Programa Doutoral em Ensino e Divulgação das Ciências. FCUP, Porto.

# ANÁLISIS DE UNA EVALUACIÓN DIVERSA EN MATEMÁTICA EMPRESARIAL

**Eugenio M. Fedriani Martel**,
*Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)*
**María del Carmen Melgar Hiraldo**,
*Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)*
**Inmaculada Romano Paguillo**,
*Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)*

## RESUMEN

En esta comunicación se plantea una cuestión de gran trasfondo académico: ¿cuál es la influencia real de los profesores en el aprendizaje de los alumnos? Obviamente, la respuesta que se da es parcial, pero pretende ser un punto de partida para futuros estudios más ambiciosos. En el documento se consideran las diversas formas de evaluación en la asignatura de Matemática Empresarial I y se trata de valorar cuáles son las variables más relevantes para explicar el diferente rendimiento de los estudiantes. En concreto, se realizan varios análisis estadísticos a partir de los datos de las evaluaciones continua y final llevadas a cabo por alumnos de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide, considerando incluso al profesor como variable relevante.

**Nivel educativo**: Universidad

## 1. INTRODUCCIÓN

Tanto los estudiantes de Matemáticas como sus profesores son diversos, como se encarga de recordarnos el lema del XIV CEAM. La primera parte del enunciado (la que se refiere a la diversidad de los estudiantes) nos lleva a menudo a plantear variadas estrategias docentes e, incluso, evaluadoras. Más adelante comentaremos someramente esta cuestión, pero nuestra atención se centrará específicamente en la diversidad presente entre los profesores y en cómo ella puede afectar al rendimiento académico de los estudiantes de Matemáticas. Dentro del ámbito educativo (sobre todo en el universitario) existe un debate permanente acerca de si la autonomía o la libertad de cátedra deben estar por encima de la igualdad de oportunidades, la equidad, la justicia... Tal vez pueda parecer que esta presentación es exagerada, pero seguro que todos recordamos haber cursado asignaturas en las que el haber sido asignados a determinado grupo afectó significativamente a nuestro desempeño. Y nos estamos refiriendo aquí especialmente a cuando éramos estudiantes, a pesar de que nuestros recuerdos de entonces no pueden ser del todo objetivos. En cualquier caso, es indudable que los estudiantes que reciben clases de una misma asignatura por parte de diferentes profesores, pueden soportar variaciones sobre la aplicación de las metodologías docentes y, lo que suele ser más llamativo, sobre la aplicación de los criterios de evaluación relativos a la propia asignatura.

En esta comunicación, en concreto, tratamos de valorar qué aspectos pueden afectar más significativamente a los resultados de la evaluación de los estudiantes de la asignatura de Matemática Empresarial I impartida en la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Pablo de Olavide (UPO), fijándonos especialmente en los derivados de la presencia de diferentes profesores y de la aplicación de sus criterios personales, que frecuentemente se solapan con los criterios metodológicos de los coordinadores de los equipos docentes. El objetivo final será valorar si las diferencias que se producen en los resultados de la evaluación de los estudiantes se deben principalmente al profesor que les fue asignado o si, por el contrario, el efecto del profesor (de su práctica docente y de su aplicación específica de los criterios de evaluación) se subordina a otros efectos más relevantes.

Para realizar este análisis seleccionamos la asignatura antedicha y comparamos los resultados entre la evaluación continua de los alumnos (por titulaciones, por líneas, por grupos y según los profesores que les han impartido clases de teoría o de problemas) con los resultados en el examen escrito final. Esta comparación tiene sentido, ya que las evaluaciones continuas de un grupo las corrige el profesor asignado a dicho grupo, mientras que el examen final se corrige generalmente por preguntas, de modo que cada profesor evalúa una pregunta de todos los grupos de alumnos.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la siguiente sección se expone la metodología así como el sistema y criterios aplicados en la asignatura para evaluar a los estudiantes, comentando brevemente su diversidad; en la tercera sección se definen la muestra y las variables estudiadas; en la cuarta sección se realizan un análisis preliminar descriptivo y varios contrastes de hipótesis para comprobar si existe influencia de los distintos factores sobre los resultados de la evaluación. Con estos análisis llegamos a la última sección, donde se concluye con algunas breves reflexiones. Finalmente, se relacionan las referencias bibliográficas utilizadas en la elaboración del trabajo.

## 2. METODOLOGÍA Y EVALUACIÓN

Matemática Empresarial I es una asignatura semestral de 6 créditos, que figura dentro del módulo de formación básica en Ciencias Económicas y Empresariales (del plan de estudios de 2009) de cuatro titulaciones distintas: Grado en Administración y Dirección de Empresas (GADE), Doble Grado en Administración y Dirección de Empresas y Derecho (GADE-GD), Grado en Finanzas y Contabilidad (GFC) y Doble Grado en Finanzas y Contabilidad y Derecho (GFC-GD), todas ellas de la UPO; adicionalmente, existe un grupo mixto con docencia en inglés. Esta asignatura es impartida en todas las titulaciones en el 1$^{er}$ semestre de 1$^{er}$ curso y es el Área de Métodos Cuantitativos del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica quien se encarga de su docencia. Debe tenerse en cuenta el carácter fundamental de la asignatura en las titulaciones en las que se imparte. Su docencia es fundamentalmente presencial, con un modelo de docencia C1: 50% de enseñanzas básicas (EB) y 50% de enseñanzas prácticas y de desarrollo (EPD); sin embargo, se desarrolla con un importante apoyo en la enseñanza virtual.

Las sesiones de EB, se llevan a cabo con una sesión semanal de hora y media de duración, a lo largo de todo el semestre. Estas clases se basan en lecciones magistrales por parte del profesor y su finalidad es la de introducir los principales

aspectos teóricos de cada tema así como mostrar la aplicación de las técnicas desarrolladas a nivel teórico a la resolución de problemas.

Las sesiones de EPD, también se llevan a cabo mediante una sesión semanal de hora y media de duración durante todo el semestre. Estas clases son fundamentalmente prácticas y se dedican principalmente a la resolución de problemas por parte del alumno. Además, varias de las sesiones tienen lugar en el aula de informática; en ella los alumnos resuelven problemas con el ordenador utilizando el programa de computación simbólica *Mathematica 8.0*, cuyo funcionamiento es adquirido previamente por el alumno (para facilitar el manejo se les proporciona unos apuntes básicos sobre su funcionamiento).

La parte virtual se sigue a través del espacio de la asignatura en la plataforma WebCT y en ella se desarrollan todos los contenidos teóricos básicos. Por eso, en las clases de EB el docente se puede dedicar a profundizar en los principales contenidos.

En lo que respecta a la evaluación de la asignatura, se tienen en cuenta todas las actividades realizadas a lo largo del semestre, otorgándoles a cada una de ellas un peso distinto en la calificación global, dependiendo de su importancia dentro de la asignatura, de la complejidad que conlleve, así como del esfuerzo y dedicación necesarios por parte del alumno. En concreto, las diversas pruebas específicas que se llevan a cabo para evaluar tanto las competencias específicas como las transversales, son las siguientes:

- Examen final: al final del semestre se realiza un examen teórico-práctico que tiene un peso del 50% de la nota total de la asignatura (5 sobre 10). De estos 5 puntos, los conocimientos teóricos suponen 1,5 puntos y se evalúan a través de un test y/o preguntas de respuestas cortas, mientras que la parte de conocimientos prácticos tiene un peso de 3,5 puntos.
- Controles: durante el semestre se realizan 5 controles prácticos, uno por cada tema impartido. En ellos se evalúan los objetivos mínimos exigidos para poder seguir con la asignatura. Estos controles tienen un peso del 20% de la nota global y, aunque no eran obligatorios para los alumnos, no pueden recuperar este 20% una vez concluido el periodo de clases.
- Pruebas virtuales: son pruebas no obligatorias y virtuales, de tipo test, con un peso del 10% de la nota global. Estas pruebas se realizan a través de la plataforma virtual de la asignatura y los alumnos tienen un tiempo concreto (30 minutos por prueba) y un solo intento para realizar cada una. Se les proporciona acceso una semana después de finalizar la explicación del tema en clase. Igual que con los controles, estas pruebas no son obligatorias y su valor no es recuperable.
- Pruebas de informática: durante el semestre se realizan tres pruebas de informática, en principio, todas ellas con el mismo peso. El peso total de la nota de informática es del 20% y puede ser recuperado al final del semestre con un examen de informática el día del examen final.

Una información más detallada sobre las características de la asignatura y del sistema de evaluación puede consultarse en Fedriani y Melgar (2009, 2010 y 2011). En resumen, la nota de Matemática Empresarial I se compone de: 5 puntos por el examen final, 2 puntos por los controles prácticos, 1 punto por las pruebas virtuales y 2 puntos por las prácticas de informática.

Para superar la asignatura, además de exigírseles que tengan un mínimo de 5 en la suma de todas las pruebas, los alumnos deben obtener una puntación

mínima en el examen final (1,5 puntos sobre los 5) y otra en las prácticas de informática (1 punto sobre los 2).

# 3. DATOS ANALIZADOS

Los datos utilizados en esta comunicación han sido proporcionados por los coordinadores de la asignatura de Matemática Empresarial I, profesores del Área de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la UPO. La muestra se refiere concretamente a los cursos 2009/2010, 2010/2011 y 2011/2012, todos en los que se ha impartido dicha asignatura en la UPO.

La muestra inicialmente considerada está constituida por 1356 estudiantes de 1º de GADE, GADE-GD, GFC y GFC-GD. Todos los datos utilizados son los de la primera matrícula en la asignatura, ya que opinamos que, para el análisis a realizar, los estudiantes de 2ª y 3ª matricula podrían perturbar los resultados.

Los grados están divididos en líneas de aproximadamente 60 alumnos cada una. En el curso 2009-2010 existían 9 líneas (contando el grupo con docencia en inglés como una línea independiente), igual que en curso académico 2010-2011 y una menos que en 2011-2012. Las líneas, a su vez, se dividen en tres grupos de EPD, cada una de ellas con 20 alumnos aproximadamente. En resumen, se ha considerado un total de 66 grupos de EPD distintos durante estos tres cursos académicos. En la Tabla 1 se presenta el número de alumnos por grupo de EPD, de los matriculados por primera vez en la asignatura.

**Tabla 1. Distribución de estudiantes**

| | Líneas | Grupo | Nº | | Líneas | Grupo | Nº | | Líneas | Grupo | Nº |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Curso 2009-2010** | INGLÉS | | 22 | **Curso 2010-2011** | INGLÉS | | 47 | **Curso 2011-2012** | INGLÉS | | 46 |
| | L1-GADE | EPD 11 | 18 | | L1-GADE | EPD 11 | 23 | | L1-GADE | EPD 11 | 24 |
| | | EPD 12 | 19 | | | EPD 12 | 24 | | | EPD 12 | 29 |
| | | EPD 13 | 20 | | | EPD 13 | 21 | | L2-GADE | EPD 21 | 24 |
| | L2-GADE | EPD 21 | 16 | | L2-GADE | EPD 21 | 20 | | | EPD 22 | 21 |
| | | EPD 22 | 20 | | | EPD 22 | 31 | | | EPD 23 | 22 |
| | | EPD 23 | 21 | | L1-GADE-GD | EPD 11 | 23 | | L1-GADE-GD | EPD 11 | 22 |
| | L1-GADE-GD | EPD 11 | 20 | | | EPD 12 | 18 | | | EPD 12 | 22 |
| | | EPD 12 | 19 | | | EPD 13 | 15 | | | EPD 13 | 20 |
| | | EPD 13 | 17 | | L2-GADE-GD | EPD 21 | 12 | | L2-GADE-GD | EPD 21 | 22 |
| | L2-GADE-GD | EPD 21 | 16 | | | EPD 22 | 14 | | | EPD 22 | 20 |
| | | EPD 22 | 18 | | | EPD 23 | 13 | | L1-GFC | EPD 11 | 20 |
| | | EPD 23 | 17 | | L1-GFC | EPD 11 | 20 | | | EPD 12 | 19 |
| | L1-GFC | EPD 11 | 20 | | | EPD 12 | 22 | | | EPD 13 | 13 |
| | | EPD 12 | 22 | | | EPD 13 | 15 | | L2-GFC | EPD 21 | 18 |
| | | EPD 13 | 23 | | L2-GFC | EPD 21 | 16 | | | EPD 22 | 18 |
| | L2-GFC | EPD 21 | 24 | | | EPD 22 | 8 | | | EPD 23 | 20 |
| | | EPD 22 | 21 | | | EPD 23 | 13 | | L1-GFC-GD | EPD 11 | 25 |
| | | EPD 23 | 21 | | L3-GFC | EPD 31 | 14 | | | EPD 12 | 18 |
| | L3-GFC | EPD 31 | 19 | | | EPD 32 | 20 | | | EPD 13 | 11 |
| | | EPD 32 | 19 | | | EPD 33 | 10 | | | | |
| | L1-GFC-GD | EPD 11 | 18 | | L1-GFC-GD | EPD 11 | 18 | | | | |
| | | EPD 12 | 18 | | | EPD 12 | 18 | | | | |
| | | EPD 13 | 20 | | | EPD 13 | 17 | | | | |

Fuente: elaboración propia.

En estas líneas y grupos, han impartido clase un total de 17 profesores distintos, todos ellos organizados por dos coordinadores. Antes de comenzar el semestre, los coordinadores explican al resto de profesores los pasos a seguir en el desempeño docente de la asignatura, tanto en lo relativo a las sesiones de

clase como a los criterios de evaluación. El objetivo general es que la diversidad de grupos y de docentes no perjudique a ningún estudiante.

Todos los profesores deben respetar una concordancia estricta con el cronograma diseñado previamente por los coordinadores. Los controles y las pruebas de informática también están diseñados y organizados desde el inicio del semestre; en particular, estas pruebas están pensadas para que todos los alumnos sean evaluados exigiéndoseles un mismo nivel, aunque a la hora de corregir e impartir las clases sí se preveían diferencias según la tarea desempeñada por el profesor responsable de cada EPD.

Una vez que se filtraron y adaptaron los datos con la información recibida (normalizando las variables), se realizaron diversos análisis a distintas variables y, posteriormente, contrastes de hipótesis atendiendo a los factores considerados influyentes. La información obtenida para cada estudiante matriculado por primera vez viene condicionada por el seguimiento, en cuanto a evaluación individual. En particular, en esta comunicación nos hemos centrado en los estudiantes que han seguido la asignatura durante el curso mediante la realización de las pruebas prácticas (controles); además, para considerar al alumno, se ha tenido que presentar al examen final. Con esto, tratamos de poder centrarnos en la relación entre la evaluación continua de los estudiantes y el resultado final. En particular, la muestra que finalmente hemos estudiado de forma completa está compuesta por 961 alumnos. En cuanto a los factores a los que se ha atendido son: curso académico, titulación, línea, grupo y profesor (separando los profesores según si lo son de EB o de EPD).

# 4. RESULTADOS

## 4.1. EVALUACIÓN CONTINUA

Realizamos un primer análisis descriptivo sobre la evaluación continua, que está compuesta en realidad por la nota obtenida en los controles, en las pruebas de informática y en las pruebas virtuales. Sin embargo, en este trabajo nos centramos en los controles y en las pruebas de informática, ya que la calificación en las pruebas virtuales no parece venir influida por el grupo o el profesor (ni por su consiguiente corrección), ya que el mismo programa implementado en WebCT propone y corrige las pruebas sin tener en cuenta el grupo del alumno.

### 4.1.1 Controles

Atendiendo al curso académico, la titulación, la línea y el grupo, se realiza un análisis preliminar de la variable "diferencia entre la nota media de los controles y la del examen final (parte escrita)" (ambas notas sobre 10, aunque la variable nota media de los controles solo supone el 20% de la nota final mientras que el examen final escrito es el 50% de la nota final de la asignatura). Una vez realizado dicho análisis, se llevan a cabo contrastes de hipótesis no paramétricos tipo Kruskal-Wallis, con muestras independientes. En la Tabla 2 se observan los resultados obtenidos en los distintos contrastes realizados, donde n representa las muestras independientes utilizadas en cada uno de los casos.

**Tabla 2: Contraste de hipótesis sobre los controles**

| Factor | p-valor | n | Conclusión |
|---|---|---|---|
| Curso | 0,842 | 3 | No se concluye |
| Titulación | 0,002 | 4 | Existen diferencias significativas |
| Línea | <0,05 | 23 | Existen diferencias significativas |
| Grupo | <0,05 | 63 | Existen diferencias significativas |

Fuente: elaboración propia.

La hipótesis que se ha comprobado es que existe diferencia significativa al 5% de significación (entre cursos, titulaciones, líneas y grupos) de la diferencia entre la nota media de los controles y el examen final. Atendiendo a los resultados observados en la Tabla 2, podemos concluir que efectivamente existe diferencia entre titulaciones, líneas y grupos, pero ha de tenerse en cuenta que las líneas y grupos dependen a su vez de la titulación, por lo que esta es la única variable de la que hemos probado, de momento, que resulta significativa. Específicamente, podemos afirmar que la diferencia entre los controles y los exámenes depende de la titulación, la línea y el grupo donde esté matriculado el alumno y que obtendrá un rendimiento mayor durante el curso que en el examen final, ya que el 94% de las diferencias medias son positivas.

### 4.1.2 Controles y pruebas de informática

Una vez realizado el análisis anterior y atendiendo al curso matriculado, a la titulación, la línea y el grupo, hemos realizado un análisis de la variable "diferencia entre la nota media de los controles más las practicas de informática y la del examen final (parte escrita)". De nuevo, esta diferencia se ha normalizado para tener resultados comparables sobre 10 puntos, pero en este caso debemos tener en cuenta que la variable nota media de los controles más las practicas de informáticas supone un 40% de la nota final de la asignatura, algo más cerca del 50% que supone la parte escrita del examen final.

Una vez llevado a cabo el análisis descriptivo preliminar, se ha realizado un contraste de hipótesis no paramétricos tipo Kruskal-Wallis, con muestras independientes. En la Tabla 3, se observan los resultados obtenidos en los distintos contrastes realizados.

**Tabla 3: Contraste de hipótesis sobre controles y prácticas de informática**

| Factor | p-valor | n | Conclusión |
|---|---|---|---|
| Curso | <0,05 | 3 | Existen diferencias significativas |
| Titulación | <0,05 | 4 | Existen diferencias significativas |
| Línea | <0,05 | 23 | Existen diferencias significativas |
| Grupo | <0,05 | 63 | Existen diferencias significativas |

Fuente: elaboración propia.

En este caso, la hipótesis comprobada es si existe diferencia significativa al 5% de significación (entre cursos, titulaciones, líneas y grupos) de la diferencia entre la nota media de los controles más la nota de las prácticas de informática y el examen final. Atendiendo a los resultados observados en la Tabla 3, podemos concluir que existe diferencia entre cursos, titulaciones, líneas y grupos, aunque las diferencias por curso y titulación provocarían también las otras dos. Esto hace que sea necesario un análisis más detallado, que veremos luego. En general, sí

se puede afirmar que el alumno obtendrá un rendimiento mayor durante el curso que en el examen final, ya que el 94% de las diferencias medias son positivas.

## 4.2. EVALUACIÓN CONTINUA SEGÚN PROFESORES

Una vez explicados los análisis anteriores y observadas diferencias entre líneas y grupos, pensamos que sería interesante realizar ese mismo tipo de análisis atendiendo a los profesores que han impartido las clases en las distintas líneas y grupos; es decir, agrupando a los alumnos según su profesor y no solo según su grupo (de EB o de EPD). Los profesores de EB imparten líneas completas, mientras que los profesores de EPD imparten grupos. Una diferencia significativa entre las diferencias medias correspondientes a los distintos profesores podría ser indicativa de una diferencia sustancial en la metodología implementada o, incluso, en la aplicación de los criterios de evaluación. Debe recordarse que la corrección de los exámenes de evaluación continua y de las pruebas de informática la realizan los profesores de EPD a los alumnos de sus propios grupos, mientras que el examen final es corregido entre todos los profesores de la asignatura, repartiéndose una pregunta (de todos los alumnos de una misma titulación) a cada profesor.

En este caso, realizamos un contraste de hipótesis no paramétrico de tipo Kruskal-Wallis, para n muestras independientes, y un test U-Mann-Whitney en el caso en que n=2. En concreto: los contrastes que nos planteamos tienen como hipótesis nulas las dos siguientes:

- Hipótesis 1: existe diferencia entre las calificaciones resultantes de la diferencia entre los controles y el examen escrito, atendiendo a cada profesor de EB o EPD, tomando como nivel de significación un 5%. En este caso, se realiza el análisis atendiendo a los cursos y titulaciones impartidas (ver la Tabla 4).
- Hipótesis 2: existe diferencia entre las calificaciones resultantes de la diferencia entre la evaluación continua y el examen escrito, atendiendo a cada profesor de EB o de EPD. En este caso, también se realiza el análisis atendiendo a los cursos y titulaciones impartidas (ver la Tabla 5).

**Tabla 4: Contraste de hipótesis sobre controles según profesores**

| Curso | Titulación | EB (p-valor) | n | EPD (p-valor) | n |
|---|---|---|---|---|---|
| 2009-2010 | GADE | 0,118 | 3 | 0,005 | 3 |
| 2009-2010 | GD-GADE | <0,05 | 3 | 0,001 | 4 |
| 2009-2010 | GD-GFC | NO | 1 | NO | 1 |
| 2009-2010 | GFC | 0,017 | 2 | 0,031 | 4 |
| 2010-2011 | GADE | 0,623 | 3 | 0,144 | 6 |
| 2010-2011 | GD-GADE | <0,05 | 3 | <0,05 | 4 |
| 2010-2011 | GD-GFC | 0,074 | 2 | <0,05 | 3 |
| 2010-2011 | GFC | 0,863 | 4 | 0,926 | 6 |
| 2011-2012 | GADE | 0,072 | 3 | 0,332 | 7 |
| 2011-2012 | GD-GADE | 0,012 | 3 | 0,036 | 5 |
| 2011-2012 | GD-GFC | 0,967 | 2 | 0,527 | 3 |
| 2011-2012 | GFC | 0,199 | 3 | 0,356 | 4 |

Fuente: elaboración propia.

Observando las Tablas 4 y 5 se puede apreciar que existen diferencias significativas en distintas titulaciones y años si atendemos a las notas

consideradas en el análisis. Sin embargo, la comparación de ambas tablas nos dirige a una situación inesperada: no se comprueban diferencias en las mismas líneas y grupos si se tiene en cuenta o no las calificaciones de las prácticas de informática. Es decir, no existen las mismas diferencias aunque los docentes sean los mismos (téngase en cuenta que el profesor de EPD es el que imparte y evalúa tanto las sesiones prácticas como las de informática de un mismo grupo de alumnos).

**Tabla 5: Contraste sobre controles y prácticas de informática según profesores**

| Curso | Titulación | EB (p-valor) | n | EPD (p-valor) | n |
|---|---|---|---|---|---|
| 2009-2010 | GADE | 0,574 | 3 | 0,095 | 3 |
| 2009-2010 | GD-GADE | <0,05 | 3 | <0,05 | 4 |
| 2009-2010 | GD-GFC | NO | 1 | NO | 1 |
| 2009-2010 | GFC | 0,07 | 2 | 0,095 | 4 |
| 2010-2011 | GADE | 0,398 | 3 | 0,003 | 6 |
| 2010-2011 | GD-GADE | <0,05 | 3 | <0,05 | 4 |
| 2010-2011 | GD-GFC | 0,036 | 2 | <0,05 | 3 |
| 2010-2011 | GFC | 0,648 | 4 | 0,33 | 6 |
| 2011-2012 | GADE | 0,014 | 3 | 0,08 | 7 |
| 2011-2012 | GD-GADE | <0,05 | 3 | 0,001 | 5 |
| 2011-2012 | GD-GFC | 0,643 | 2 | 0,748 | 3 |
| 2011-2012 | GFC | 0,471 | 3 | 0,434 | 4 |

Fuente: elaboración propia.

El siguiente intento para valorar la influencia de los profesores en el rendimiento de los alumnos fue la realización de contrastes de hipótesis (dos a dos) entre los profesores de EPD. Entre el 42% y 50% de los contrastes (dependiendo de si se considera o no la parte informática) llegan a la conclusión de que existe diferencia en las calificaciones según el docente.

**Tabla 6: Contraste sobre controles, según profesores, dos a dos**

| **Prof.** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | NO | 0,006 | 0,08 | 0,093 | 0,154 | 0,044 | 0,001 | 0,102 | 0,433 | 0,035 | 0,015 | 0,026 | 0,82 |
| 2 | | NO | 0,836 | 0,393 | 0,604 | <0,05 | 0,115 | <0,05 | <0,05 | 0,984 | 0,891 | 0,891 | 0,091 |
| 3 | | | NO | 0,621 | 0,673 | <0,05 | 0,191 | 0,003 | 0,013 | 0,849 | 0,849 | 0,788 | 0,217 |
| 4 | | | | NO | 0,914 | <0,05 | 0,03 | 0,001 | 0,011 | 0,482 | 0,393 | 0,415 | 0,357 |
| 5 | | | | | NO | <0,05 | 0,14 | 0,006 | 0,028 | 0,662 | 0,472 | 0,608 | 0,336 |
| 6 | | | | | | NO | <0,05 | 0,924 | 0,16 | <0,05 | <0,05 | <0,05 | 0,086 |
| 7 | | | | | | | NO | <0,05 | <0,05 | 0,233 | 0,33 | 0,281 | 0,01 |
| 8 | | | | | | | | NO | 0,29 | <0,05 | <0,05 | <0,05 | 0,16 |
| 9 | | | | | | | | | NO | 0,003 | 0,001 | 0,001 | 0,429 |
| 12 | | | | | | | | | | NO | 0,904 | 0,809 | 0,136 |
| 13 | | | | | | | | | | | NO | 0,977 | 0,118 |
| 14 | | | | | | | | | | | | NO | 0,116 |

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 7: Contraste sobre controles e informática, según profesores, dos a dos**

| **Prof.** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | NO | 0,01 | 0,104 | 0,001 | 0,003 | 0,01 | 0,008 | 0,011 | 0,219 | 0,063 | 0,025 | 0,184 | 0,386 |
| 2 | | NO | 0,312 | 0,791 | 0,632 | 0,001 | 0,656 | <0,05 | <0,05 | 0,439 | 0,522 | 0,096 | 0,002 |
| 3 | | | NO | 0,195 | 0,2 | <0,05 | 0,563 | 0,01 | 0,005 | 0,839 | 0,649 | 0,675 | 0,043 |
| 4 | | | | NO | 0,769 | <0,05 | 0,583 | <0,05 | <0,05 | 0,289 | 0,329 | 0,058 | 0,001 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | | NO | <0,05 | 0,414 | <0,05 | <0,05 | 0,27 | 0,274 | 0,052 | 0,003 |
| 6 | | | | | | NO | <0,05 | 0,595 | 0,191 | <0,05 | <0,05 | <0,05 | 0,592 |
| 7 | | | | | | | NO | <0,05 | <0,05 | 0,611 | 0,738 | 0,243 | 0,009 |
| 8 | | | | | | | | NO | 0,097 | <0,05 | <0,05 | <0,05 | 0,396 |
| 9 | | | | | | | | | NO | 0,003 | 0,001 | 0,01 | 0,918 |
| 12 | | | | | | | | | | NO | 0,856 | 0,479 | 0,034 |
| 13 | | | | | | | | | | | NO | 0,336 | 0,018 |
| 14 | | | | | | | | | | | | NO | 0,082 |

Fuente: elaboración propia.

Ciertamente, del estudio más detallado de los datos se puede extraer que ciertos profesores son más proclives a que los alumnos de sus grupos obtengan mejores calificaciones, pero no es algo que deba preocupar a los coordinadores por tres motivos: la mayoría de las diferencias que se producen son muy reducidas, de unas pocas décimas (con poco o nulo impacto en el expediente del alumno), incluso si se compara a los alumnos que cursan la asignatura en inglés con los que la estudian en español; el comportamiento de las medias es errático según se consideren o no las prácticas de informática (lo que hace descartar cualquier estrategia premeditada para favorecer a los alumnos de algún grupo); y hay variables que parecen más relevantes que el profesor que imparte las clases.

# 5. CONCLUSIONES

A fin de conseguir los objetivos inicialmente planteados, en esta comunicación nos centramos en comprobar si se pueden establecer diferencias significativas entre las notas obtenidas durante la evaluación continua y la del examen escrito final. Para ello, partiendo de un conjunto de datos que comprende a todos los alumnos que han cursado hasta la fecha Matemática Empresarial I en la UPO, hemos considerado como variable la diferencia entre las dos notas.

En concreto, hemos analizado si factores como el curso académico en cual se matricularon por primera vez, la titulación en las que están matriculados, las líneas donde reciben sus clases de EB y los grupos de EPD tienen una influencia significativa en esta nueva variable (diferencia entre nota continua y del examen). Hemos llegado a probar estadísticamente que existen diferencias según todas las variables, salvo por el curso académico matriculado, algo que respalda el sostenimiento del nivel académico a lo largo de los años y, al mismo tiempo, a autores para los que el grupo donde se imparte la clase (Van Den Oord y Van Rossem, 2002) o la titulación cursada (Álvarez y otros, 2006; Castellanos y otros, 1998; Rúa y otros, 2010) son factores con influencia significativa en el rendimiento de los estudiantes.

A la vista a los resultados obtenidos en la primera parte del trabajo, nos propusimos realizar otro análisis, esta vez sobre la influencia del docente que impartía las clases de EB o las EPD. En esta ocasión, llegamos a la conclusión de que, dependiendo del docente, de la titulación y del curso académico, existían diferencias significativas entre las notas obtenidas por los alumnos. A pesar de que los resultados, en media, no son muy diferentes entre unos y otros docentes, sí da la impresión de que existen patrones, aunque no sean sencillos de formular. Se ha repetido el análisis con otras asignaturas cuantitativas y el resultado es igual de complejo y, si cabe, más confuso porque se llegan a producir diferencias mayores.

En cualquier caso, creemos que los resultados aquí presentados constituyen una aproximación superficial a un problema con una complejidad mucho mayor, ya que existen otras variables clave, que se entrelazan con las consideradas y cuyo efecto sea probablemente difícil de identificar y de separar del resto. Por ello, consideramos muy complicado establecer una ley estadística simple que explique las relaciones que realmente existen entre las variables estudiadas. A este respecto, proponemos la aplicación de técnicas más sofisticadas en el futuro, así como repetir los análisis con un mayor número de grupos y con otras asignaturas cuantitativas.

Como el lector ha podido comprobar, el análisis aquí presentado tiene sus limitaciones, pero creemos que puede servir para reflexionar sobre la influencia que la práctica docente tiene realmente sobre los estudiantes y si debemos procurar que docentes diferentes y diversos se ajusten lo más posible al comportamiento académico previsto por los coordinadores de una asignatura.

# REFERENCIAS

ÁLVAREZ PÉREZ, P.R., CABRERA PÉREZ, L., GONZÁLEZ AFONSO, M.C. y BETHENCOURT BENÍTEZ, J.T. (2006). *Causas del abandono y prolongación de los estudios universitarios*. Paradigma V.27 – 1, Maracay.

CASTELLANOS, L., GONZÁLEZ, M.C., GONZÁLEZ, M.A. y MANZANO, I.M. (1998). *Las matemáticas empresariales: estudio de los factores determinantes del rendimiento académico,* Rect@, Actas_6, Issue 1: 15; VI Jornadas de ASEPUMA, Santiago de Compostela.

FEDRIANI MARTEL, E.M. y MELGAR HIRALDO, M.C. (2009). *Matemática Empresarial I,* Guías Docentes del Grado en Administración y Dirección de Empresas, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

FEDRIANI MARTEL, E.M. y MELGAR HIRALDO, M.C. (2010). *Matemática Empresarial I,* Guías Docentes del Grado en Administración y Dirección de Empresas, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

FEDRIANI MARTEL, E.M. y MELGAR HIRALDO, M.C. (2011). *Matemática Empresarial I,* Guías Docentes del Grado en Administración y Dirección de Empresas, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

RÚA, A., REDONDO, R., MARTÍNEZ DE IBARRETA, C., FABRA, M.E., MARTÍN, M.J. y NUÑEZ, A. (2010). *Factores del rendimiento académico en las asignaturas cuantitativas de Administración y Dirección de Empresas.* Anales de ASEPUMA, 18, 105, XVIII Jornadas ASEPUMA y VI Encuentro Internacional, Santiago de Compostela.

VAN DEN OORD, E.J.C.G. y VAN ROSSEM, R. (2002). *Differences in first graders' school adjustment: The role of classroom characteristics and social structure of the group*, Journal of School Psychology, 40:5, 371-394.

# CONCEPCIONES PERSONALES DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE ALCANZABILIDAD Y REBASABILIDAD DEL LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

**José Antonio Fernández Plaza**
**Enrique Castro Martínez**
**Luis Rico Romero**
**Juan Francisco Ruiz Hidalgo**
*Universidad de Granada*

## RESUMEN.

Se presentan algunos resultados iniciales de una entrevista llevada a cabo con estudiantes de segundo curso de bachillerato sobre las concepciones ligadas a los términos "alcanzar" y "rebasar". Los datos se recogieron de dos formas. La primera, por escrito donde expresaron su intuición inicial sobre estos términos. La segunda, mediante grabación, se les presentaron en pizarra diversas gráficas para que decidieran si el límite era o no alcanzable o rebasable de acuerdo a lo que tenían escrito. Se detectan matices de significado adicionales a su uso coloquial, si bien, intuitivos, cuando los emplean en el contexto gráfico particular de límite finito de una función en un punto.

**Nivel educativo**: Bachillerato.

## 1. INTRODUCCIÓN.

La influencia del significado y usos coloquiales de algunos términos propios del lenguaje del cálculo, a saber, "límite", "aproximarse", "tender a", "converger", "alcanzar" y "rebasar", ha sido reportada en Cornu (1991) y Monaghan (1991). Consideramos importantes las concepciones erróneas que pueden tener los estudiantes cuando emplean tales términos en el contexto de trabajo sobre este contenido, dado que la enseñanza actual del concepto de límite de una función en un punto, restringida a la transmisión de una definición intuitiva y al trabajo rutinario de reglas de cálculo algebraico, elude las concepciones que los estudiantes tienen de los términos "alcanzar" y "rebasar", en particular.

Presentamos los resultados derivados de una entrevista realizada con estudiantes de un 2º curso de Bachillerato con el objetivo de describir las nociones de "alcanzar" y "rebasar" que los estudiantes ponen de manifiesto y contrastarlos con su uso coloquial y matemático.

# 2. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LOS TÉRMINOS "ALCANZAR" Y "REBASAR".

Consideramos importante la realización de un análisis conceptual de términos clave, en nuestro caso, "alcanzar" y "rebasar" para delimitar el significado y uso matemático en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001) y es útil para interpretar la concepción de los sujetos.

"Alcanzar" es intuitivamente "llegar a" o "llegar a tocar" (RAE, 2001, Moliner, 1998, Oxford, 2011). Fernández-Plaza (2011) define "alcanzar" en el sentido en que una función alcanza el límite si el valor límite es la imagen del punto en el que se estudia el límite (continuidad); extendiendo su significado a que el límite sea el valor de cualquier otro punto del dominio.

Observamos que "rebasar" tiene un sentido coloquial de "quedar por encima de una cota superior" (RAE, 2001), excluyéndose la acepción "quedar por debajo de una cota inferior". En este trabajo ampliaremos el rango de sentidos del término "rebasar", de tal manera que diremos que el límite de una función es rebasable si podemos construir dos sucesiones monótonas de imágenes convergentes al límite, una creciente y otra decreciente, para convenientes sucesiones de valores de x convergentes al punto donde se lleva a cabo el estudio del límite (Fernández-Plaza, 2011). Es preciso notar que la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite finito de una función en un punto no tienen carácter general, sino particular y son independientes lógicamente dado que no existe ninguna implicación lógica entre ellas.

# 3. DISEÑO DE LA EXPERIENCIA.

Detallamos a continuación el diseño del estudio llevado a cabo basado en el método de encuesta, en formato de entrevista semiestructurada.

## 3.1. SUJETOS.

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a tres estudiantes de un instituto de la provincia de Granada, cursando la materia de matemáticas II, en 2º curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencia y Tecnología. Los sujetos habían participado en el curso 2010/2011 en el estudio que realizamos sobre el mismo tópico en Fernández-Plaza (2011) empleando como instrumento un cuestionario, siendo planificada esta intervención para marzo de 2012.

La instrucción previa que recibieron los sujetos no la consideramos oportuna, a efectos de las características del instrumento que íbamos a utilizar, ya que sus tareas difieren de las incluidas en los libros de texto sobre el tópico en cuestión.

## 3.2. INSTRUMENTO Y APLICACIÓN.

El instrumento es una plantilla que incluye la siguiente pregunta:
*Lee con atención el enunciado siguiente:*

*Describe en cada apartado cómo entiendes los siguientes términos "Aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "converger", en el contexto de límite finito de una función en un punto.*

La entrevista se aplicó en un aula ordinaria, habilitada para el investigador y los sujetos seleccionados. El protocolo de aplicación seguido fue la petición previa a los estudiantes de que escribieran sus respuestas en el espacio blanco marcado en la plantilla de respuesta proporcionada. A continuación se grabó la discusión en común de las mismas. Una vez que todos los sujetos hubieran explicado su respuesta, el investigador dibujo en pizarra unas gráficas para facilitar que ellos pudieran añadir matices a su respuesta original, para el caso de los términos "alcanzar" y "rebasar" tales gráficas eran similares a las que se muestran en la figura 1.

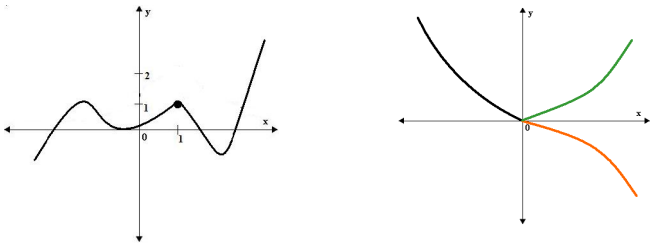



Figura 1. Gráficas 1. y 2. de apoyo a las respuestas sobre "alcanzar" y "rebasar"

La característica principal de la gráfica 1 es que el valor del límite se toma en diferentes puntos del dominio, no sólo en el punto x=1 y se empleó para discutir la alcanzabilidad del límite. La gráfica dos incluye dos funciones, con una rama común (negro) y con dos ramas propias (naranja y verde), y se empleó de apoyo para discutir la rebasabilidad del límite en x=0.

# 4. RESULTADOS.

Una vez realizada la entrevista, se llevó a cabo la transcripción de la grabación y de las respuestas escritas. Los sujetos los denotamos por María, Aurora y José. Comenzamos el análisis de los datos por las respuestas escritas.

## 4.1. CONCEPCIONES INICIALES DE LOS SUJETOS.

Presentamos en la tabla 1 las reflexiones de cada uno de los sujetos a la pregunta propuesta en la plantilla, que como ya hemos dicho, son previas a la discusión.

| Sujetos | Alcanzar | Rebasar |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| José | *Alcanzar un límite es conseguir calcular el valor exacto* | *Sobrepasar el valor del límite* |
| Aurora | *Alcanzar es saber cual es f(x) del punto que estudiamos* | *Es pasarse del límite* |
| María | *Consiste en llegar a conseguir en un momento dado un valor determinado* | *Consiste en sobrepasar el valor de un número determinado* |

Tabla 1. Reflexiones iniciales sobre "alcanzar" y "rebasar"

Detectamos en este grupo de estudiantes dos sentidos iniciales diferentes aunque no necesariamente excluyentes en el que se interpreta el término "alcanzar".

- *Sentido de exactitud*: José y María, consideran que la alcanzabilidad es una propiedad del proceso de cálculo, que debe originar un valor exacto al límite.
- *Sentido de imagen*: Aurora considera que un límite es alcanzable si se conoce la imagen del punto. No descartamos una posible identificación entre límite y la imagen.

El término "rebasar" es interpretado por los tres sujetos como sinónimo a "sobrepasar" y "pasarse". Esto origina la conjetura de que estos términos hagan referencia a que la función debe tener valores por debajo del límite y por encima, y no sólo por encima.

## 4.2. CONCEPCIONES FINALES O INDUCIDAS DE LOS SUJETOS.

La discusión moderada por el investigador puede desencadenar cambios en las concepciones iniciales de los sujetos, en virtud de la influencia patente de los ejemplos específicos que se mostraron en la pizarra (figura 1).

Seleccionamos segmentos de la entrevista que reflejan el refinamiento o cambio en las concepciones de los sujetos sobre los términos "alcanzar" y "rebasar" a partir de su discusión sobre las gráficas propuestas.

> **Investigador:** *¿Consideráis que si los valores de f(x) [refiriéndose a una gráfica similar a la gráfica 1 en la pizarra] toman el valor del límite es alcanzable?*
> **María:** *Yo creo que tienen que contar, son parte de la función.*
> **Aurora:** *Es que a lo mejor si el límite es **alcanzado**, significa que en otro punto de la función tiene el mismo valor.*
> **Investigador:** *¿Estás de acuerdo?*
> **José:** *Yo creo que sí.*
> **Aurora:** *Que sea **alcanzado** pienso que... se puede...el mismo valor, pero en otros puntos de la función. Pero si es **alcanzable** pues ya me quedo en lo de solamente una función pequeña.*

**Investigador:** *¿Qué creéis vosotras que es rebasable, aquí es rebasable? [señala el ejemplo en pizarra similar a la gráfica 2 con "forma parabólica", rama verde]*
**Aurora:** *Que se alcance el...se me ha ido la palabra, valores superiores, o sea, imágenes superiores al valor del límite.*

**Investigador:***...el límite en este caso [señalando el mismo ejemplo en pizarra] es 0.*
**María:** *Por eso, que la función tiende a 0*.
**Investigador**: *¿El límite 0 es rebasable?*
**María:** *Si continua sí, pero si no no.*

**Investigador:** *¿Si hace esto es rebasable? [Dibuja en la misma gráfica anterior una rama, de tal forma que la función global es estrictamente decreciente en todo el dominio, es decir, similar a la gráfica 2 con la rama naranja]*
**José:** *Yo creo que es rebasable en los dos casos.*

Describimos por tanto matices adicionales a las concepciones de los sujetos sobre el término "alcanzar".

- *Sentido de propiedad global*: Para José y para María, si el límite es alcanzable implica que el valor del límite se puede tomar en otros puntos del dominio.
- *Doble sentido local-global:* Aurora hace dos distinciones bien remarcadas: Una local, expresada por el término *"alcanzable"* y una global, mediante el término *"alcanzado"* concordando con sus compañeros. Pone así de manifiesto la ambigüedad del término "alcanzar".

Para el término "rebasar" existen tres sentidos claramente diferenciados:

- *Sentido "encima"*: Aurora considera que el límite no es rebasable, si la función sólo toma valores superiores al del límite, así considera que el límite 0 en la gráfica 2 con rama naranja es rebasable y no lo es si se considera la rama verde.
- *Sentido "encima-debajo":* María con la expresión "si continua sí, si no no" indica que la función rebasa el límite si toma valores por encima y por debajo del límite por ambos lados, es decir, si el límite es mínimo relativo o absoluto de la función como en el caso de la gráfica 2 (con rama naranja) no es rebasable.
- *Combinación de los dos anteriores:* José admite los dos sentidos, al afirmar que el límite es rebasable en los dos casos de la gráfica 2.

# 5. CONCLUSIONES.

Este trabajo pone de manifiesto la necesidad de considerar en el aula las intuiciones personales que los estudiantes tienen de los términos que describen propiedades del concepto de límite, que son de hecho, diferentes a los que a su uso coloquial o matemático se refieren.

Consideramos una medida de atención a la diversidad en el aula, la discusión y reflexión crítica de las intuiciones personales de los estudiantes, de manera que

se facilita al profesor la obtención de un clima de comunicación adecuado para transmitir los conocimientos de referencia oportunos, proporcionándoles contextos en los que sus intuiciones ya no son válidas y favoreciendo la participación activa de los estudiantes en su aprendizaje.

Los resultados obtenidos dan lugar a cuatro conclusiones importantes:

1. Las nociones descritas por los escolares para los términos "alcanzar" y "rebasar" concuerdan con el análisis conceptual previo de dichos términos en Fernández-Plaza (2011).
2. El apoyo gráfico ha favorecido una mejor precisión de las reflexiones proporcionadas por los sujetos y ha facilitado la discriminación de sus producciones iniciales.
3. Han aparecido matices de significado diferentes al uso coloquial de dichos términos, lo cual no quiere decir que no sean acordes con el uso coloquial que los propios sujetos realicen de los mismos.
4. Actualizamos los trabajos de Cornu (1991) y Monaghan (1991) mediante el análisis conceptual realizado y parcialmente contrastado en este estudio.

## AGRADECIMIENTOS.

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto "Modelización y representaciones en educación matemática" (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3er Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

## REFERENCIAS.

CORNU, B. (1991). *Limit*s. In D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking*.* ,153-166. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

FERNÁNDEZ-PLAZA, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio.* Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf.

MOLINER, M. (1998).*Diccionario del uso del español.*(2ª Ed, Vol. 2). Editorial Gredos, Madrid.

MONAGHAN, J. (1991). *Problems with the Language of Limits*. For the Learning of Mathematics, *11*(3), 20-24.

OXFORD (2011). *Oxford Dictionaries.* Oxford: Oxford University Press. Disponible en: http://oxforddictionaries.com. Consultado [24-06-2011].

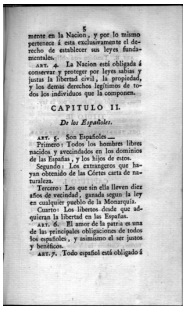
REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2001). *Diccionario de la Lengua Española.*(22nd ed). Madrid. Disponible en http://www.rae.es/rae.html.Consultado [24-06-2011].

RICO, L. (2001). *Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática*. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro, 179-193. Editorial Universidad de Granada, Granada.

# 1812: A VER QUÉ SE ME OCURRE

**Tere Valdecantos Dema**,
*S.I.P.E.P. Algeciras, Algeciras (Cádiz)*

## RESUMEN.


nacion en la Nacion, y por lo mismo pertenece á esta exclusivamente el derecho de establecer sus leyes fundamentales.
ART. 4. La Nacion está obligada á conservar y proteger por leyes sabias y justas la libertad civil, la propiedad, y los demas derechos legítimos de todos los individuos que la componen.
CAPITULO II.
*De los Españoles.*
ART. 5. Son Españoles ...
Primero: Todos los hombres libres nacidos y avecindados en los dominios de las Españas, y los hijos de estos.
Segundo: Los extranjeros que hayan obtenido de las Córtes carta de naturaleza.
Tercero: Los que sin ella lleven diez años de vecindad, ganada segun la ley en cualquier pueblo de la Monarquía.
Cuarto: Los libertos desde que adquieran la libertad en las Españas.
ART. 6. El amor de la patria es una de las principales obligaciones de todos los españoles, y asimismo el ser justos y benéficos.
ART. 7. Todo español está obligado á

Con motivo del bicentenario de la constitución una matemática gadita no puede resistirse a la idea de hacer algo que una ambas cosas. En ello estamos; mis estudiantes y yo estamos elaborando una exposición que relacione algunos artículos con las matemáticas. No puedo rematar la comunicación porque el plazo para entregarla acaba antes que el plazo que nos hemos dado mis estudiantes y yo para realizarla, así que me limitaré a describir las actividades que les he propuesto.

**Nivel educativo**: Muy básico.

## 1. INTRODUCCIÓN.

A lo mejor leer la constitución en si es pesado, pero recomiendo leer el Discurso Preliminar. Es toda una declaración de intenciones recorriendo la historia de España hasta 1812 justificando a Fernando VII la bondad de la misma. ¡Hay tanta esperanza en esas palabras!. Pero la matemática que se encuentra ahí es la típica de hacer una ecuación se años o cosas así, que no era mi objetivo (al menos yo no vi otra); así que me centré en algunos artículos que permitían traducción al lenguaje algebraico, ordenación de datos, etc. Dejando libertad a los/as estudiantes por si preferían buscar artículos y sacarle jugo matemático por su cuenta (de momento sólo una alumna se ha atrevido).

## 2. TÍTULO I.

De la nación española y de los españoles.

### 2.1. CAPÍTULO II.

De los españoles

- Art 5. *Son españoles:*
  *Primero. Todos los hombres libres nacidos y avecindados en los dominios de las Españas, y los hijos de éstos.*
  *Segundo. Los extranjeros que hayan obtenido de las Cortes carta de naturaleza.*
  *Tercero. Los que sin ella lleven diez años de vecindad, ganada según la ley en cualquier pueblo de la Monarquía.*
  *Cuarto. Los libertos desde que adquieran la libertad en las Españas.*

**Expresa algebraicamente el punto tercero**

Sea *e* extranjero sin carta de naturaleza

$$e \text{ español} \Leftrightarrow v \geq 10 \Leftrightarrow v \in [10,+\infty)$$

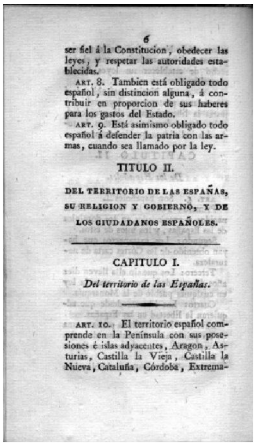
# 3. TÍTULO II.

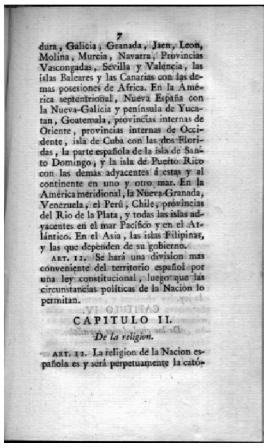
Del territorio de las Españas, su religión y gobierno, y de los ciudadanos españoles.

## 3.1. CAPÍTULO I.

Del territorio de las Españas.

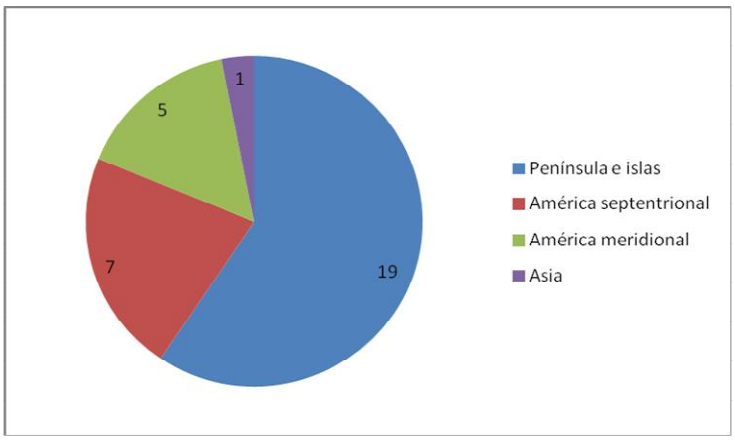
- Art 10. *El territorio español comprende en la Península con sus posesiones e islas adyacentes: Aragón, Asturias, Castilla la Vieja, Castilla la Nueva, Cataluña, Córdoba, Extremadura, Galicia, Granada, Jaén, León, Molina, Murcia, Navarra, Provincias Vascongadas, Sevilla y Valencia, las islas Baleares y las Canarias con las demás posesiones de África. En la América septentrional: Nueva España con la Nueva-Galicia y península de Yucatán, Guatemala, provincias internas de Oriente, provincias internas de Occidente, isla de Cuba con las dos Floridas, la parte española de la isla de Santo Domingo y la isla de Puerto Rico con las demás adyacentes a éstas y al continente en uno y otro mar. En la América meridional, la Nueva Granada, Venezuela, el Perú, Chile, provincias del Río de la Plata, y todas las islas adyacentes en el mar Pacífico y en el Atlántico. En el Asia, las islas Filipinas, y las que dependen de su gobierno.*


6
ser fiel á la Constitucion, obedecer las leyes, y respetar las autoridades establecidas.
ART. 8. Tambien está obligado todo español, sin distincion alguna, á contribuir en proporcion de sus haberes para los gastos del Estado.
ART. 9. Está asimismo obligado todo español á defender la patria con las armas, cuando sea llamado por la ley.
TITULO II.
DEL TERRITORIO DE LAS ESPAÑAS, SU RELIGION Y GOBIERNO, Y DE LOS CIUDADANOS ESPAÑOLES.
CAPITULO I.
*Del territorio de las Españas.*
ART. 10. El territorio español comprende en la Península con sus posesiones é islas adyacentes, Aragon, Asturias, Castilla la Vieja, Castilla la Nueva, Cataluña, Córdoba, Extrema-


7
dura, Galicia, Granada, Jaen, Leon, Molina, Murcia, Navarra, Provincias Vascongadas, Sevilla y Valencia, las islas Baleares y las Canarias con las demas posesiones de Africa. En la América septentrional, Nueva España con la Nueva-Galicia y península de Yucatan, Guatemala, provincias internas de Oriente, provincias internas de Occidente, isla de Cuba con las dos Floridas, la parte española de la isla de Santo Domingo, y la isla de Puerto-Rico con las demas adyacentes á estas y al continente en uno y otro mar. En la América meridional, la Nueva-Granada, Venezuela, el Perú, Chile, provincias del Rio de la Plata, y todas las islas adyacentes en el mar Pacífico y en el Atlántico. En el Asia, las islas Filipinas, y las que dependen de su gobierno.
ART. 11. Se hará una division mas conveniente del territorio español por una ley constitucional, luego que las circunstancias políticas de la Nacion lo permitan.
CAPITULO II.
*De la religion.*
ART. 12. La religion de la Nacion española es y será perpetuamente la católi-

**Expresa el número de provincias de la península e islas, América septentrional, América meridional y Asia mediante un diagrama de sectores (los ángulos tienen que ser proporcionales a 360º.**

La solución va a variar según el estudiante las cuente. De hecho es difícil que le salgan las 32 por el lenguaje que se usa.



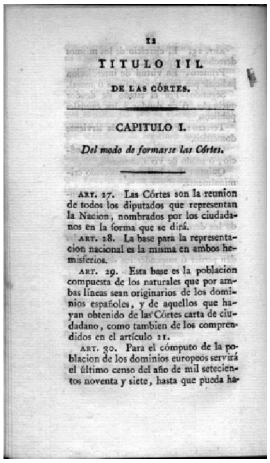
# 4. TÍTULO III.

De las cortes.

## 4.1. CAPÍTULO I.

Del modo de formarse las cortes.

- Art 30 *Para el cómputo de la población de los dominios europeos servirá el último censo del año de mil setecientos noventa y siete, hasta que pueda hacerse otro nuevo, y se formará el correspondiente para el cómputo de la población de los de ultramar, sirviendo entre tanto los censos más auténticos entre los últimamente formados.*



TITULO III.

DE LAS CÓRTES.

CAPITULO I.

*Del modo de formarse las Córtes.*

ART. 27. Las Córtes son la reunion de todos los diputados que representan la Nacion, nombrados por los ciudadanos en la forma que se dirá.

ART. 28. La base para la representacion nacional es la misma en ambos hemisferios.

ART. 29. Esta base es la poblacion compuesta de los naturales que por ambas líneas sean originarios de los dominios españoles, y de aquellos que hayan obtenido de las Córtes carta de ciudadano, como tambien de los comprendidos en el artículo 11.

ART. 30. Para el cómputo de la poblacion de los dominios europeos servirá el último censo del año de mil setecientos noventa y siete, hasta que pueda hacerse otro nuevo; y se formará el correspondiente para el cómputo de la poblacion de los de ultramar, sirviendo entre tanto los censos mas auténticos entre los últimamente formados.

ART. 31. Por cada setenta mil almas de la poblacion, compuesta como queda dicho en el artículo 29, habrá un diputado de Córtes.

ART. 32. Distribuida la poblacion por las diferentes provincias, si resultare en alguna el exceso de mas de treinta y cinco mil almas, se elegirá un diputado mas, como si el número llegase á setenta mil, y si el sobrante no excediere de treinta y cinco mil, no se contará con él.

ART. 33. Si hubiese alguna provincia, cuya poblacion no llegue á setenta mil almas, pero que no baje de sesenta mil, elegirá por sí un diputado; y si bajare de este número, se unirá á la inmediata, para completar el de setenta mil requerido. Exceptúase de esta regla la isla de Santo Domingo, que nombrará diputado, cualquiera que sea su poblacion.

- Art 31 *Por cada setenta mil almas de la población, compuesta como queda dicho en el artículo 29, habrá un diputado de Cortes.*

**En 1812 funcionaban con el llamado Censo de Godoy[1]. Los datos son los siguientes.**

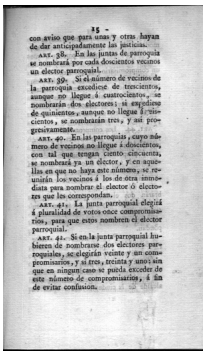
ESTADO GENERAL DE LA POBLACION DE ESPAÑA EN EL AÑO DE 1797

| EDAD | SOLTEROS | | CASADOS | | VIUDOS | | Total de |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Varones | Hembras | Varones | Hembras | Varones | Hembras | Edades |
| Hasta 7 años | 997.433 | 968.265 | | | | | 1.965.698 |
| De 7 a 16 | 890.149 | 843.871 | 5.462 | 7.463 | 295 | 225 | 1.747.465 |
| De 16 a 25 | 577.451 | 578.663 | 181.065 | 243.039 | 5.767 | 10.505 | 1.596.490 |
| De 25 a 40 | 285.775 | 277.963 | 794.793 | 838.439 | 32.545 | 64.666 | 2.294.181 |
| De 40 a 50 | 115.715 | 117.524 | 483.944 | 454.358 | 50.129 | 91.551 | 1.313.221 |
| De 50 a 60 | 74.124 | 75.103 | 305.125 | 268.671 | 54.983 | 105.874 | 883.880 |
| De 60 a 70 | 43.861 | 44.867 | 167.070 | 132.277 | 51.505 | 89.624 | 529.204 |
| De 70 a 80 | 15.576 | 15.756 | 42.213 | 33.059 | 26.872 | 37.856 | 171.332 |
| De 80 a 90 | 3.344 | 3.074 | 6.407 | 5.224 | 6.959 | 10.193 | 35.201 |
| De 90 a 100 | 391 | 1.234 | 512 | 359 | 789 | 1.150 | 4.435 |
| De 100 arriba | 13 | 17 | 9 | 6 | 23 | 46 | 114 |
| **Total** | **3.003.832** | **2.926.337** | **1.986.600** | **1.982.895** | **229.867** | **411.690** | **10.541.221** |
| Total Estados | 5.930.169 | | 3.969.495 | | 641.557 | | |
| Total General | 10.541.221 | | | | | | |

**Para simplificarlo al máximo suponed que sólo hay una provincia y que cuentan todas las almas. ¿Cuántos diputados tendrían las cortes?**
**Ahora hazlo contando sólo a las personas con rango de *ciudadano*; los varones mayores de 25 años. ¿Cuál sería el número de diputados?**
La primera pregunta no tuene mayor dificultad que dividir 15541221/1000
Tenemos 155 412´221 diputados. Buen momento para hablar de la función parte entera. Por muchas ganas que tengamos, no podemos trocear a los diputados. Por lo tanto tendríamos un congreso de 155 412 diputados, algo totalmente absurdo.
Para hacer el segundo ejercicio meted los datos en una hoja de cálculo, es lo más cómodo. De paso se miran con más profundidad: es sorprendente las celdas F3 y G3
En total varones mayores de 25 años hay 538.799 solteros, 1.800.073 casados y 223.805 viudos, con lo que había 2.562.677 ciudadanos. Así que, suponiendo la hipótesis uniprovincial tendríamos 2 562 diputados.

## 4.2. CAPÍTULO III.

De las Juntas electorales de parroquia

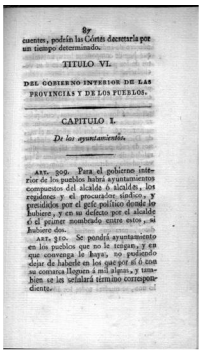

35
con aviso que para unas y otras hayan de dar anticipadamente las justicias.
ART. 38. En las juntas de parroquia se nombrará por cada doscientos vecinos un elector parroquial.
ART. 39. Si el número de vecinos de la parroquia excediese de trescientos, aunque no llegue á cuatrocientos, se nombrarán dos electores: si excediese de quinientos, aunque no llegue á seiscientos, se nombrarán tres, y así progresivamente.
ART. 40. En las parroquias, cuyo número de vecinos no llegue á doscientos, con tal que tengan ciento cincuenta, se nombrará ya un elector, y en aquellas en que no haya este número, se reunirán los vecinos á los de otra inmediata para nombrar el elector ó electores que les correspondan.
ART. 41. La junta parroquial elegirá á pluralidad de votos once compromisarios, para que estos nombren el elector parroquial.
ART. 42. Si en la junta parroquial hubieren de nombrarse dos electores parroquiales, se elegirán veinte y un compromisarios, y si tres, treinta y uno: sin que en ningun caso se pueda exceder de este número de compromisarios, á fin de evitar confusion.

- Art 38 *En las juntas de parroquia se nombrará por cada doscientos vecinos un elector parroquial.*
- Art 39 *Si el número de vecinos de la parroquia excediese de trescientos, aunque no llegue a cuatrocientos, se nombrarán dos electores; si excediese de quinientos, aunque no llegue a seiscientos, se nombrarán tres, y así progresivamente.*
- Art 41 *La junta parroquial elegirá a pluralidad de votos once compromisarios, para que éstos nombren el elector parroquial.*
- Art 42 *Si en la junta parroquial hubieren de nombrarse dos electores parroquiales, se elegirán veinte y un compromisarios, y si tres, treinta y uno; sin que en ningún caso se pueda exceder de este número de compromisarios, a fin de evitar confusión.*

**Expresa matemáticamente el número de compromisarios paso a paso en una junta parroquial de:**
*** 287 vecinos**
Tenemos una función definida a trozos. Por el Art 38 tendríamos un elector parroquial, por lo que por el Art 41 harían falta once compromisarios.
*** 400 vecinos**
En el Art 39 habla de no llegar a 400, no es el caso, por lo que harán falta 2 electores, lo que implica 21 compromisarios por el Art 42.
*** 879 vecinos**
Hay algo extraño en el artículo 39. Empieza con [300,400) y después pasa a [500, 600). Lo calcula a partir de ese intervalo, por lo que harán falta 6 electores y para ello hacen falta 61 compromisarios
*** x vecinos (400<x<1000)**

E(x/100)- 2 da el número de electores y el número de compromisarios se podría calcular por la fórmula 10(E(x/100)- 2)+1

# 5. TÍTULO VI



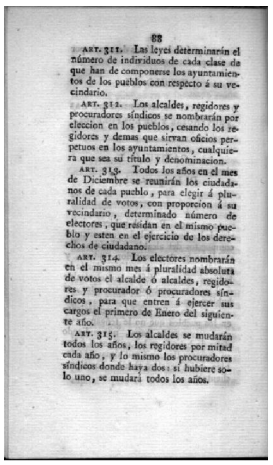
Del gobierno interior de las provincias y de los pueblos.

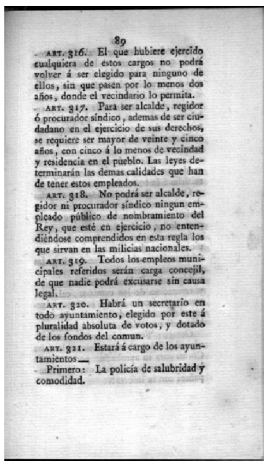
## 5.1. CAPÍTULO I.

De los ayuntamientos

- Art. 310. *Se pondrá ayuntamiento en los pueblos que no le tengan, y en que convenga le haya, no pudiendo dejar de haberle en los que por sí o con su comarca lleguen a mil almas, y también se les señalará término correspondiente.*

**Expresa algebraicamente la condición que debe tener el número de almas *a*** a≥1000

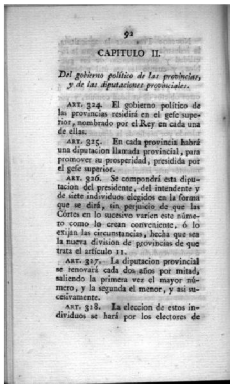




- Art. 315 *Los alcaldes se mudarán todos los años, los regidores por mitad cada año, y lo mismo los procuradores síndicos donde haya dos: si hubiere sólo uno se mudará todos los años.*
- Art 316 *El que hubiere ejercido cualquiera de estos cargos no podrá volver a ser elegido para ninguno de ellos, sin que pasen por lo menos dos años, donde el vecindario lo permita.*

**La constitución estuvo en vigencia oficialmente dos años. En una población de 1 000 almas ¿Cuántos alcaldes, regidores y procuradores síndicos hubo?**

Alcaldes: 2
Regidores: 4
Procuradores síndicos: 2 o 4



- Art 317. *Para ser alcalde, regidor o procurador síndico, además de ser ciudadano en el ejercicio de sus derechos, se requiere ser mayor de veinticinco años, con cinco a lo menos de vecindad y residencia en el pueblo. Las leyes determinarán las demás calidades que han de tener estos empleados.*

**Traduce al lenguaje algebraico las condiciones que debe cumplir un alcalde con las variables edad *e* y años de vecindad *v*.**

e ≥ 25, v ≥ 5

### 5.2. CAPÍTULO II.

Del gobierno político de las provincias, y de las diputaciones provinciales.

- Art. 326 *Se compondrá esta diputación del presidente, del intendente y de siete individuos elegidos en la forma que se dirá, sin perjuicio de que las Cortes en lo sucesivo varíen este número como lo crean conveniente, o lo exijan las circunstancias, hecha que sea la nueva división de provincias de que trata el artículo 11*

**En 1812 se crean 32 provincias y en 1813 encargan una nueva división provincial a Felipe Bauzá, que determina 36 provincias. Según esto ¿cuántas personas había en las diputaciones en 1812 y en 1813**?

Cuestión de multiplicar. El total de personas en la diputación son 9.

1812: 32·9=288 personas

1813: 36·9=324 personas

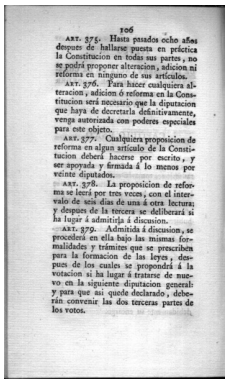
- Art 327. *La diputación provincial se renovará cada dos años por mitad, saliendo la primera vez el mayor número, y la segunda el menor, y así sucesivamente.*

**Según el artículo 327, ¿cuántas personas salen el segundo año?**

Como el segundo año habían 324 personas, saldrían 162. En este caso no hay mayor número y menor puesto que la división es exacta.

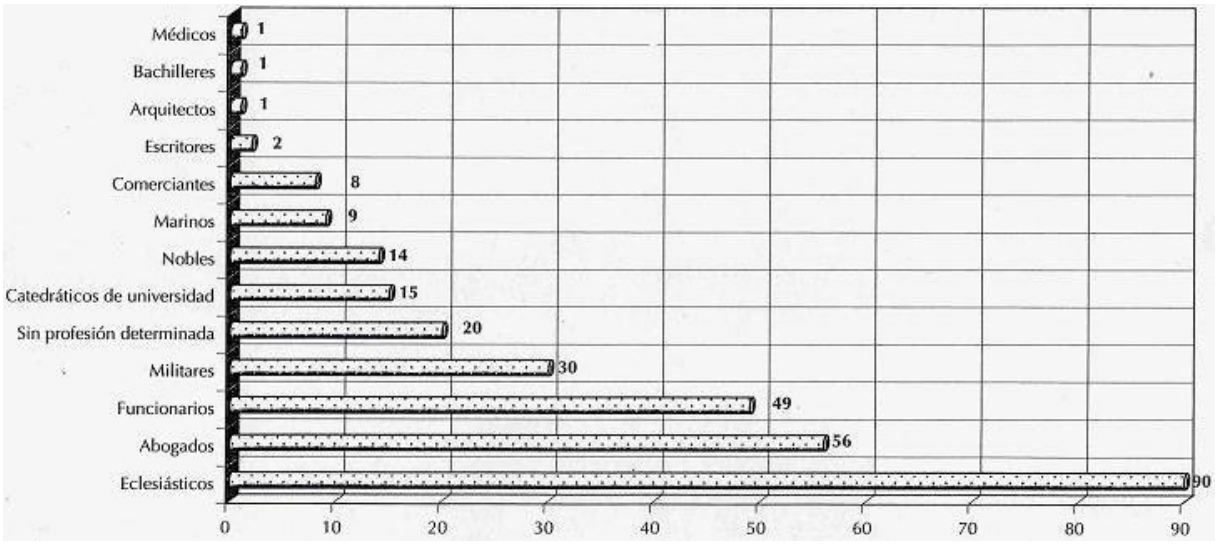
## 6. TÍTULO X.

De la observancia de la constitución, y modo de proceder para hacer variaciones en ella.


106
ART. 375. Hasta pasados ocho años despues de hallarse puesta en práctica la Constitucion en todas sus partes, no se podrá proponer alteracion, adicion ni reforma en ninguno de sus artículos.
ART. 376. Para hacer cualquiera alteracion, adicion ó reforma en la Constitucion será necesario que la diputacion que haya de decretarla definitivamente, venga autorizada con poderes especiales para este objeto.
ART. 377. Cualquiera proposicion de reforma en algun artículo de la Constitucion deberá hacerse por escrito, y ser apoyada y firmada á lo menos por veinte diputados.
ART. 378. La proposicion de reforma se leerá por tres veces, con el intervalo de seis dias de una á otra lectura; y despues de la tercera se deliberará si ha lugar á admitirla á discusion.
ART. 379. Admitida á discusion, se procederá en ella bajo las mismas formalidades y trámites que se prescriben para la formacion de las leyes, despues de los cuales se propondrá á la votacion si ha lugar á tratarse de nuevo en la siguiente diputacion general: y para que así quede declarado, deberán convenir las dos terceras partes de los votos.

- Art. 379 *Admitida la discusión, se procederá en ella bajo las mismos formalidades y tramites que se prescriben para la formación de las leyes, después de los cuales se propondrá a la votación si ha lugar a tratarse de nuevo en la siguiente diputación general: y para que así quede declarado, deberán convenir las dos terceras partes de los votos.*

**Según la gráfica[2] ¿Cuántos diputados eran necesarios para reformar la constitución? Actualmente hay 350 diputados en el congreso. ¿Cuántos harían falta?**




Sumando los datos de la gráfica tenemos 296 diputados. Las dos terceras partes de los votos serían $\frac{296 \cdot 2}{3} = 197\widehat{3}$. Por lo tanto, para alcanzar las dos terceras partes de los votos harían falta 198 diputados.
En la actualidad reformar la constitución parece depender del capricho del gobierno: para unos asuntos es facilísimo y para otros es casi imposible. Si utilizaran las matemáticas necesitarían $\frac{350 \cdot 2}{3} = 233\widehat{3}$ o sea, 234 diputados.

## REFERENCIAS.

HTTP://WWW.FUNDACIONFERNANDOBUESA.COM/CONST1812.HTM

http://bib.cervantesvirtual.com/portal/1812/

[1] http://www.ine.es/censo2001/godoy.htm

[2] http://www.hispanidad.info/1g.htm

# TALLERES

# LA DISCOTECA DE LOS NÚMEROS

**Iranzu López de Dicastillo Garnica**,
*Colegio de Educación Especial Los Ángeles, Logroño (La Rioja)*
**Mª Inmaculada Palomo Sáenz**,
*Colegio San José, Logroño (La Rioja)*
**Mª Leonor López de Dicastillo Roldán**,
*diseño gráfico e ilustraciones (La Rioja)*

## RESUMEN.

El trabajo que presentamos es un proyecto didáctico para la construcción del número y de las operaciones básicas. Tiene como objetivo principal que cada alumno construya por sí mismo la serie numérica de forma activa, natural y progresiva, siguiendo su propio ritmo de aprendizaje, y que sea capaz de operar con ella y aplicarla en sus situaciones cotidianas.

Entre las características que lo diferencian de otros métodos de aprendizaje destacamos el respeto y atención a las diferencias individuales, por haber nacido dentro de ellas, y la disposición en la que pone a los alumnos para que éstos puedan inventar, dar soluciones, prever resultados, calcular, intuir lo que va a pasar y plantear soluciones.

**Nivel educativo**: Educación Infantil y Educación Especial.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Cuando trabajas con alumnos con necesidades educativas especiales te ves obligado en muchas ocasiones a adaptar los métodos y materiales del mercado, y a inventar mil y una ideas que faciliten a estos alumnos la adquisición de gran parte de los contenidos curriculares.

Pocos métodos tienen en cuenta aspectos como, por ejemplo, la edad cronológica de estos alumnos. Es verdad que su inteligencia puede ser la de un niño de infantil, pero sus experiencias vitales, su entorno, su cuerpo, su aspecto físico tienen diez, quince o veinte años. ¿Cómo vamos a motivarles entonces contando patitos o celebrando su cumpleaños en un parque infantil?

De esta necesidad surgió la discoteca de los números. Al principio sólo fue un calendario con el que los alumnos pudieran aproximarse a la idea del tiempo y de la sucesión de los días, pero poco a poco fueron capaces, además, de generar los números diferenciando entre unidades (niños en la cafetería) y decenas (corros de niños bailando)



Figura 1. La discoteca de los números.

# 2. DESARROLLO DE LAS SESIONES DE TRABAJO.

La discoteca estará colocada en un lugar del aula visible para todos los alumnos y accesible, de forma que cada día un alumno sea el encargado de trabajar con ella.

## 2.1. SESIÓN DE PRESENTACIÓN.

El primer día se presenta la discoteca a los alumnos para ir hablando de las diferentes partes de que consta.

A la derecha está la TAQUILLA y diez fichas con las caras de los niños que están esperando para entrar. Recabamos la atención en el PORTERO. Él es el encargado de abrir o cerrar la discoteca con sus respectivas llaves (+) y (-), y es también quién nos dirá cuántos niños pueden entrar o salir a la vez, indicándolo con un cartel colocado a su lado.

Una vez dentro de la discoteca vemos la CAFETERÍA, con diez taburetes colocados en círculo donde los niños que vayan entrando deberán permanecer hasta que se complete el corro, y un gran cuadro negro donde colocaremos el número (de color negro) de niños que hay sentados en los taburetes.

Finalmente, a la izquierda está la DISCOTECA. En ella aparece un escenario con instrumentos, preparado para que aparezcan los músicos (la plataforma del escenario gira para que aparezcan o desaparezcan los músicos), y varios corros de diez círculos cada uno, donde se van a colocar los niños que entren de la cafetería. Vemos también que hay un cuadro rojo donde colocaremos el número (de color rojo) de corros que hay en la discoteca.

## 2.2. PRIMERA SESIÓN.

Para poder empezar a jugar se colocan en la taquilla los números ordenados del 1 al 10 y las fichas con los diez niños que esperan para entrar. Como vamos a empezar utilizando la discoteca como un calendario, cada día entrará un niño por lo que en el cartel del portero pondrá el número 1. Se abre la taquilla, se coloca la llave del portero que indica la discoteca está abierta (+) y se coloca en el tejado un letrero con el nombre del mes en el que estamos.

El primer niño recoge su entrada, saluda al portero, entra en la cafetería y se sienta siempre empezando por el asiento de arriba (iremos colocando a los niños en sentido de las agujas del reloj). En el cuadrado negro de la cafetería se pone la tarjeta con el número 1, también de color negro, que simboliza los niños que hay en la cafetería y el día del mes.

## 2.3. SESIONES DE LA SEGUNDA A LA NOVENA.

Cada día, entre el segundo y el noveno del mes, vamos a realizar la misma rutina que el día anterior, introduciendo actuaciones para reforzar la idea de orden, de secuencia, de correspondencia uno a uno y de inclusión. Los alumnos empiezan a fijarse en el número de taburetes que quedan vacíos, que son los días que faltan para que todo el corro se vaya a bailar.

El noveno día crece la expectación: sólo queda un sitio libre y están impacientes por ver qué ocurrirá al día siguiente.

### 2.4. SESIÓN DÉCIMA.

Una vez realizada la misma rutina que en días anteriores, entra el décimo niño y observamos que el corro se ha llenado. Hoy pueden pasar a la discoteca para bailar. Cuando esto ocurre todos juntos cantamos "A bailar, a bailar".

Los diez niños se colocan en uno de los corros de la discoteca y aparecen los músicos. Se coloca la tarjeta del número uno de color rojo en el cartel de la discoteca porque hay un corro bailando. La cafetería ha quedado vacía, por lo que ha de colocarse la tarjeta con el 0 de color negro. Hemos formado el número 10. Cantamos la canción "El baile de las decenas". También la taquilla está vacía, por lo que colocamos otros diez niños en la fila, esperando para seguir entrando.

### 2.5. SESIONES POSTERIORES.

En las sesiones de la undécima hasta el día en que termina el mes, procedemos de la siguiente manera:

- Se colocan niños en la cafetería hasta completar un nuevo corro a la vez que se van cambiando las tarjetas con los números de color negro, construyendo de esta manera los números del 11 al 19.
- Cuando se completa otro corro se pasa a la discoteca y se cambian las dos tarjetas, tanto la roja como la negra. Es el número veinte.
- Se procede de igual manera hasta completar un tercer corro, el número 30.
- Cuando termina el mes se vacía la discoteca y se vuelve ha empezar desde el número 1.

## 3. ALGO MÁS QUE UN CALENDARIO.

Para facilitar la representación gráfica de los números y las operaciones, acordamos con los alumnos utilizar los siguientes símbolos:

- Un vaso con una pajita, que representa la cafetería (las unidades).
- Un corro de diez pequeños círculos rojos, que representa la discoteca (las decenas).
- Un autobús, que partirá hacia el concierto sólo cuando se haya llenado con 10 corros de niños (las centenas).
- Además, dibujaremos la cara del portero junto a la llave correspondiente para indicar que sumamos o restamos.

Cuando los alumnos han adquirido suficiente soltura con el manejo de la discoteca como calendario es momento de utilizarla para trabajar con ellos otros conceptos aritméticos como los que se mencionan a continuación.

### 3.1. GENERACIÓN DE LAS CANTIDADES DEL 0 AL 100.

- Construcción del número como adición de uno más.
- Construcción de las decenas como grupos de 10 niños.
- Interiorización de la posición de las cifras y su valor.

### 3.2. COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE LOS NÚMEROS.

En el transcurso del juego los alumnos comprueban cómo se va formando el número 10 como resultado de sus sumas (1+9, 2+8, 3+7, etc.). Para favorecer su comprensión hemos elaborado un juego de cartas de parejas en las que ellos tienen que unir las cantidades que juntas suman 10.

### 3.3. MAYOR Y MENOR.

Sólo con mirar el número de niños en la cafetería y el número de corros en la discoteca los alumnos van descubriendo intuitivamente qué cantidades son mayores o menores.

### 3.4. LA SUMA.

- Actividad 1. Encaminada a que los alumnos entiendan el significado del primer sumando. Le llamamos "En la cafetería hay…"
- Actividad 2. Para trabajar el significado del segundo sumando. Le llamamos "El portero dice que entren…"
- Actividad 3. La suma. "En la cafetería hay… y el portero dice que entren…" Presentamos a los alumnos la suma con los símbolos acordados (vaso, corros, portero).
- Actividad 4. Suma de dos sumandos, uno de ellos con dos cifras.

### 3.5. LA RESTA

- Actividad 1. Vaciando la discoteca. Dedicamos unas sesiones a vaciar la discoteca sacando poco a poco a los niños que hay dentro, empezando por los que están en la cafetería y después descomponiendo los corros de la discoteca. Los alumnos van realizando las restas de forma manipulativa y se van familiarizando con el signo -.
- Actividad 2. "En la cafetería hay… y el portero dice que salgan". Se plantean diferentes situaciones que los alumnos deben resolver deshaciendo los corros de la discoteca (resta con llevadas).

A partir de aquí, los alumnos estarán preparados para sumar y restar cualquier cantidad, de una forma natural y sencilla.

## 4. MATERIALES ADICIONALES.

Para trabajar todos estos conceptos hemos preparado una serie de materiales adicionales que los alumnos pueden manipular y que facilitan la representación de las diferentes situaciones de aprendizaje que se les proponen:

- Discotecas individuales con sus correspondientes accesorios, adaptadas a las necesidades de cada alumno.
- Láminas en las que se muestra la formación de los números del 0 al 9.
- Cartas de complementarios.
- Tarjetas "Que entren" y tarjetas "Que salgan"
- Cuadernillos de sumas y restas con la simbología acordada.

## REFERENCIAS.

Kamii, Constance. *"El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget"* Teachers Collage, Columbia University, 1985

Martínez Montero, Jaime. *"Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales"* Ed. Wolters Kluwer España, S.A., 2010

# DINÁMICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

**Paloma Gavilán Bouzas,**
Universidad de Alcalá (Madrid)
**Raquel Alario Gavilán,**
Escuela Municipal de Música de Cabanillas del Campo (Guadalajara)

## RESUMEN

En el taller vamos a realizar dinámicas que nos permitan comprender el funcionamiento del Aprendizaje Cooperativo y dinámicas que nos lleven a conocer diferentes técnicas para llevarlo al aula: técnicas para fomentar la participación de todos; técnicas para la enseñanza recíproca; técnicas para favorecer el consenso; técnicas para potenciar la responsabilidad individual y grupal.

En la web de las actas del congreso (http://thales.cica.es/xivceam/actas) puede obtenerse la presentación de diapositivas usada en este taller

# COMPRENDIENDO LA CORRELACIÓN A PARTIR DE SUS REPRESENTACIONES

**M. Magdalena Gea**,
*Universidad de Granada*
**Pedro Arteaga**,
*Universidad de Granada*
**Gustavo R. Cañadas**,
*Universidad de Granada*
**J. Miguel Contreras**,
*Universidad de Granada*

## RESUMEN.

La correlación es un concepto estadístico fundamental, pues extiende la idea de dependencia funcional a variables estadísticas. Sin embargo, la investigación previa ha descrito sesgos de razonamiento y dificultades asociadas a su comprensión. Este taller ofrece una variedad de tareas correlacionales con una doble finalidad, por un lado presentar diversas situaciones de aprendizaje que contribuyan a eliminar las concepciones erróneas que se manifiestan y por otro lado potenciar los procesos de traducción de las distintas representaciones de la covariación estadística junto a las destrezas o habilidades para su traducción. Las actividades propuestas son susceptibles de adaptarse a varios niveles educativos.

**Nivel educativo**: El taller es adecuado para los profesores de Bachillerato; también puede interesar a los profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Universidad o a estudiantes de Matemáticas.

## 1. LAS TAREAS CORRELACIONALES.

Explicar, controlar y predecir los sucesos que se presentan en nuestro día a día, depende de habilidades y destrezas para detectar covariaciones entre los acontecimientos que se suceden (Alloy y Tabachnik, 1984). En consecuencia, el razonamiento covariacional se encuentra presente en la vida cotidiana del ser humano, como actividad cognitiva fundamental para su desarrollo (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007), aunque no por ello está exento de dificultades.

En este taller nos centramos en la resolución de tareas covariacionales, problemática de interés para diversos investigadores y para la que se han fijado distintos pasos secuenciales (Crocker, 1981 y Moritz, 2004). Concretamente nos centramos en uno de éstos como es la realización de juicios de correlación y la estimación del coeficiente de correlación a partir de sus diferentes representaciones, aunque además manifestaremos la relevancia del resto de pasos propuestos. También se proporcionará a los profesores información sobre las posibles dificultades y sesgos de los estudiantes al realizar las tareas.

## 2. REPRESENTACIONES DE LA ASOCIACIÓN.

Las investigaciones desarrolladas por Sánchez Cobo y cols. (2000), Estepa (2007) junto con la de Zieffler y Garfield, (2009), nos acercan un poco más a comprender el modo en que los alumnos adquieren la noción de correlación. En concreto, dada la necesidad de un análisis sistemático de las variables en las tareas de traducción de la correlación de una representación a otra y de su efecto sobre la estimación de la correlación así como las estrategias empleadas por alumnos, la investigación abordada por Sánchez Cobo y cols. consideran cuatro formas de representar la correlación:

1. Descripción verbal, cuando describimos una distribución bivariada mediante el lenguaje natural,
2. Tabla de valores, o presentación de un conjunto de pares de valores numéricos de una distribución bivariada,
3. Diagrama de dispersión, cuando el conjunto de pares de valores de una distribución bivariada se presentan mediante un diagrama cartesiano, y
4. Coeficiente de correlación, cuando se da un valor numérico como medida de asociación existente entre las variables que conforman la distribución.

Para adquirir un razonamiento correlacional adecuado es de vital importancia dominar los procesos de traducción entre estas representaciones, es decir entre los datos, sus representaciones gráficas, las descripciones verbales sobre la covariación y el valor del coeficiente. El uso de estos procesos lleva implicadas destrezas y habilidades tales como el cálculo estadístico, el uso de modelos matemáticos para el ajuste de datos, la traducción desde y hacia las expresiones algebraicas y gráficas utilizadas, así como juicio sobre la posible existencia de relaciones causales. Moritz (2004), presenta un resumen (Figura 1) donde se reflejan las formas más comunes de representar la covariación estadística destacando, entre otras, tres destrezas importantes: (a) generar datos especulativos, mediante el desarrollo de gráficos que reflejen los juicios de asociación textuales, (b) interpretar gráficos tales como diagramas de dispersión con la correspondiente emisión de juicios de asociación, y por último, (c) interpretar tablas de frecuencias de datos covariados.

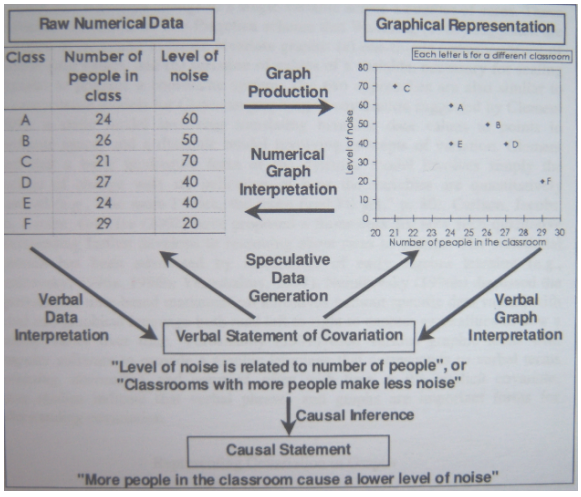



Figura 1. Formas de representar la covariación estadística junto a las destrezas o habilidades para su traducción (Moritz, 2004, p.230).

En cuanto a las dificultades generales que presentan los alumnos en el desempeño de una tarea correlacional, se destacan las siguientes:

- Considerar tan sólo la correspondencia de datos bidimensionales aislados, en lugar de considerar la tendencia global de éstos;
- Considerar cada una de las variables de modo aislado, en lugar de considerar la correspondencia de las dos variables implicadas en el estudio de modo conjunto;
- La existencia de teorías o creencias previas en cuanto a las variables de estudio y su asociación.

Por otro lado, es importante tener en cuenta las siguientes variables de tarea (Sánchez Cobo y cols., 2000):

- Signo de la asociación entre las variables, pues podemos considerar tres casos: Dependencia directa, dependencia inversa e independencia. Aunque matemáticamente la dependencia directa o inversa son semejantes, psicológicamente no son percibidas del mismo modo por los estudiantes, ya que Estepa (1994) definió la concepción unilateral de la correlación como un sesgo de algunos estudiantes que consideran la dependencia inversa como independencia.
- Intensidad de la dependencia, pues la dependencia se percibe más fácilmente si es intensa.
- Concordancia entre los datos y las teorías previas sugeridas por el contexto. Muchos sujetos se guían preferentemente por sus teorías (en vez de usar los datos). Chapman (1967) describe un razonamiento común, que denomina *correlación ilusoria* y que fue propuesto para designar la correlación que perciben los observadores entre dos clases de sucesos que o bien (a) no están correlacionados, (b) se correlacionan con un menor grado del que se declara, o (c) se correlacionan en la dirección opuesta de la que se declara.
- Tipo de covariación. Barbancho (1973) indica que la correlación entre dos variables puede deberse a una dependencia causal unilateral, pero también a una interdependencia (cada variable afecta a la otra), una dependencia indirecta (una tercera variable afecta a otras dos), concordancia (coincidencia en preferencia u ordenación de la misma serie de datos por dos jueces) o covariación casual. Pero algunos estudiantes sólo admiten la relación causal, confundiendo correlación y causación (concepción causal, según Estepa, 1994).

# 3. OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN DEL TALLER.

El objetivo principal de este taller es sensibilizar y motivar a los profesores, o futuros profesores, en el desempeño de su profesión, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la correlación. Para ello se plantean dos objetivos específicos:

- Proporcionar algunas tareas que potencien el tratamiento de la correlación en el aula con una triple finalidad: a) favorecer el dinamismo de la enseñanza; b) servir para detectar y diagnosticar algunos de los sesgos descritos en la investigación desarrollada sobre correlación y c) ayudar a concienciar a los estudiantes de estos sesgos permitiendo así desarrollar en ellos un adecuado razonamiento covariacional.

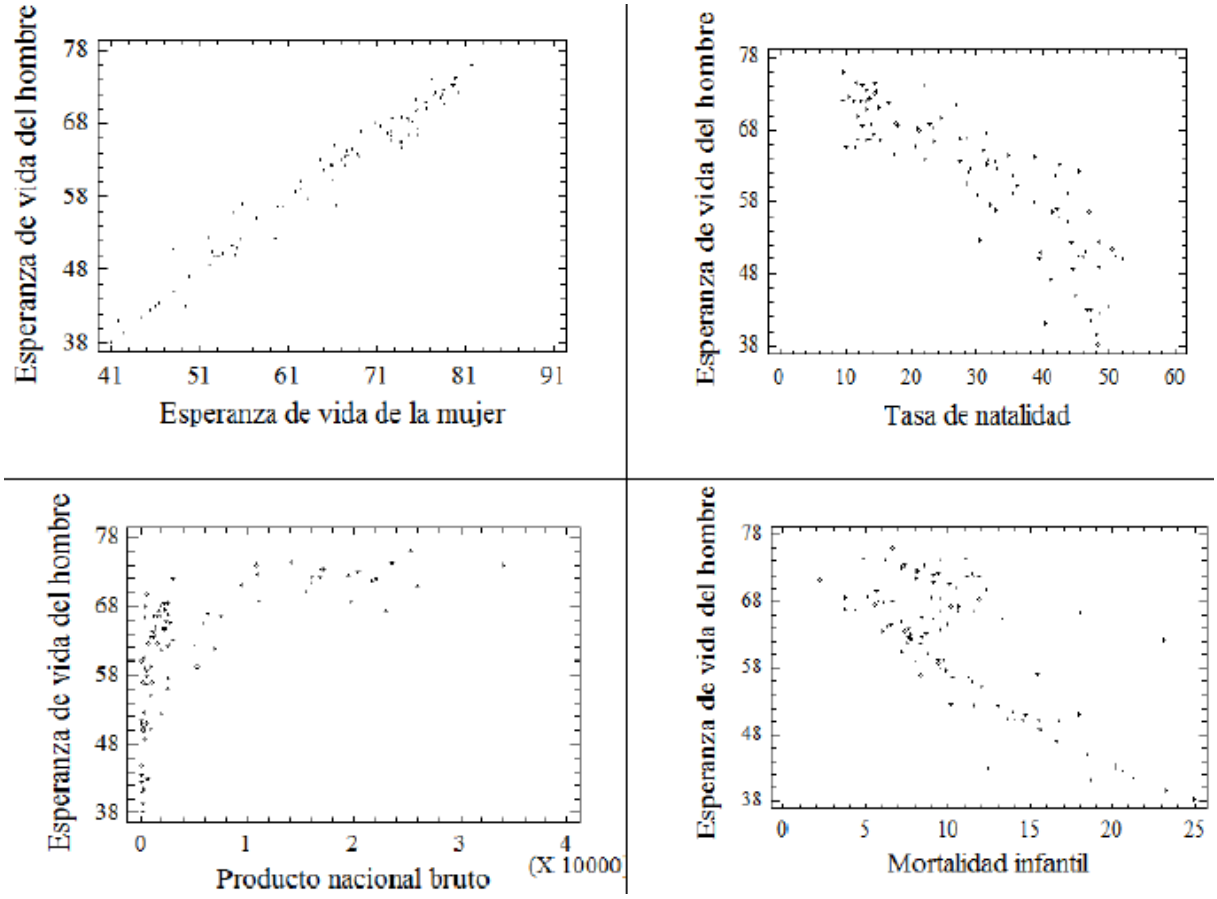
- Presentar resultados de las investigaciones sobre correlación a los profesores o futuros profesores en cuanto al desarrollo de los estudiantes de determinadas tareas correlacionales.

Se pretende desarrollar un taller de dos horas, con la siguiente organización:

- Se comenzará con el planteamiento de algunas actividades de traducción de la correlación a partir de sus diferentes representaciones que serán realizadas por los asistentes.
- Se organizará un debate para analizar las soluciones proporcionadas por los participantes.
- Se presentarán algunas posibles respuestas de estudiantes a tareas correlacionales y se analizarán los sesgos manifestados en las mismas.

Del conjunto de tareas que se desarrollarán y analizarán en el taller podemos destacar las siguientes:

T1. En la siguiente Figura hemos representado los diagramas de dispersión de la esperanza de vida del hombre en cada país, en función de diversas variables. ¿Qué variables están relacionadas con la esperanza de vida del hombre? ¿En cuál es la relación directa o inversa? ¿Cuáles influyen o son influidas por la esperanza de vida del hombre? ¿Cuál sirve mejor para predecir la esperanza de vida? ¿En qué casos la relación podría ser debida a otras variables? (Actividad adaptada de Batanero, Díaz y Gea, 2011)



T2. Ordene los siguientes coeficientes de correlación, de menor a mayor intensidad de relación entre las variables: 0,23; 0,87; -0,72; 0,0; -0,18. (Item adaptado de Estepa, 2007)

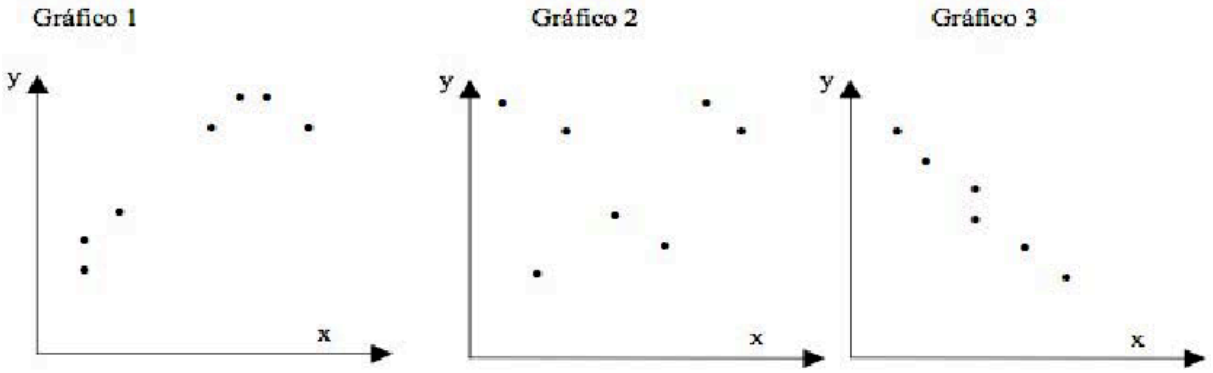
T3. A continuación, se presentan tres afirmaciones referidas a las conclusiones de un estudio acerca de las tasas de nacimiento, suicidio, crecimiento económico y productividad, junto con tres gráficos de dispersión.

Afirmación 1: En países con un desarrollo tecnológico alto, como Japón, Estados Unidos, Alemania, Inglaterra, Francia, Italia y Canadá se tienen bajas tasas de nacimiento (TN) asociadas con altas tasas de suicidio (TS).

Afirmación 2: Algunos economistas afirman que, independientemente de los países que se estudian, a altas tasas de crecimiento (TC) se asocian altas tasas de productividad (TP).

Afirmación 3: Tanto economistas como demógrafos afirman que las tasas de suicidio (TS) no parecen estar correlacionadas con las tasas de productividad (TP).

Desafortunadamente, en los gráficos no se colocaron los rótulos de referencia de los ejes. Asocia a cada gráfica una afirmación, completa con el nombre de los ejes y proporciona en cada caso un valor del coeficiente de correlación. (Actividad 4, Lavalle, Micheli y Rubio, 2006)




T4. Dados los siguientes valores del coeficiente de correlación entre dos variables X e Y, dibujad un diagrama de dispersión, con 10 puntos, que se adapte razonablemente a ellos: a) r = 0,25 b) r = -1 c) r = -0,01 d) r = 0,7 e) r = -0,4 (Sánchez, Estepa y Batanero, 2000).

## REFERENCIAS.

ALLOY, L.B. y TABACHNIK, N. (1984). *Assessment of covariation by humans and animals: the joint influence of prior expectations and current situational information*, Psychological Review 91(1), 112-149.

BARBANCHO, A.G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ed. Ariel. (Cuarta edición, 1.975).

BATANERO, C., DÍAZ, C. y GEA, M.M. (2011). Estadísticas de la pobreza y desigualdad. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estadística con Proyectos*. (pp. 73-96). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

CHAPMAN, L.J. y CHAPMAN, J.P. (1967). *Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations*, Journal of Abnormal Psychology 72(3), 193-204.

CROCKER, J. (1981). *Judgment of covariation by social perceivers*, Psychological Bulletin 90(2), 272-292.

ESTEPA, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

ESTEPA, A. (2007). *Caracterización del significado de la correlación y regresión de estudiantes de Educación Secundaria*, Zetetiké, Vol. 15, n. 28, 119-151. http://www.fae.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=5

LAVALLE, A. L., MICHELI, E. B. y RUBIO, N. (2006). *Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (3), 383-406.

MCKENZIE, C.R.M. y MIKKELSEN, L.A. (2007). *A Bayesian view of covariation assessment*, Cognitive Psychology 54(1), 33-61.

MORITZ, J. (2004). *Reasoning about covariation*. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, 221-255. Dordrecht (The Nederlands): Kluwer.

SÁNCHEZ COBO, F.T., ESTEPA, A. y BATANERO, C. (2000). *Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones*, Enseñanza de las Ciencias, 18(2), 297-310.

ZIEFFLER, A. y GARFIELD, J. (2009). *Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course*, Statistics Education Research Journal, 8(1), 7-31.

ZIEFFLER, A.S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Minnesota.

# ENSEÑANZA DE LA ESTADISTICA CON LA PLATAFORMA R-ESTADISTICA 2.0.

**José Miguel Contreras**,
*Universidad de Granada*
**Miguel Ángel Montero**,
*Universidad de Granada*
**Elena Molina**,
*Escuela Andaluza de Salud Pública*
**Pedro Arteaga**,
*Universidad de Granada*
**Gustavo Cañadas**,
*Universidad de Granada*
**María M. Gea**,
*Universidad de Granada*

## RESUMEN.

Aunque la enseñanza de la estadística y la probabilidad en secundaria y niveles universitarios tiene ya una gran tradición, los nuevos Decretos de Educación Secundaria y libros blancos de los nuevos grados, sugieren un cambio en la metodología de la enseñanza, recomendando la basado en simulaciones o experimentos.

Como R se ha convertido en la herramienta informática más utilizada en el campo de la Estadística (e incluso en áreas matemáticas), nos servimos de la plataforma R-Estadística 2.0, creada en un proyecto docente de la universidad de Granada, para presentar nuevas metodologías de aprendizaje.

**Nivel educativo**: Secundaria y universidad
**Material necesario**: Portátiles con conexión a Internet.

## 1. INTRODUCCIÓN.

La metodología estadística es hoy día una herramienta fundamental en la investigación empírica. La investigación en educación y otras ciencias sociales utiliza datos obtenidos mediante distintos procedimientos de investigación: encuestas, diseños experimentales,… La estadística es además, una de las materias que ha tenido mayor influencia de la tecnología, y en particular de Internet (Galmacci, 2001). Entre otras posibilidades, los libros de texto se empiezan a transformar en ediciones electrónicas, libremente accesibles a la consulta, modificación y sugerencias a través de Internet. Es también sencillo obtener datos de todo tipo para que los estudiantes puedan realizar investigaciones sobre casi cualquier tema. También pueden combinar diferentes conjuntos de datos en un mismo proyecto o "enviar" a la red sus propias colecciones de datos para que sean usadas por nuevos estudiantes en cualquier rincón del planeta. Las listas de discusión entre profesores o entre alumnos, la

"tutoría" de alumnos a distancia cuando no es posible la comunicación directa con el profesor ya es habitual en escuelas y universidades.

Con este taller, a través de la plataforma R-estadística 2.0 (Figura 1), (R-estadistica.ugr.es) queremos dar a conocer nuevas metodologías de enseñanza de la estadística y la probabilidad a partir del software R para todos los profesores e investigadores que realizan y trabajan con datos de encuestas en educación.

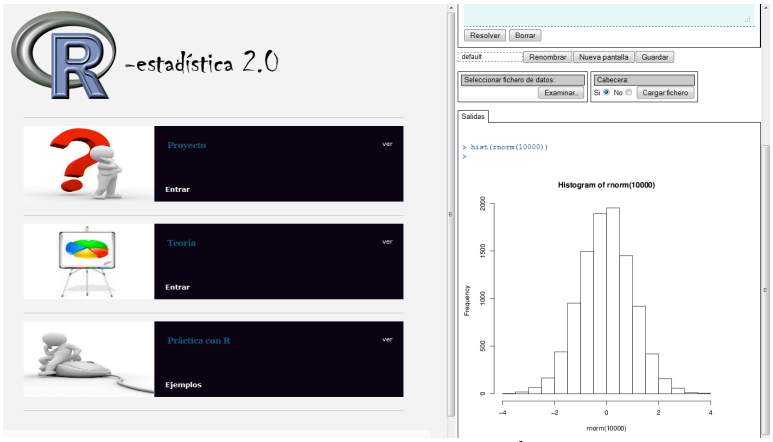



Figura 1. Plataforma R-estadística 2.0.

## 2. OBJETIVOS.

El objetivo principal de este taller es proporcionar los elementos básicos para empezar a trabajar con el lenguaje de programación R desde el punto de vista de la docencia, utilizando para ello la web R-estadística 2.0. Está web ha sido creada para proporcionar a sus usuarios materiales, teóricos y prácticos para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad, junto con una versión web del software R para la resolución de las tareas. El taller también pretende proporcionar información para que se pueda profundizar de forma autónoma en la utilización de este programa, haciendo énfasis en la utilización del lenguaje R en el ámbito de la Estadística y la creación de funciones y programas propios. Para ello se ofrece un buen conjunto de materiales docentes y bibliografía.

El utilizar R es debido a que actualmente se ha convertido en el software predominante en investigación, no solo estadística, a nivel mundial tanto en áreas como bioinformática, psicología, geoestadística, modelos gráficos, etc. La comunidad de usuarios de este software es muy dinámica (gran crecimiento del número de paquetes, creados por los mismos usuarios) e integrada por estadísticos de gran renombre (ej.: J. Chambers, L. Terney, B. Ripley, D. Bates, etc.). R es la implementación GNU (libre) de S y se obtiene libremente en http://cran.es.r-project.org

## 3. METODOLOGÍA

La propuesta inicial incluye el uso de la plataforma R-estadística 2.0, cuyos contenidos teóricos y prácticos se encuentran definidos en ella.

Cada bloque es tratado con ejemplos teóricos-prácticos utilizando la plataforma como applets interactivos. Se les proporcionará ejemplos, ya

programados, y la composición de los mismos para el desarrollo de las actividades (Figura 2).




Figura 2. Contenidos de la plataforma.

Se les proporcionará la opción de utilizar la implementación de R para web desarrollada para un proyecto docente de la Universidad de Granada. En ella el alumnado podrá familiarizarse con el software y realizar las tareas propuestas (Figura 3).

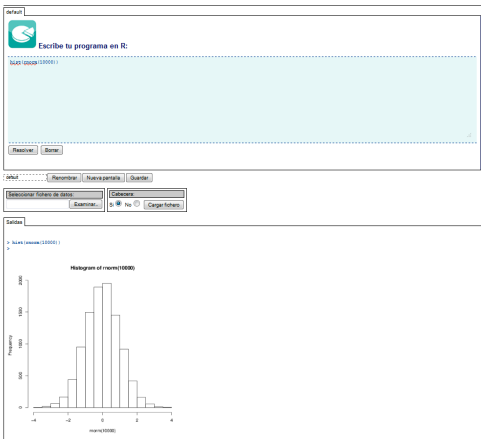



Figura 3. R interactivo.

# REFERENCIAS.

CONTRERAS, J. M.; Molina, E. y Arteaga, P. (2010). *Introducción a la programación estadística con R para profesores*, Universidad de Granada, Granada.

CONTRERAS, J. M.; Molina, E. Arcos, A. y Roa, R. (2010). *Enseñanza de la probabilidad a partir del software R*. XIII CEAM THALES, Córdoba.

GALMACCI, G. (2001). *The impact of the Internet on the researchers' training*. En C. Batanero (Ed.), Training researchers in the use of statistics (pp. 159-170). Voorburg: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.

# MODELIZANDO EL MUNDO.

**José Manuel Fernández Rodríguez**,
*I.E.S. "El Almijar", Competa (Málaga)*
**Encarnación López Fernández**,
*I.E.S. "Vega de Mar", San Pedro de Alcántara (Málaga)*

## RESUMEN.

En este taller vamos a utilizar la calculadora para modernizar distintas situaciones reales y así poder ver como matemáticas y realidad son, a veces, una misma cosa. El modelo de calculadora elegido ha sido la fx-CG 20 por la posibilidad que tiene de trabajar con imágenes reales, ya sean de las preinstaladas o que las hayamos introducido nosotros. Todas las situaciones a modelizar están elegidas de nuestro entorno más cercano.

**Nivel educativo**: Secundaria

## 1. INTRODUCCIÓN.

Se van a modelizar tres situaciones reales utilizando para ello distintas estrategias:

- Puente en la A7, situado en la localidad Malagueña de Vélez-Málaga. Planteamos un modelo y cambiando, de forma dinámica, los valores de los parámetros que contiene vamos a hacer que se ajuste a la forma de los pilares del puente.



Imagen 1. Pilares de un puente. Vélez-Málaga (Málaga).

- Lanzamiento de una pelota de baloncesto. En esta ocasión se va a modelizar un tiro parabólico a partir del estudio de una imagen en movimiento.



Imagen 2. Lanzamiento de un triple.

- Anfiteatro de Itálica. Se va a generar la forma elíptica de la arena del anfiteatro como un hipotrocoide.



Imagen 3. Vista aérea del anfiteatro de Itálica, (Sevilla).

Estos ejemplos ponen el énfasis en dos aspectos fundamentales, por un lado en el uso que la humanidad ha dado a las matemáticas en su beneficio propio y por el otro en la capacidad que tiene esta ciencia en explicar la realidad.

En el siguiente apartado se describe un ejemplo similar a la modelización que se va realizar de la tercera imagen pero para una plaza, también elíptica, sita en el pueblo Italiano de Lucca.

## 2. MODELIZANDO EL MUNDO. LA PLAZA DEL ANFITEATRO, LUCCA (ITALIA).

Una hipotrocoide es la curva que describe un punto que gira de forma solidaria a una circunferencia (generatriz) que rueda, tangencialmente y sin deslizamiento en el interior de otra circunferencia (directriz). Dicho así parece algo arisco, pero seguro que resulta mucho más familiar si lo vemos en su vertiente más lúdica, el espirógrafo.

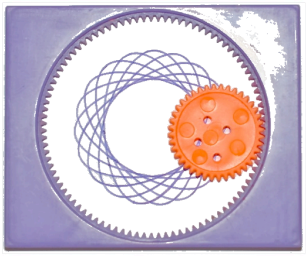


Imagen 4: Espirógrafo.

Son muchas las curvas que podemos generar utilizando este modelo matemático, no tenemos más que variar la relación entre los radios de la circunferencias directriz (R) y generatriz (r) además de cambiar la distancia del punto que genera la curva al centro de la circunferencia generatriz (d).

Nos vamos a centrar en cómo se genera una elipse como hipotrocoide. Si no somos escrupulosos en su forma nos bastaría con decir que el radio de la circunferencia directriz tiene que ser el doble de la generatriz ($R=2\cdot r$) y que d tiene que ser distinto de r. Pero si lo que queremos es generar una elipse determinada tenemos que agudizar nuestro ingenio. Este es el caso, queremos modelizar la elipse que aparece en la imagen 2, que corresponde a la Plaza del Anfiteatro de la ciudad italiana de Lucca.



Imagen 5: Plaza del Anfiteatro.

Antes de nada tenemos que investigar la relación entre los datos que podemos extraer de la elipse y los datos necesarios para la construcción. Para ello, si nos fijamos en la secuencia de imágenes que tenemos a continuación podemos apreciar que la distancia del punto que traza la curva al origen de coordenadas alcanza su máximo en dos posiciones imágenes 6.2 y 6.4 y cuyo valor es r+d.

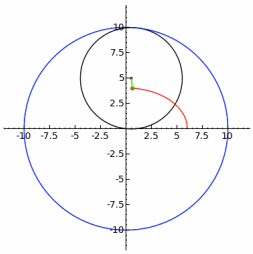


Imagen 6.1

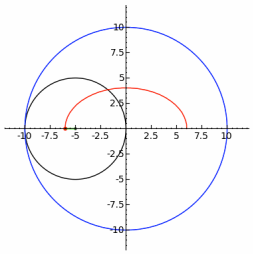


Imagen 6.2

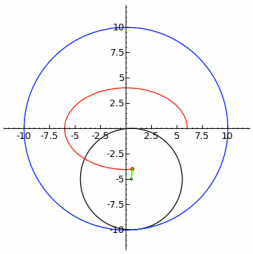


Imagen 6.3

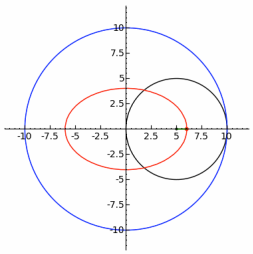


Imagen 6.4

Por otro lado si nos fijamos en el valor mínimo veremos que es r-d. De donde podemos deducir que R+2·d es el eje mayor de la elipse y R-2·d el menor y de ahí concluir que R es la semisuma de los ejes de la parábola y d la cuarta parte de su diferencia.

Una vez aclarado esto podemos empezar a trabajar sobre nuestro modelo.

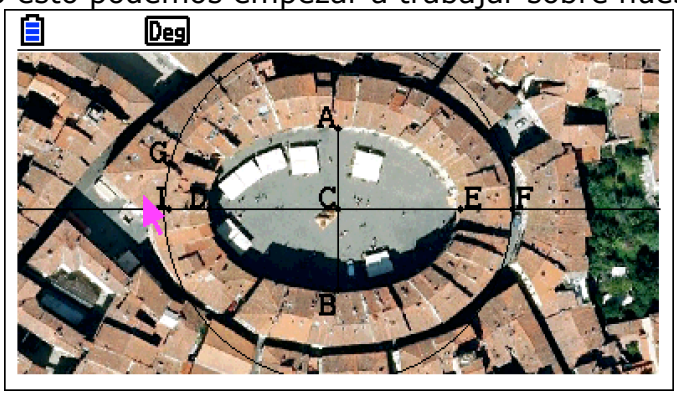



Imagen 7

Lo primero que debemos hacer pues, es calcular las medidas de los ejes de la elipse. Para ello trazaremos primero el segmento de extremos A y B. A

continuación trazamos una perpendicular al segmento por el punto medio del mimo, C, y sobre ella el segmento $\overline{DE}$.

Una vez tomadas las longitudes de los ejes podemos deducir, tal y como hemos comentado antes, que

$$R = \frac{7.8 + 5.296}{2} = 6.548$$

y que

$$d = \frac{7.8 - 5.296}{4} = 0.626$$

podemos empezar la construcción.

**Nota:** Si queremos saber la longitud de un segmento basta con seleccionarlo para que la información aparezca en la parte superior de la pantalla.

Empezaremos por construir la circunferencia directriz, que, como se ve en la imagen, es la de centro C y que pasa por el punto F. No es necesario afinar en el radio de la circunferencia, ya que en el cuadro de medidas se puede indicar con mayor precisión, cuando tengamos construido el modelo ajustaremos las medidas.

Disminuimos la intensidad de la imagen para poder ver con más claridad nuestra construcción. Seguidamente situamos el punto G sobre la circunferencia y calculamos el punto medio de C y G, H.

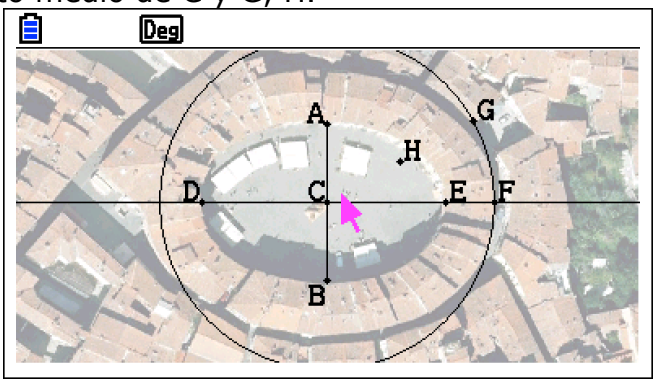



Imagen 8

Con centro H dibujamos la circunferencia que pasa por C, sobre ella un punto, I, por el que pasa una semirrecta con origen en H.

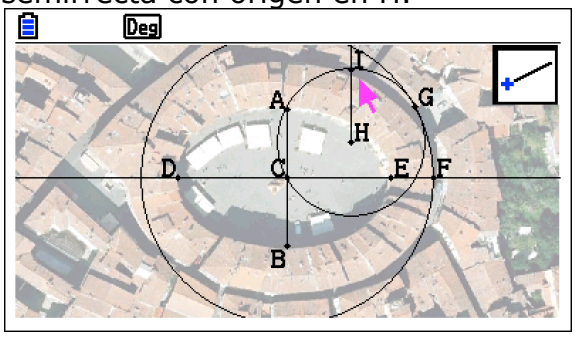



Imagen 9

Sobre esa semirrecta colocamos el punto J y, con la ayuda del cuadro de medidas, lo situamos a 0.626 unidades de H. Se puede observar que la situación del punto J sobre la imagen a modelizar es la idónea.

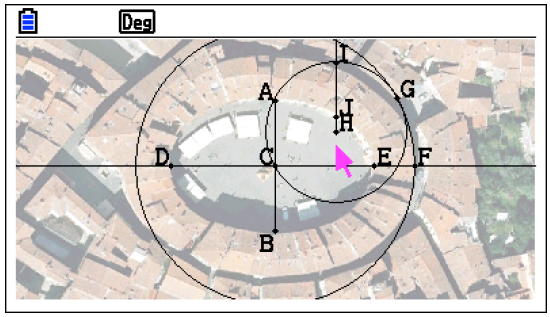



Imagen 10

No queda más que personalizar el aspecto del punto J, animar I y G, cada uno sobre la circunferencia que lo contiene y personalizar la animación de forma que consigamos que la circunferencia generatriz ruede sobre la directriz sin deslizarse, para ello será suficiente con cambiar el sentido de giro de la circunferencia generatriz.

Una vez que ajustemos las medidas correctas para el modelo el resultado será el que se muestra en la imagen.

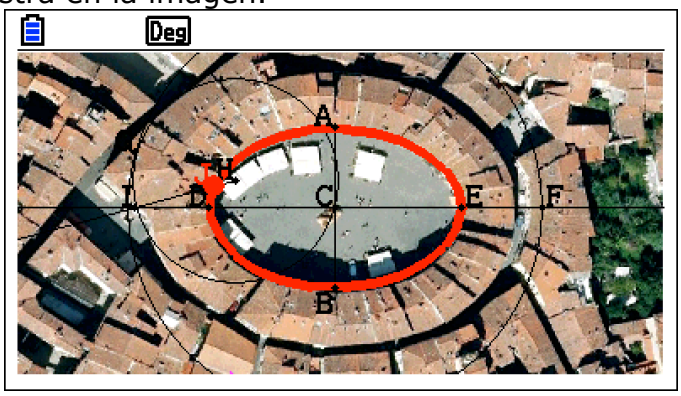



Imagen 11

## REFERENCIAS.

CASIO COMPUTER CO., LTD. (2011). Fx-CG 10, fx-CG 20 Software Guía de usuario. http://edu.casio.com

# UNA PROPUESTA: INCORPORAR ALGUNOS CONCEPTOS DE GRAFOS EN DISTINTOS NIVELES DE ESCOLARIDAD.

**Teresa Claudia Braicovich**,
*Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina*

## RESUMEN.

El tema grafos no se encuentra, en general, en las currículas escolares, por lo que he llevado a cabo varias investigaciones, en distintos niveles educativos y en diferentes contextos sociales, con el fin de evaluar la viabilidad de introducirlo. A partir de las mismas he podido concluir que el trabajar con algunos conceptos de grafos ayuda a los alumnos en varios aspectos dentro del proceso de enseñanza. Como muchos docentes desconocen el tema, otros sólo tienen un mínimo conocimiento del mismo e incluso algunos, aún cuando manejan más conceptos de esta temática no saben cómo presentarlo a sus alumnos, es que se propone el dictado de este taller, en el que se trabajaría con el concepto de árbol, una de las cuatro motivaciones históricas de la Teoría de Grafos.

**Nivel educativo**: Maestros, profesores de matemática y estudiantes de alguna de estas carreras.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Puede observarse en los distintos niveles educativos, incluida la enseñanza universitaria, las serias dificultades de los estudiantes para lograr un aprendizaje significativo: les resulta difícil proponer razonamientos propios, en muchas ocasiones no logran resolver sencillos problemas que pueden presentarse en la vida cotidiana y que tienen relación con la matemática. Es probable que esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo; podemos tomar las palabras de Moisés Coriat: "*No es tan importante saber muchas cosas como saber cómo aprender cosas nuevas*". Por otro lado, no se puede dejar de mencionar lo difícil que resulta a los docentes despertar el interés de los alumnos.

Una posible respuesta a la problemática anteriormente planteada, estaría dada por la idea de plantear situaciones donde el alumno tenga la posibilidad de explorar, descubrir, crear, ensayar, probar, generar hipótesis y conjeturas, discutirlas y analizarlas. En este sentido, a partir de investigaciones realizadas he concluido que los grafos constituyen una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas. La Teoría de Grafos es un tema avanzado a nivel universitario que, en general, no se encuentra en las currículas escolares y que permite realizar análisis y razonamientos muy interesantes. Es decir, no hay necesidad de ser un experto en el tema para usarlos con cierta soltura, por lo que considero que el introducir algunos conceptos de grafos resulta útil para

despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, también actúa como formador de la intuición y sostén del razonamiento abstracto. Podemos citar nuevamente a Coriat: "*Por medio de los grafos se facilita el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje, no porque estas se describan necesariamente mediante grafos, sino porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos*".

# 2. GRAFOS Y SU POTENCIAL EDUCATIVO.

Puede establecerse, a modo de síntesis, que existen distintos argumentos para pensar que sería positivo introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los programas escolares. En el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997) se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en distintas áreas.

- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.

- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.

- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada porque les da la posibilidad de un nuevo comienzo.

En el mismo sentido podemos citar el prólogo del libro Introductory Graph Theory de G. Chartrand (1985), el que se transcribe a continuación: "Escribí este libro con varios objetivos: enseñar al lector algunos de los temas vigorosos y excitantes del campo de la teoría de grafos, mostrar que los grafos son aplicables en una gran variedad de campos, dentro y fuera de la matemática, incrementar los conocimientos de los estudiantes y facilitar las demostraciones o pruebas matemáticas y por último no por ser lo menos importante para que disfruten con la matemática".

## 2.1. PROBLEMA A TRABAJAR: "OPTIMIZANDO EL RIEGO AL MENOR COSTO POSIBLE".

Se presentará un grafo de 21 vértices valuado, un vértice es una toma de agua, los otros 20 son chacras, las aristas son canales de riego y los valores de las mismas indican la distancia en kilómetros de los canales. debido a que los mismos son de tierra es mucha la pérdida de agua hacia las napas y existen algas (las algas se crían en la tierra) que frenan la circulación. estas cuestiones hacen que sea mucha la pérdida de agua y no permiten que se realice un riego adecuado, por lo tanto el consorcio de riego evalúa la posibilidad de cementar algunos de manera tal que el agua llegue a todas las chacras mediante canales

cementados. como el costo de cimentación es muy alto y no se pueden realizar nuevos canales, se necesita determinar cuáles son los que deben ser cementados para que el costo sea mínimo.

## 2.2. CONTENIDOS A DESARROLLAR.

A partir del problema anterior se busca que los asistentes trabajen de manera tal que descubran la "razón de ser" del contenido que se busca enseñar. Los contenidos que se trabajarían serían, como mínimo, los siguientes:

- Árbol: Son grafos conexos que no tienen ciclos. En los árboles de *n* vértices hay siempre un número igual a (*n*-1) aristas. El concepto de árbol surgió en estudios sobre redes eléctricas y también en otros referidos a química, esto fue aproximadamente 100 años después de la aparición del primer escrito de Euler sobre esta temática, el conocido problema denominado "*Los puentes de Königsberg*". En la actualidad el tema árbol tiene muchas aplicaciones, entre otras, en algoritmos para computación.
- Árbol cubriente de *G*: Es un árbol que contiene a todos los vértices del grafo
- Árbol minimal cubriente de *G*: Es el árbol de menor valor que contiene a todos los vértices del grafo *G*.
- Árbol maximal cubriente de *G*: Es el árbol de mayor valor que contiene a todos los vértices del grafo *G.*
- Distintos algoritmos para hallar árboles, árboles minimales cubrientes yárboles maximales cubrientes, por ejemplo de Kruskal, Sollin y Prim.

## 2.3. METODOLOGÍA.

El propósito de esta propuesta es presentar actividades que pueden ser llevadas al aula por el docente, por supuesto con la dificultad acorde al nivel en que dicta sus clases.

No se darán las definiciones de grafos ni de los conceptos mencionados en el apartado anterior y se les entregará el problema, se dejará que ellos vayan buscando cuáles son los canales que deben ser cementados para lograr el objetivo planteado. En el proceso de buscarlo llegarán a una serie de conclusiones que les permitirá apropiarse de los conceptos que se quieren presentar, se les propondrá que ellos mismos expliciten la forma en que hallaron los árboles y le den formalidad a sus propios algoritmos.

Se les pedirá que presenten situaciones o formulen problemas que puedan ser resueltas utilizando el concepto de árboles.

Por último se les presentarán algunas experiencias realizadas con estudiantes de los últimos años de la escuela primaria y de los primeros de la escuela media referidas a esta temática.

Es importante mencionar que como el tiempo de desarrollo del taller no es demasiado extenso, la idea es generar en los asistentes la inquietud de investigar y estudiar el tema, por lo que se prepararon actividades que los motiven a continuar en esa dirección.

# 3. REFLEXION FINAL.

Como docentes debemos siempre estar atentos a la posibilidad de realizar innovaciones en las currículas, por supuesto con el sustento y justificación adecuados, es decir enseñar a nuestros alumnos otros temas, mostrarles una matemática distinta, concluyo citando a Paenza (2007, pág. 21), quién dice:

> *"La mayoría de la gente piensa (con razón, porque ésos son los elementos con los que cuenta) que la matemática "está toda inventada" o que es algo "cuadrado" que uno va, estudia, y no aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas)". Sin embargo, no sólo no es así, sino que la matemática anda por la vida como la mayoría de las ciencias: sabiendo algunas cosas (pocas)e ignorando otras (muchas)…. Se trata de una historia que quiero empezar así: "Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aún aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a los que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía hace ya cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan aburridas e inexplicables. Peor aún: de difícil aplicación"…Todo un detalle de lo que se trabaja en la actualidad….y en los últimos 2 ó 3 siglos…. ¿Quién dijo que se sabía "todo"? el solo hecho de que "aceptemos" esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la "matemática real", la que investiga porque no sabe, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que mostrar, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar."*

# REFERENCIAS.

AUSUBEL, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, México.

BRAICOVICH, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

BRAICOVICH, T.; CARO, P; CERDA, V.; OSIO, E.; OROPEZA, M.; REYES, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos.* Editorial Educo. Neuquén.

CORIAT, M. (2004) Algunos usos escolares de los grafos. UNO. *Revista de Didáctica de la Matemática* 36, 8-21. Universidad Complutense de Madrid.

CHARTRAND, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.

CHIAPPA, R. (1989). Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 4(1), 37-44. Universidad Nacional de Córdoba.

GUZMAN, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.

MENÉNDEZ VELÁZQUEZ, A. (1998). Una breve introducción a la Teoría de Grafos. *SUMA*: *Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* 28, 11-26.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

PAENZA, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 3". Siglo XXI. Editores Argentina. Buenos Aires.

PAENZA, A. (2008). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 100". Siglo XXI. Editores Argentina Buenos Aires.

ROSENTEIN, J., FRANZBLAU, D., ROBERTS, F. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

WILSON, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman, New York.

# PIENSA UN NÚMERO

**Muñoz Santonja, José**,
*I.E.S. Macarena, Sevilla*
**Fernández-Aliseda Redondo, Antonio**,
*I.E.S. El Majuelo, Gines (Sevilla)*
**Hans Martín, Juan Antonio**,
*C.D.P. Sta. Mª de los Reyes, Torreblanca (Sevilla)*

## RESUMEN.

La magia tiene una gran relación con las matemáticas, pues en el trasfondo de muchos trucos subyacen las matemáticas para hacerlos funcionar.

Por otro lado, existen en el currículum de nuestra asignatura muchos conceptos en el bloque de Aritmética y Álgebra que son difíciles de ver en un contexto real o de presentar de una forma que no sea repetitiva y poco atractiva. Y la magia puede ayudarnos a motivar el trabajo con esos conceptos.

En el taller presentaremos una serie de trucos matemágicos y estudiaremos las herramientas matemáticas en las que se apoyan.

**Nivel educativo**: Primaria y Secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

La magia es un mundo tremendamente atractivo y motivador. A todos nos gusta que nos asombren y, tras ver un truco que nos haya gustado, enseguida deseamos saber cómo se ha producido para repetirlo y asombrar a nuestros familiares y amigos. Por eso creemos que es una poderosa herramienta para utilizarla en nuestras clases de matemáticas.

Existen muchos trucos de magia que siempre funcionan, independientemente de quien los realice, porque tienen un fundamento matemático de forma que si el truco está bien realizado siempre sale bien; es decir, no depende de la habilidad del mago para engañar o esconder elementos que se utilicen en la magia.

Seguro que a todos nos han hecho algún truco de magia que comienza con la frase "Piensa un número…" y tras una serie de operaciones, que solo sirven para enmascarar el resultado, el mago lo descubre para nuestro asombro. Sin embargo existen muchos otros trucos de magia que se basan en fundamentos matemáticos, como sistemas de numeración, divisibilidad, operaciones como potencias, etc.

Aunque existen trucos de magia basados en geometría o en topología, nosotros vamos a trabajar aquí sólo trucos basados en números, aunque su fundamento matemático muchas veces nos llevará a adentrarnos en terrenos algebraicos.

Vamos a presentar en estas líneas sólo algunas ideas (ya que no caben más) sobre lo que se desarrolla en el taller que presentamos. De todos modos en la bibliografía aparecen muchas referencias en las que se pueden encontrar muchos otros trucos en la misma línea con su fundamento matemático.

# 2. DIVISIBILIDAD.

Un grupo numeroso de trucos de magia matemática se basa en la divisibilidad, especialmente en trabajar con números múltiplos de 9. Vamos a presentar dos trucos, uno numérico y otro con cartas, pues aunque no tenemos intención de trabajar con cartas, si pensamos que es una de las partes más atractivas y veremos que en este caso tiene el mismo fundamento en múltiplos de 9.

## 2.1. EL NÚMERO DE CUATRO CIFRAS.

El espectador debe elegir un número de cuatro cifras con la única condición de que las cuatro cifras no pueden ser la misma. A continuación escribe otro número de cuatro cifras utilizando las mismas que en el número anterior, es decir, debe realizar una permutación de las cifras que formaban el número inicial. Después se resta al mayor de los dos números el menor y del resultado tacha una cifra que no sea un cero. Tras decirle, en el orden que quiera, las cifras que han quedado sin tachar, el mago adivina rápidamente la cifra tachada.

El fundamento matemático es muy claro. Si restamos dos números formados por las mismas cifras en distinto orden, el resultado es siempre múltiplo de 9. Vamos a ver su explicación.

Si tomamos un número de cuatro cifras cualesquiera su expresión polinómica en base diez será $abcd = a\cdot1000 + b\cdot100 + c\cdot10 + d = a\cdot10^3 + b\cdot10^2 + c\cdot10^1 + d\cdot10^0$.

Si ahora hacemos cualquier otra distribución y restamos, cada número está multiplicado por dos potencias de 10, por lo que cada cifra estará multiplicada por $10^n - 10^p$, suponemos que $n>p$ ya que si son iguales, la diferencia es cero y la cifra desaparece. Si fuese $n<p$ lo único que ocurre es que el factor que multiplica a la cifra es negativo pero eso no afecta para que sea múltiplo de 9.

Si sacamos factor común $10^n - 10^p = (10^{n-p} - 1)\cdot10^p = 999\ldots9\cdot10^p$.

Es decir, cada cifra del número original irá multiplicada por una serie de 9, en concreto n-p nueves, seguidos de p ceros. Como esto ocurre para todas las cifras del número original, el resultado siempre es múltiplo de nueve.

## 2.2. EL XIV CONGRESO.

Se entrega al espectador una baraja francesa o una española con 48 cartas (incluyendo ochos y nueves). Se le indica que siga los siguientes pasos:

- Divida la baraja en dos montones aproximadamente iguales.
- Tome uno de los montones y cuente cuántas cartas tiene.
- Sume las cifras del número de cartas que tiene el montón. Por ejemplo, si había 15 cartas suma 1+5 = 6.
- Retire del montón elegido tantas cartas como resulte de la suma y las coloque boca abajo sobre el otro montón.
- Elija una carta cualquiera del montón que tiene en la mano, y tras mirarla, para recordarla después, la sitúe boca abajo sobre el montón de la mesa.
- Por último deja el montón, que aún tiene sobre la mano, sobre el montón de la mesa. Siempre boca abajo. Vuelve a quedar la baraja completa.
- A continuación se entrega la baraja a otro espectador y se le pide que deletree la frase "XIV Congreso Thales". Mientras deletrea debe ir colocando, por cada letra, una carta del montón sobre la mesa y boca abajo.

- Al acabar se pregunta al primer espectador cuál era la carta que había visto y se pide al espectador que tiene la baraja que descubra la primera carta que tiene en el mazo que aún sostiene en la mano. Esa carta es la elegida por el otro espectador.

El fundamento matemático también es parte de la divisibilidad. Como estamos trabajando con 48 ó 52 cartas, cada montón tendrá alrededor de 24 ó 26 cartas, en general siempre será un número entre 20 y 29. Si a cualquier número de ese intervalo le restamos la suma de sus cifras el resultado siempre es 18. Por lo tanto, una vez que se recomponga el mazo, la carta que se ha visto siempre queda situada en el puesto 18 desde el principio del mazo. Basta por lo tanto deletrear una frase con 17 ó 18 letras para que la carta buscada sea la primera que queda en el mazo o la última que se ha lanzado sobre la mesa.

# 3. SISTEMA DE NUMERACIÓN.

Existen multitud de juegos de adivinación de números utilizando tarjetas. Prácticamente en todos ellos el fundamento matemático está en la colocación de los números en las tarjetas y se suele basar en los sistemas de numeración.

Las más conocidas, que incluso es fácil encontrar como publicidad de algunos productos o empresas, se basan en el sistema de numeración binario y basta pasar los números a base binaria y colocar el número en la tarjeta correspondiente si la cifra es 1 y no colocarla si la cifra es cero. Basada en la misma idea se puede trabajar con sistemas de numeración de base otros números con el inconveniente de que ya no nos basta sólo el ponerlo o no, si no que debemos utilizar colores para indicar el resto que corresponde en cada momento.

Como en la bibliografía es fácil encontrar tarjetas basadas en el sistema de numeración de base dos y de base tres. Vamos a empezar colocando unas tarjetas basadas en el sistema de numeración de base cuatro.

## 3.1. LAS CARTAS TERNARIAS.

Se solicita al espectador que piense un número del 1 al 63 y que nos indique en cual de las siguientes tarjetas está y en qué color. Haciendo un pequeño cálculo el mago adivina el número pensado.

TARJETA 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | 57 |
| 2 | 10 | 18 | 26 | 34 | 42 | 50 | 58 |
| 3 | 11 | 19 | 27 | 35 | 43 | 51 | 59 |
| 5 | 13 | 21 | 29 | 37 | 45 | 53 | 61 |
| 6 | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | 54 | 62 |
| 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 |

TARJETA 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 |
| 44 | 45 | 46 | 47 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 |

TARJETA 3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 |

Figura 1. Tarjetas ternarias.

Las tarjetas están codificadas según el sistema de numeración de base 4. La primera corresponde a $4^0$, la segunda a $4^1$ y la tercera a $4^2$. Una vez que nos digan en qué tarjetas están basta multiplicar esas potencias por el código que

corresponde al color. Si está en negro el código es 1, si está en rojo es 2 y si está en verde es 3.

Por ejemplo, para un número que esté en la primera tarjeta en rojo (2), en la segunda en negro (1) y en la tercera en verde (3), basta hacer la operación $2\cdot4^0 + 1\cdot4^1 + 3\cdot4^2 = 2 + 4 + 48 = 54$.

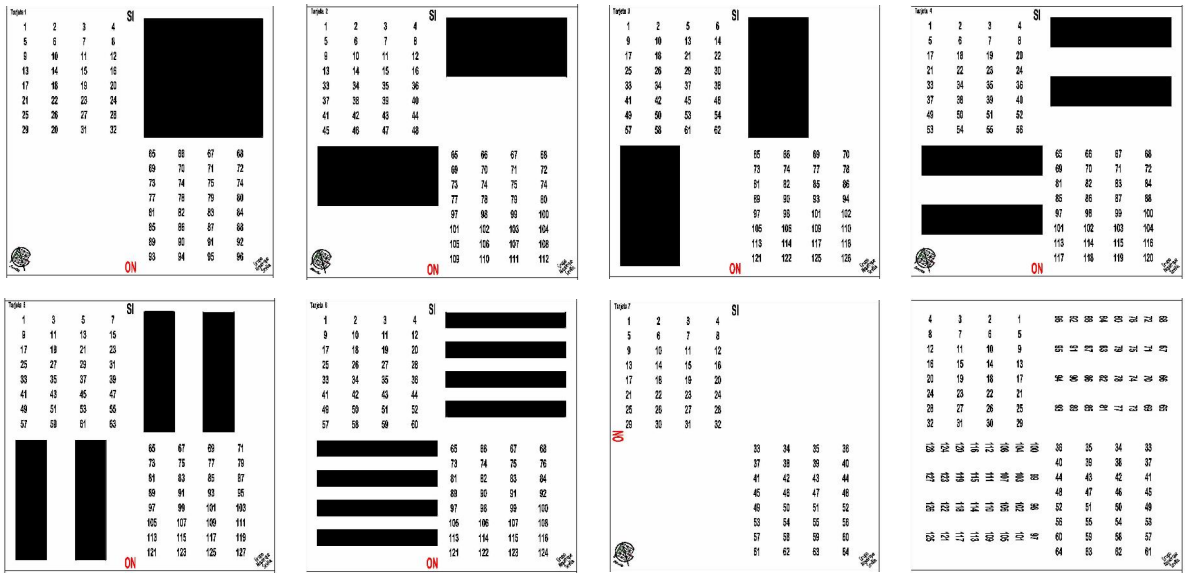
### 3.2. LAS TARJETAS CON VENTANAS.

Se entrega al espectador un juego de siete tarjetas en las que aparecen una serie de números y unos huecos. El espectador debe pensar un número entre el 1 y el 128 e indicar en cada una de las tarjetas si el número está o no.

Cada tarjeta disponer de la palabra SÍ y NO y se coloca la tarjeta de forma que en la parte superior aparezca la palabra que corresponda. Es decir, si aparece el número se coloca con el extremo superior en SÍ y en caso contrario en NO.

Una vez colocadas las siete tarjetas basta darle la vuelta al conjunto y por la parte trasera se verá cuál es el número elegido.

Las tarjetas son las siguientes:



Como se puede apreciar por la distribución de los huecos, con cada tarjeta se divide por dos la cantidad de números que se hubiesen elegido anteriormente, quedando al final solo dos opciones que las elije la última tarjeta.

## 4. MÁS OPERACIONES.

Aparte de los anteriores existen otros muchos trucos basados en números. Veamos un par de ellos.

### 4.1. HALLAR LA RAÍZ QUINTA.

El mago entrega a un espectador una calculadora y le pide que piense un número de dos cifras y halle su potencia quinta con la calculadora. Tras decir el resultado el mago descubre cuál es el número elegido.

El truco se basa en las potencias quintas de las cifras. Si elegimos un número de dos cifras, la cifra de las unidades tendrá las siguientes potencias:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0^5 = 0$ | $1^5 = 1$ | $2^5 = 32$ | $3^5 = 243$ | $4^5 = 1024$ |
| $5^5 = 3125$ | $6^5 = 7776$ | $7^5 = 16807$ | $8^5 = 32768$ | $9^5 = 59049$ |

Como se puede apreciar, la potencia quinta de un número de dos cifras siempre acabará en la misma cifra, por lo que la última cifra del número que nos indique el espectador siempre coincide con la cifra de las unidades del número original.

Para hallar el otro número basta separar las cinco primeras cifras y con lo que nos quedemos ver entre qué dos potencias quintas se encuentra. Por ejemplo, el número 69343957 sabemos que es la potencia de un número que acaba en 7. Si le quitamos las cinco últimas cifras queda 693 que es un número comprendido entre $3^5 = 243$ y $4^5 = 1024$, por lo tanto el número que se ha elevado a la quinta es 37.

### 4.2. EL 1089.

Uno de los trucos más utilizados y que mejora bastante con la puesta en escena es el 1089. Se pide a un espectador que siga los siguientes pasos.

- Debe elegir un número de tres cifras que no sea capicúa.
- Cambia la primera y última cifra entre sí. Y tiene dos números.
- Resta del mayor el menor.
- Al resultado vuelve a cambiar entre si primera y última cifra.
- Suma los dos últimos números, el resultado de la resta y de cambiar las cifras en él.
- El número final lo adivina el mago.

El fundamento matemático por el que siempre se obtiene 1089, sea cuál sea el número elegido al principio, podemos verlo a continuación.

Consideremos el número abc (suponemos a>c). Al cambiar las cifras obtenemos cba y al restar obtenemos: $(100a+10b+c) - (100c+10b+a) = 100(a-c) + (c-a)$ como a>c entonces c-a es negativo. Restamos 100 unidades para anular ese número negativo, realizando las siguientes operaciones:

$$100(a-c) + (c-a) = 100(a-c-1) + 100 + (c-a) = 100\,(a-c-1) + 90 + (10+c-a)$$

Así 10+c–a es un número natural comprendido entre 1 y 9.

Se puede apreciar que este número tiene siempre como segunda cifra el 9, y la suma de la primera y la tercera es también siempre 9, pues a–c–1+10+c–a = 9.

Si ahora cambiamos entre sí la primera y la última cifra y sumamos tendremos:

$$[100\,(a-c-1) + 90 + (10+c-a)] + [100\,(10+c-a) + 90 + (a-c-1)] =$$
$$= 100\,(10+c-a+a-c-1) + 180 + (10+c-a+a-c-1) = 900 + 180 + 9 = 1089$$

## REFERENCIAS.

ALEGRÍA, PEDRO y RUÍZ DE ARCAUTE, J.C. (2002): "La matemagia desvelada". *Sigma* 21, 145-174.

http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_21/10_la_matemagia_desvelada.pdf
El profesor Pedro Alegría presenta varios trucos en la sección de "El Rincón Matemágico" de la página de Divulgamat en la dirección siguiente:
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent&section=11&category=63&Itemid=67

ALEGRÍA, PEDRO (2008): *Magia por principios*. Editado por el propio autor.

ÁLVAREZ, VENANCIO, FERNÁNDEZ, PABLO y MÁRQUEZ, M. A. (2002): "Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos". *Gaceta Matemática*
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/magia.pdf

BLASCO, FERNANDO (2007): *Matemagia*. Ediciones Temas de Hoy S.A., Madrid.

BOLT, BRIAN (2001): "La magia de las matemáticas", SUMA, nº 36, 5-15.

GARCIA GUAL, JESÚS (2010): "Juegos basados en sistemas de numeración". Ponencia presentada en el III Seminario para estimular el Talento Precoz en matemáticas. Valencia 2010. Puede consultarse en la dirección:
http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionValencia2010/Juegos-Numeracion.pdf

GARDNER, MARTIN (1992): *Magia inteligente*. Zugarto ediciones, Madrid.

GONZÁLEZ, FRANCISCO (2003): "Matemagia: la magia de las matemáticas". En *Actas de las IV Jornadas de Educación Matemáticas de la Comunidad Valenciana*. 471-476. http://www.ua.es/personal/SEMCV/Actas/IVJornadas/pdf/Part81.PDF

GRUPO ALQUERQUE (2011): Material para el taller "Matemagia" desarrollado durante la IX Feria de la Ciencia. Puede consultarse en la dirección.
http://grupoalquerque.es/ferias/2011/magia.html

MUÑOZ SANTONJA, JOSÉ (2003) *Ernesto el aprendiz de matemago*. Nivola, Madrid.

MUÑOZ SANTONJA, JOSÉ (2007): "Una matemática motivadora: la matemagia". En *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemáticas de la Comunidad Valenciana*
http://thales.cica.es/~estalmat/Actividades-ejemplos/MatemagiaEstalmat.pdf

MUÑOZ SANTONJA, JOSÉ (2010): "Taller de magia y matemática". Documentación para el curso *Matemáticas y competencias básicas*, CPR Oviedo.
http://blog.educastur.es/primaria/files/2010/07/taller-de-magia-y-matematica.pdf

# LA CALCULADORA CIENTÍFICA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

**Encarnación Amaro Parrado**,
*IES Virgen de la Cabeza, Marmolejo (Jaén)*
**Agustín Carrillo de Albornoz Torres**,
*IES Sierra Morena de Andujar (Jaén)*

## ACTIVIDAD 1. ESTADÍSTICA UNIDIMENSINAL

Las notas obtenidas por un grupo de 15 alumnos en una prueba han sido:

2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9 ,10

Construye la tabla de frecuencias absolutas.

Aprovecha la opción STAT que ofrece la calculadora para introducir los datos.

Determina los siguientes valores:

Rango: _____
Moda: _____
Media aritmética: _____
Mediana: _____
Varianza: _____
Desviación típica: _____

De los valores anteriores, indica cuáles has obtenido de manera directa con ayuda de la calculadora:

_____
_____

Para el resto de valores ¿Hay alguno que puedas obtener de manera indirecta realizando alguna operación con la calculadora?

_____
_____

La varianza se calcula a partir de la fórmula $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum x_i^2 . f_i - x^2$. Intenta aprovechar la calculadora para sustituir los valores que puedas en la expresión anterior.

_____
_____

## ACTIVIDAD 2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

Los datos de ingresos de determinadas empresas, en miles de euros y de empleados, en miles, son:

- Empleados 1629176 9
- Ingresos 3422116 6

Completa la tabla siguiente:

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i.y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| Sumas | | | | | |

Estudiar la correlación existente entre ambas variables.

r =

Determinar la recta de regresión de ingresos (Y) sobre empleados(X).

Predecir los ingresos esperados si se dispone de 20 empleados.

A=

B=

y=A+Bx=

x=20 $\Rightarrow$ $\hat{y}$ =

Indica que cálculos has realizado de manera directa con la calculadora.

## ACTIVIDAD 3. RAÍCES ENTERAS DE UN POLINOMIO. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL.

Calcula las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

¿Para qué valores de x debes obtener el valor de P(x)?

Completa la tabla para determinar las raíces enteras del polinomio P(x).

| ***x*** | ***P(x)*** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

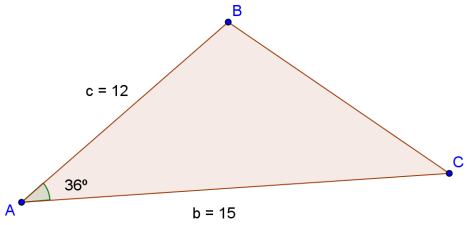
Resuelve la ecuación: $x^2 + x - 12 = 0$

Descompón en factores el polinomio: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Utiliza la calculadora para hallar: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

# ACTIVIDAD 4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Dado el triángulo




Resuelve el triángulo:

a. Aprovechando en cada momento todas las cifras que devuelve la calculadora.

b. Redondeando los valores intermedios a una cifra decimal.

¿Se produce algún error?

Desde un determinado lugar la visual de una torre forma un ángulo de 32º con la horizontal. Si me acerco 15 m. el ángulo es de 50º. ¿Qué altura tiene la torre?
Repite los mismos pasos anteriores, realizando todos los cálculos aprovechando todas las cifras que devuelve la calculadora en cada uno de los pasos intermedio. Anota los resultados obtenidos.
A continuación, repite el proceso redondeando los valores intermedios a una cifra decimal.
¿Consideras que el error producido es importante?

# CÁLCULO SIMBÓLICO Y GRÁFICO CON CALCULADORA

**Agustín Carrillo de Albornoz Torres**,
*IES Sierra Morena, Andujar (Jaén)*
**José Mª. Chacón Iñigo**,
*IES Llanes, Sevilla*
**Encarnación Amaro Parrado**,
*IES Virgen de la Cabeza, Marmolejo (Jaén)*

Este taller se realiza con la colaboración de

CASIO
FLAMAGAS

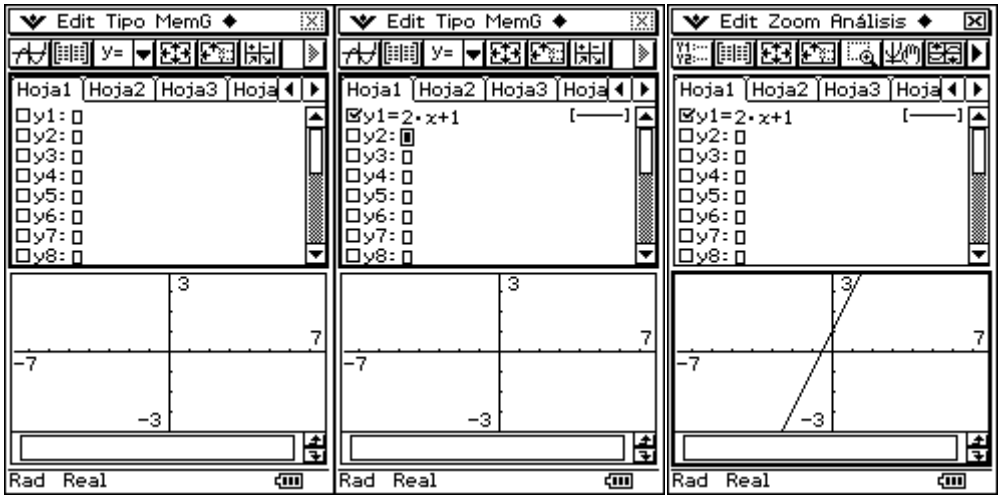
## LA FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal está expresada en la forma **y = a x + b**.

Es esta actividad estudiarás los cambios que producen los valores **a** y **b** en su representación gráfica.

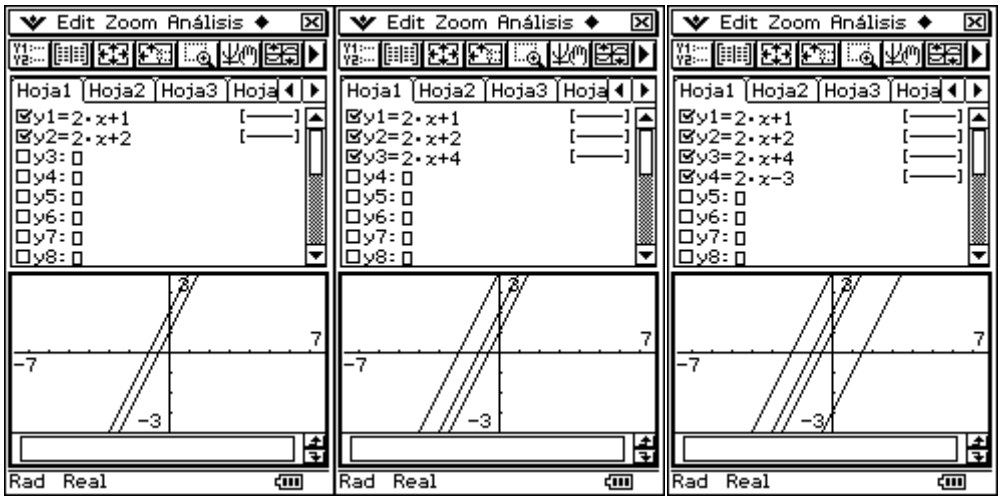
### ACTIVIDAD 1

Comienza la actividad dibujando una función lineal, por ejemplo y = 2x+1.



Dibuja otras funciones lineales:

y = 2x+2  y = 2x+4  y= 2x – 3




Contesta las siguientes cuestiones:

a. ¿Cómo son las distintas rectas que has obtenido?

b. ¿Qué cambio se produce en la representación al variar el valor del coeficiente **b**?

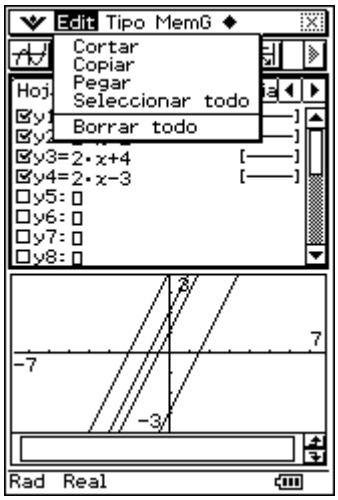
c. Observa el punto en el que cada una de las rectas corta al eje de ordenadas (Y). ¿Existe alguna relación con el valor de **b**?

d. El valor b recibe el nombre de _____.

e. Podrías decir, sin representarla, las características de la función y = 2x – 1.

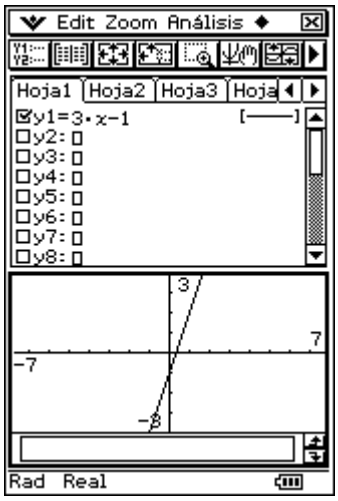
Ahora estudiarás que cambios produce en una función lineal el valor **a**.

Borra las funciones anteriores utilizando **Borrar todo**.



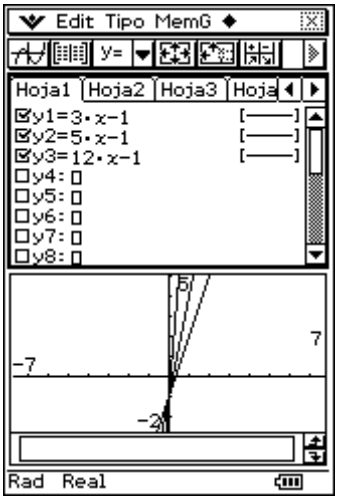
## ACTIVIDAD 2

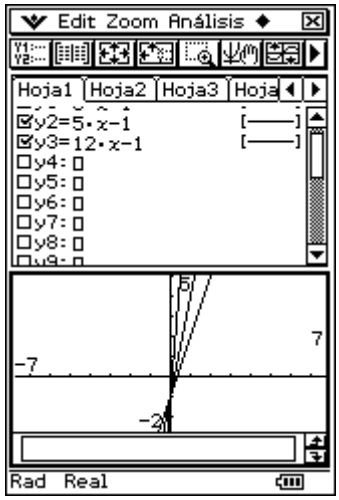
Dibuja la función y = 3x-1.




Ahora dibuja las siguientes funciones:

y = 5 x – 1  y = 12x – 1




Responde a las cuestiones siguientes:

a. Indica qué observas en las distintas rectas que has obtenido.

b. ¿Hay alguna característica común a todas las rectas dibujadas?

c. Expresa cómo afecta el valor de **a** la representación gráfica de la función lineal.

## ACTIVIDAD 3

Representa la función y = x – 1 e intenta determinar cual será la representación de las funciones y = 2x – 1 e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

¿Qué ocurre cuando el valor de a aumenta o disminuye?

Hay alguna relación entre los valores que toma a para determinar cómo será la representación gráfica.

A continuación, deja la primera función y = 3x – 1 y dibuja las dos funciones lineales siguientes:

y = -3x – 1  y = -x – 1

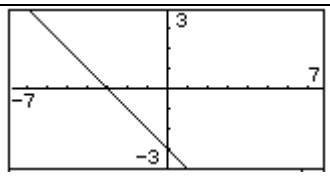
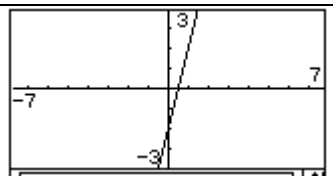
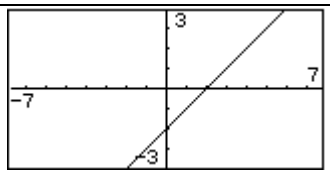
¿Qué observas?

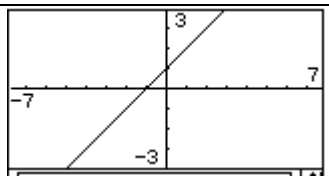
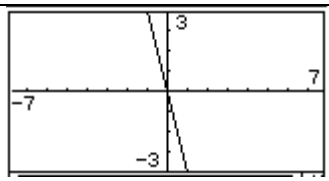
¿Qué cambios produce en la gráfica que **a** sea positivo o negativo?

A partir de las gráficas anteriores entenderás la razón por la que a recibe el nombre de pendiente de la recta.

## ACTIVIDAD 4

Relaciona las expresiones de las funciones lineales con su correspondiente representación gráfica.

| | | |
|---|---|---|
| y = x - 2 | |  |
| y = - 4x | |  |
| y = - x - 3 | |  |

| | | |
|---|---|---|
| y = x + 1 | |   |
| y = 4x - 2 | |   |

**ACTIVIDAD 5**

Responde las cuestiones siguientes:

a. ¿En que punto cortará la recta y = 5 x – 6 al eje Y?

b. De las rectas y = 4x – 3 e y = x +2, ¿Cuál está más inclinada?

c. ¿Qué rectas son paralelas a y = 5x +2?

y = x + 2 y = 5x  y = - 5x + 2  y = 5x + 4

**ACTIVIDAD 6**

a. Escribe la expresión de una recta que pase por el punto (0, -5).

b. Escribe la ecuación de una recta que sea paralela a y = - x que pase por el punto (0, 1).

# FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

- **Factorización de un polinomio**

**ACTIVIDAD 1.**

Descompón en factores los polinomios

$P(x) = x^2 - 6x + 5$  $P(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

$P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

$P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$

Anota el número de factores que has obtenido y determina alguna relación entre ese valor y el grado del polinomio.

**ACTIVIDAD 2.**

Resuelve las ecuaciones siguientes:

$x^2 - 6x + 5 = 0$ $\quad -x^4 + 2x^2 + 3 = 0$

$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Aprovechado las opciones que ofrece la calculadora para resolver ecuaciones (comando **Solve**), resuelve las dos ecuaciones siguientes:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0$

En la actividad 1 has obtenido los factores de un polinomio y en esta actividad has resuelto una ecuación polinómica para obtener las soluciones, ¿hay alguna relación entre ambos procesos?

Contesta las cuestiones siguientes:

2.a. Si x=2 es una solución de la ecuación P(x)=0, cómo podemos expresar el polinomio P(x).

2.b. Si -1, -3 y 2 son las soluciones de la ecuación P(x)=0, ¿Puedes obtener la expresión del polinomio P(x)?

2.c. Indica si la expresión del polinomio P(x) del apartado anterior es única y en qué condiciones sería única.

**ACTIVIDAD 3.**

Representa las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ $\quad f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ $\quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$

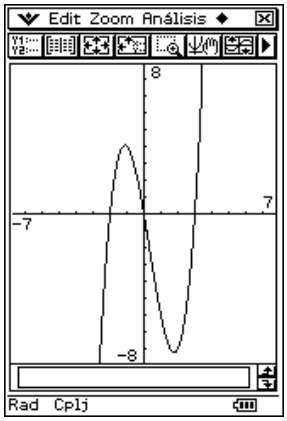
¿Qué observas?

Hay alguna relación entre los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y los valores obtenidos en el ejercicio anterior.

Indica la relación entre corte con los ejes de una función polinómica, solución o raíz de una ecuación polinómica y factor de un polinomio.

**ACTIVIDAD 4.**

En la gráfica siguiente está representada una función polinómica de grado 3.




Determina su expresión.

**ACTIVIDAD 5.**

Como sabes, para descomponer en factores un polinomio se utiliza la regla de Ruffini en la que el para obtener el primer factor hay que probar con los divisores del término independiente, pero si ves la gráfica de una función polinómica en una calculadora ¿podrías determinar cual es el primer valor que tienes que utilizar para comenzar a desarrollar Ruffini?

# RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

- **Resolución de ecuaciones lineales.**
- **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.**

**ACTIVIDAD 1.**

Resuelve las ecuaciones $6x-2=1$ $6x=3$

¿Cómo son las dos ecuaciones anteriores?

**ACTIVIDAD 2.**

Representa las funciones $f(x)=6x-2$ y $g(x)=1$.

¿Qué observas?

**ACTIVIDAD 3.**

Resuelve la ecuación $3(3x-5)-x=2x-3$.

¿Qué proceso seguirías para encontrar la solución de la ecuación anterior utilizando un proceso similar al expuesto en la actividad 2?

**ACTIVIDAD 4.**

Utilizando un método gráfico indica las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a. $2(3x-1)=6x-4$.  b. $-3(x-2)=6-3x$

**ACTIVIDAD 5.**

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l}3x+y=-1\\2x-y=-4\end{array}\right\}$.

Representa las funciones anteriores para obtener de manera gráfica la solución del sistema de ecuaciones.

**ACTIVIDAD 6.**

Resuelve de manera gráfica los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}2x-y=3\\-4x+2y=1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}3x+y=2\\6x+2y=4\end{array}\right\}.$$

¿Qué deduces de los resultados anteriores?

**ACTIVIDAD 7.**

Completa el sistema de ecuaciones para que se cumpla la condición indicada y comprueba los resultados utilizando las opciones gráficas que ofrece la calculadora.

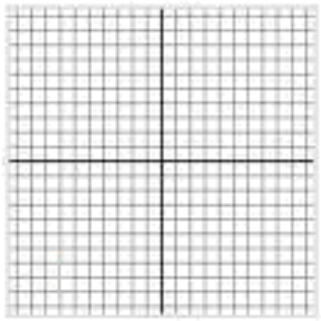
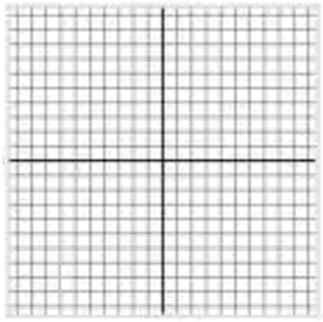
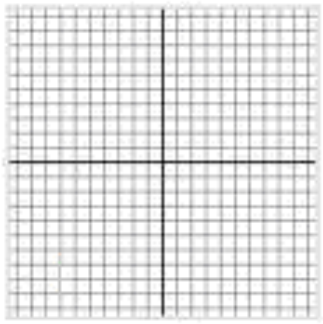
$\left.\begin{array}{l}4x-3y=1\\\_\_x+\_\_y=\_\_\end{array}\right\}$ El sistema tiene solución única

$\left.\begin{array}{l}\_\_x+\_\_y=\_\_\\x-y=0\end{array}\right\}$ El sistema tiene infinitas soluciones

$\left.\begin{array}{l}\_\_x+\_\_y=\_\_\\\_\_x+\_\_y=\_\_\end{array}\right\}$ El sistema no tiene solución.

**ACTIVIDAD 8.**

Relaciona el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con la posición de las rectas que representa a cada una de las ecuaciones del sistema.

| | |
|---|---|
| El sistema tiene solución única |  |
| El sistema tiene infinitas soluciones |  |
| El sistema no tiene solución. |  |

# CÁLCULO DE LÍMITES

- **Límite de una función en un punto**

**ACTIVIDAD 1.**

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1}$.

Representa la función.

Vamos a estudiar la función en un entorno del punto **x = 2**.

Construye una tabla de valores en el entorno de **x =2**.

Puedes determinar cuál es el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Repite los procesos anteriores para x =1.

¿Qué ocurre con $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Intenta aproximar la tabla de valores a **x = 1** por la izquierda y por la derecha.

¿Podemos decir que existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$? ¿Cuál es su valor?

Intenta calcular el valor de ***f(1)***. ¿Qué conclusiones puedes deducir de los resultados anteriores?

**ACTIVIDAD 2.**

Sea la función $f(x)=\begin{cases}2x+3 & x<2\\ -x^2 & x\geq 2\end{cases}$.

Representa la función.

Observando la representación ¿puedes determinar si existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

Construye la tabla de valores para un entorno de **x = 2**.

Determina los valores de los límites laterales en **x = 2** utilizando la tabla de valores, comprobando después a través de la opción correspondiente en el menú principal.

**ACTIVIDAD 3.**

Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3-3x-2}$.

Representa la función.

Calcula los siguientes límites intentando aproximar el valor a partir de la gráfica y después comprobando con las opciones correspondientes disponibles en la calculadora.

$$\lim_{x\to -1} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

Dibuja las rectas x = -1 y x = 2.

¿Qué relación existe entre f(x) y las rectas anteriores?

Repite los procesos anteriores para los siguientes límites:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Dibuja la rectas y = valor que has obtenido en el límite anterior.

¿Qué relación existe entre f(x) y esta nueva recta?

# FUNCIONES Y DERIVADAS

- **Representación de funciones. Calculo de derivadas.**

### ACTIVIDAD 1.

Representa y estudia la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 2$.

### ACTIVIDAD 2.

Calcula $f'(x)$.

Representa la función $f'(x)$.

Determina si existe alguna relación entre los extremos de la función $f(x)$ y algunos puntos de $f'(x)$.

### ACTIVIDAD 3.

Calcula $f''(x)$

Representa la función $f''(x)$

Determina si existe alguna relación entre los extremos de la función $f(x)$ y algunos puntos de $f''(x)$.

¿Existe alguna relación entre puntos notables de $f'(x)$ y de $f''(x)$?

### ACTIVIDAD 4.

Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1,\ 2.$

Determina el valor de la pendiente de cada una de las rectas anteriores.

Relaciona el valor de la pendiente con el tipo de punto de la función.

### ACTIVIDAD 5.

De una función polinómica de segundo grado se tienen los siguientes datos:

- Tiene un máximo absoluto en $x = -2$.
- Pasa por el punto $(1,1)$.

- Tiene una raíz en $x = 2$.

Determina la expresión de dicha función. Represéntala y comprueba que cumple las condiciones anteriores.

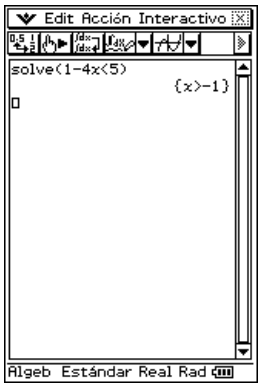
# RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

- **Inecuaciones lineales con una incógnita.**
- **Sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita.**
- **Inecuaciones no lineales con una incógnita.**
- **Inecuaciones lineales con dos incógnitas.**
- **Sistemas lineales de inecuaciones con dos incógnitas**

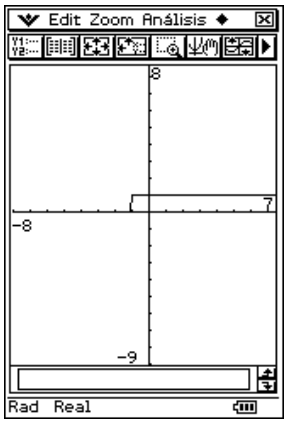
## ACTIVIDAD 1.

Resuelve la inecuación $1 - 4x < 5$.

La calculadora resuelve directamente la inecuación tal como lo haría un alumno con los métodos algebraicos que ya conoce:




Incluso podríamos "dibujar" la solución tal como lo hacemos en clase; para ello basta arrastrar la inecuación a la ventana gráfica:

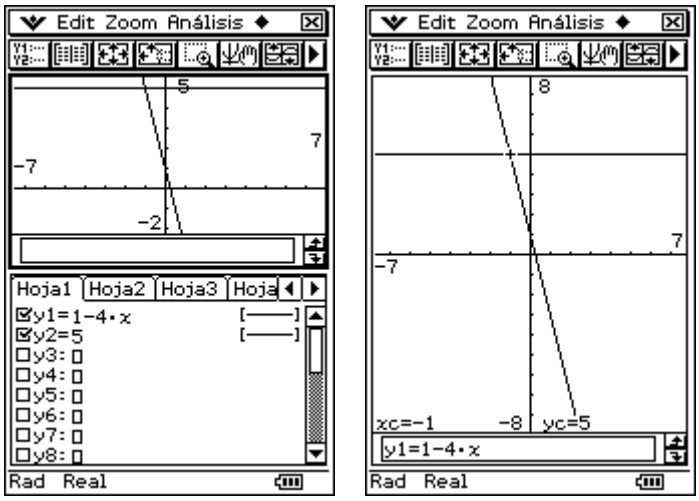


Pero, ¿cómo se puede interpretar la inecuación y la solución? La capacidad gráfica de la calculadora nos ayudará.

En primer lugar, consideremos ambos miembros de la desigualdad como dos funciones que llamaremos y1 e y2 por similitud a la sintaxis de la calculadora:

$$y1 = 1 - 4x\ ,\ \ y2 = 5$$

y las representamos:




Ahora podemos explicar al alumnado que a partir de $x = -1$ la gráfica de y1 está por encima de la gráfica y2.

Este método tan sencillo es el que se debe seguir prácticamente para todas las inecuaciones, permitiéndonos incluso dar soluciones o aproximaciones de ellas, de inecuaciones mucho más complicadas.

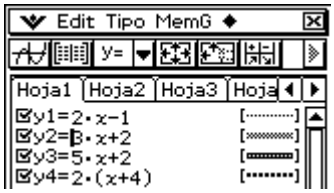
**ACTIVIDAD 2.**

Resuelve la siguiente inecuación e interpreta el resultado: $2(x-2)+3x < 5x+6$

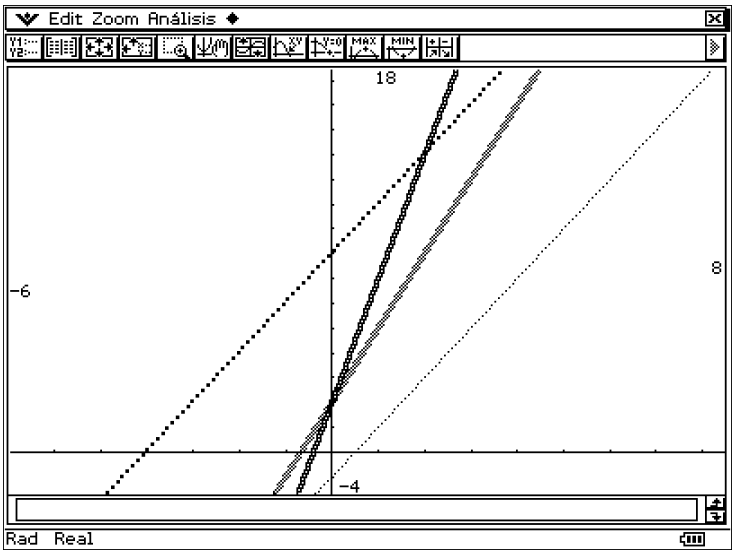
**ACTIVIDAD 3.**

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x-1 < 3x+2 \\ 5x+2 > 2(x+4) \end{cases}$

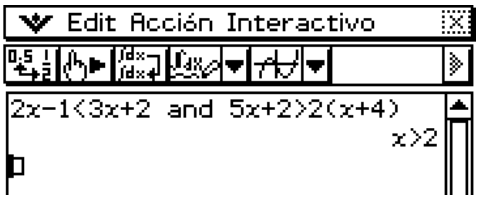
Siguiendo lo anterior:




Obsérvese los diferentes trazos para distinguir las funciones:




Ahora podemos ver que a partir de x=2 se cumplen las dos condiciones, y no ha sido necesario ningún método. Aún así, podemos comprobarlo:



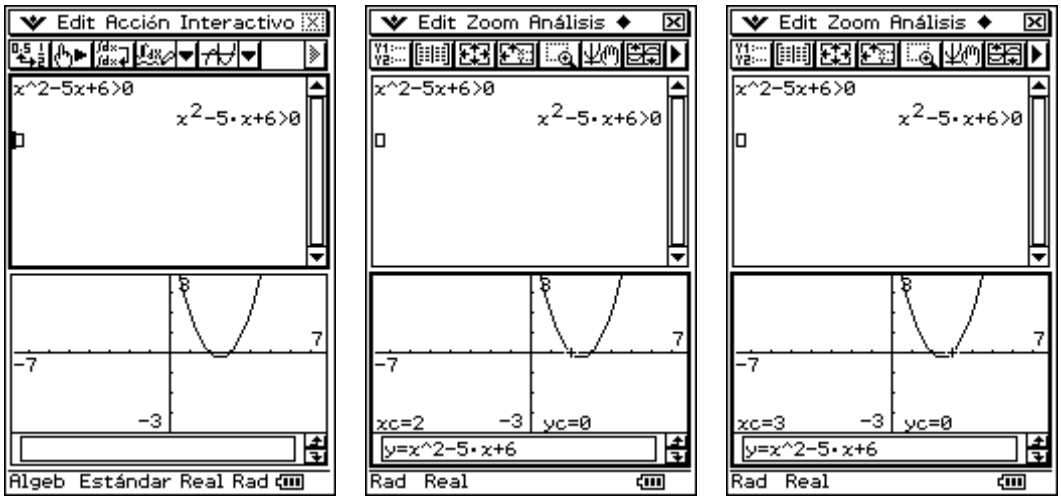

**ACTIVIDAD 4.**

Resuelve el sistema e interpreta el resultado: $\begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \\ 2(x-1) > 5 \end{cases}$

**ACTIVIDAD 5.**

Resuelve la inecuación $x^2 - 5x + 6 > 0$

Se podría resolver como un sistema, factorizando previamente, pero con la calculadora es inmediato:




Se puede observar que para x<2 y x>3 se cumple la inecuación.

**ACTIVIDAD 6.**

Resuelve e interpreta la inecuación: $x^2 + 6x + 9 > 0$

**ACTIVIDAD 7.**

Resuelve la inecuación $3x - y < 2$

**ACTIVIDAD 8.**

La suma de las edades de dos hermanos es menor que 8, y su diferencia es mayor que 4. ¿Cuáles son sus edades si ambos ya han cumplido un año?

**ACTIVIDAD 9.**

Una contraseña de seguridad consiste en un número de dos cifras tal que su suma es menor que 10 y una de las cifras es mayor que el triple de la otra. Halla una de las posibles soluciones.

# MODELOS Y PROBLEMAS CON LA CLASSPAD 330

**Mauricio Contreras del Rincón**,
*I.E.S. Benicalap, Valencia (Valencia)*

## RESUMEN.

En este taller se utiliza la tecnología CAS de la ClassPad 330, para construir modelos de situaciones reales, plantear y resolver problemas, mostrando que hay maneras de ver los conceptos e ideas matemáticas y conexiones entre campos conceptuales diferentes que no se aprecian si no se dispone de tecnología gráfica o CAS. El taller se divide en dos partes: a) resolución de problemas y b) diseño de modelos, centrándose en el cambio de metodología que supone el uso de la ClassPad 330 en la clase de matemáticas.

**Nivel educativo**: ESO y Bachillerato.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En todos los países europeos se tiende actualmente a utilizar cada vez más tecnología para la resolución de problemas, y, en particular, calculadoras gráficas y CAS sin ningún tipo de restricción.

En este taller se apuesta por la tecnología CAS de la ClassPad 330, porque ésta facilita mucho el diseño de modelos. La construcción de modelos es compleja, ya que requiere trabajar en tres niveles diferentes: por una parte, la comprensión de la situación real y del problema asociado, por otra parte, la selección de un modelo matemático adecuado para afrontar el problema y, finalmente, cómo usar la tecnología CAS para el proceso de resolución. Posteriormente hay que retornar al problema original, es decir, comprobar si las soluciones obtenidas con la calculadora tienen o no sentido en el modelo matemático y en el contexto real, y analizar cómo afectarían a la situación los cambios en el modelo. Todo este proceso requiere de continuas reflexiones y conexiones entre distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas.

En los ejemplos que se muestran en el taller se observa que la calculadora ClassPad 330 facilita el proceso anterior, favoreciendo el desarrollo de las competencias matemáticas (plantear y resolver problemas, modelar, razonar, argumentar, comunicar, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones).

## 2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

En el ejemplo que sigue se muestran algunas de las ventajas que ofrece el uso de la ClassPad para plantear y resolver problemas. En el taller se desarrollan también otros problemas (El satélite, El balón de fútbol, Resíduos, Especie protegida, Pescando en un estanque).

## 2.1. HORAS DE SOL.

El tiempo que transcurre entre la salida y ocultación del Sol, en el día que ocupa el lugar n del año, está dado, en horas, aproximadamente, por:

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi \cdot (n - 81)}{183}, \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots, 366\}$$

(el argumento de la función seno está expresado en radianes)

Por ejemplo, en el dia 3 de febrero, trigésimo cuarto día del año, el tiempo que transcurre entre la salida y ocultación del Sol fue de f (34) ≈ 10,3 horas.

1) En el día 24 de Marzo, el Sol salió a las seis y media de la mañana. ¿En qué instante se ocultó el Sol ese día? Presenta el resultado en horas y minutos (los minutos redondeados a las unidades).

2) En algunos días del año, el tiempo que transcurre entre el nacimiento y la ocultación del Sol es superior a 14,7 horas. Utilizando la calculadora, determina en cuántos días del año ocurre esto. Indica cómo lo haces.

### 2.1.1. Resolución

1) El día 24 de Marzo es el día 31+29+24=84 del año. Para ver cuántas horas de sol hubieron ese día, representamos la gráfica de la función y calculamos el valor f(84), con la opción Análisis / Resolución gráfica / CalY

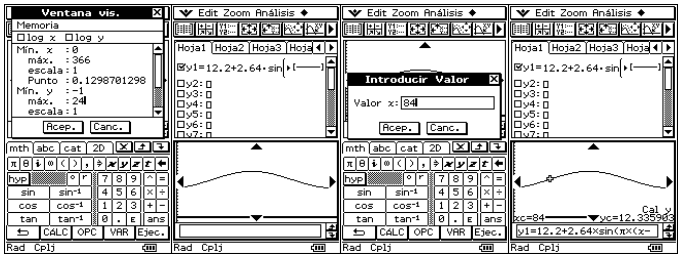



Figura 1. La resolución del primer apartado con la ClassPad.

Ese día, el número de horas de sol fueron 12.335903. Concluimos que la puesta de Sol del día 24 de Marzo tuvo lugar a las 6 h 30 m + 12 h 20 m = 18 h 50 m.

2) Pretendemos hallar n de forma que f(n)>14.7. Con la calculadora gráfica tenemos dos formas de obtener la respuesta.

- Primera forma: usando tablas de valores

Construimos la tabla de valores de la función, tal como se indica a continuación:

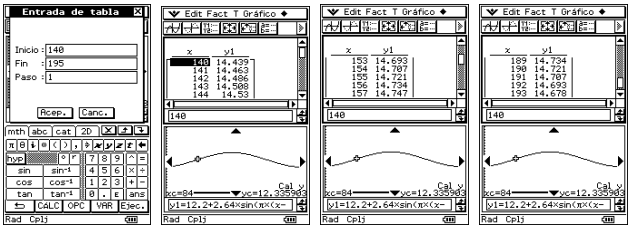



Figura 2. La resolución del segundo apartado con una tabla de valores.

Vemos que f(x) > 14.7 si 154 ≤ x ≤ 191, lo que supone un total de 191 – 153 = 38 días. Por tanto, durante 38 días, el número de horas de sol es superior a 14,7 horas. (Nota: Debemos configurar la calculadora para que los ángulos se expresen en radianes).

- Segunda forma: usando gráficos

Introducimos la función Y2=14.7 en el editor de gráficos y representamos gráficamente las dos funciones, ampliamos la zona central del gráfico con un zoom de cuadro y, a continuación, hallamos los puntos de intersección con el cursor de recorrido.

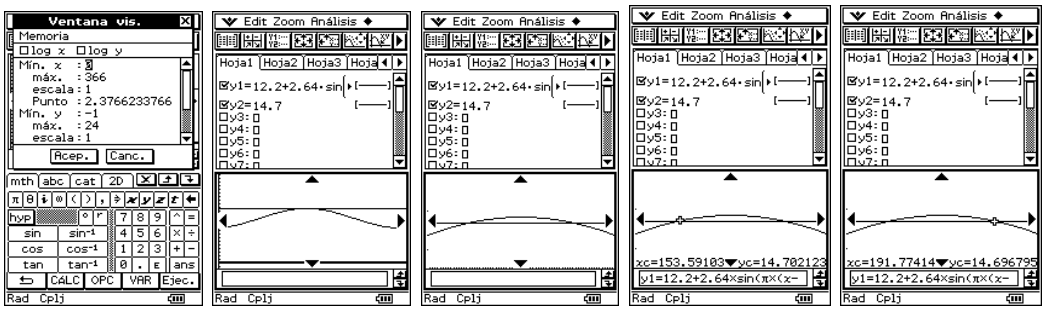



Figura 3. La resolución del segundo apartado usando gráficos.

lo que confirma el resultado obtenido con las tablas de valores. También podemos obtener el mismo resultado, usando el comando Análisis / Resolución gráfica / Intersección, tal como indican las siguientes pantallas:

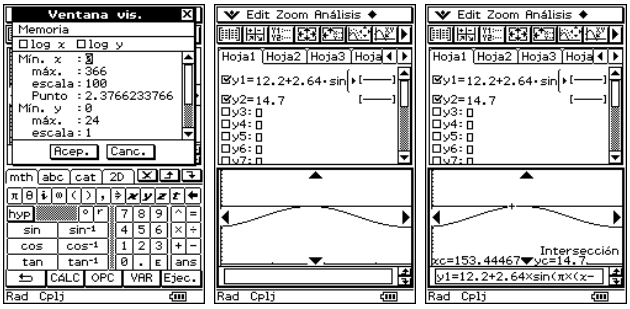



Figura 4. La resolución del segundo apartado usando análisis gráfico.

Comprobamos que las 14,7 horas de sol ocurrirán en dos instantes, aproximadamente, correspondientes a 153,445 días y 191,555 habiendo por tanto 191 – 154 + 1 = 38 días con más de 14,7 horas de sol.

# 3. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS.

A continuación se muestra un ejemplo que ilustra el uso de la ClassPad para construir modelos de situaciones reales. En este caso se utiliza un análisis de regresión, pero también se pueden usar otras técnicas. En el taller se construirán también otros modelos de situaciones (El salto de esquí, El puente, Órbita terrestre, Un reloj, Ensayos de un motor).

## 3.1. EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN.

La población mundial, desde 1900, evoluciona de acuerdo con la tabla:

| Año | Número de personas (miles de millones) |
|---|---|
| 1900 | 1,65 |
| 1910 | 1,75 |
| 1920 | 1,86 |
| 1930 | 2,07 |
| 1940 | 2,30 |
| 1950 | 2,56 |
| 1960 | 3,04 |
| 1970 | 3,71 |
| 1980 | 4,45 |
| 1990 | 5,28 |
| 2000 | 6,08 |

Suponemos que la evolución de la población mundial desde 1900 está modelizada por una función exponencial del número de personas, en la que la variable independiente designa el número de años desde 1900.

1) Estima la población mundial para el año 2010.

2) Utiliza la calculadora y la regresión exponencial para determinar la expresión de una función que se ajuste a los datos de la tabla, siguiendo estos pasos:

- Considera el año 1900 como año cero
- Escribe la expresión, además de los valores numéricos usados en la calculadora con cuatro cifras decimales.
- Usando esa expresión, estima la población mundial para 2010, expresando el resultado en miles de millones de habitantes, redondeando a las centésimas.

### 3.1.1. Resolución

Introducimos los valores de la tabla en las listas del menú Estadística. Para diseñar el gráfico, configuramos los parámetros que se señalan en la siguiente figura, usando el comando ConfGraf / Opciones:

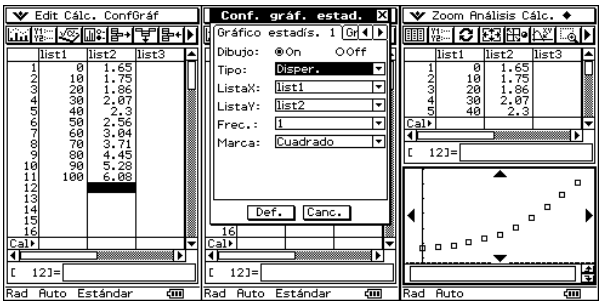



Figura 5. Construcción de la nube de puntos.

La forma del gráfico sugiere un modelo de ajuste exponencial. Seleccionamos el comando Calc / Regr. Exponencial y elegimos los parámetros que se indican en la siguiente ventana.

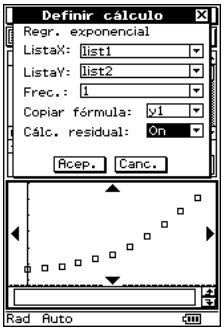



Figura 6. Configuración del modelo.

Obtenemos el modelo $Y = a \cdot e^{b \cdot X}$, siendo a=1.4471, b=0.0136, es decir, $Y = 1.4471 \cdot e^{0.0136 \cdot X}$, con un coeficiente de determinación $r^2 = 0.97$, es decir, este modelo explica un 97% de la variabilidad de los datos.

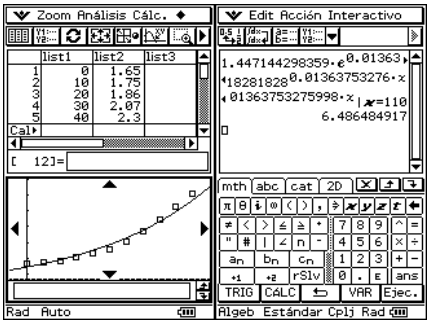



Figura 7. Uso del modelo.

Para obtener el valor estimado de la población para el año 2010, elegimos el menú Gráficos y tablas y vemos que la función de regresión se ha copiado en Y1. Copiamos dicha expresión y la pegamos en la pantalla principal. A continuación calculamos su valor para x=110 (para lo que basta añadir / x=110 al final de la línea donde está la fórmula de la función. El valor estimado de la población para el año 2010 es de 6.487 millones.

## REFERENCIAS.

GREEFRATH, G.; MUHLENFELD, U. (2011). *Ejercicios de la vida real para resolver con la ClassPad 330*, adaptación de Daniel Vila. División didáctica Casio, Barcelona.

TODD, PH., SIEBOLD, M., MAGUIRE, B. (2002). *Obtención del máximo rendimiento de la ClassPad*, Saltire Software Inc., Beaverton OR. www.saltire.com.

GJON, G., ANDERSEN, T. (2003). *Shapes and Numbers. Mathematical Activities on ClassPad 300.*Casio Europe GmbH. www.casio–europe.com. Germany.

# CREACIÓN DE ACTIVIDADES GEOGEBRA EN MOODLE.

**José Luis Cañadilla**,
Associació Catalana de GeoGebra

## RESUMEN.

Moodle es un entorno virtual de aprendizaje de gran difusión en nuestro país. GeoGebra es una aplicación para trabajar matemáticas de forma dinámica en pleno auge. Este nuevo módulo de Moodle permite crear actividades interactivas, autoevaluativas, dinámicas y con componentes aleatorios, basadas en GeoGebra, y su posterior seguimiento por parte del alumno y del profesor.

En este taller aprenderemos a crear este tipo de actividades dotadas de aleatoriedad y autocorrección. Comenzaremos con actividades muy simples para ver las características del módulo y acabaremos con actividades basadas en construcciones más complicadas para saborear todo su potencial.

**Nivel educativo**: Primaria, secundaria y universidad. Es imprescindible haber utilizado alguna vez el programa GeoGebra y el entorno Moodle.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En Febrero del 2011, coincidiendo con las III Jornadas de la ACG, se reunieron miembros del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (Jordi Vivancos, Francesc Busquets, Sara Arjona y Jorge Sánchez) y de la ACG (José Luis Cañadilla y David Obrador) con Markus Hohenwarter para colaborar en el desarrollo de un nuevo módulo de Moodle que permitiese la creación y seguimiento de actividades basadas en GeoGebra.

Los desarrolladores del módulo, Sara Arjona y Jaume Fernández, conjuntamente con dos profesores de matemáticas, José Luis Cañadilla y David Obrador, establecieron las características que tenía que tener el módulo des de un punto de vista técnico y pedagógico. El equipo de programadores de GeoGebra colaboró en la adaptación de GeoGebra para hacer posible la comunicación entre el applet y Moodle. Meses después esta colaboración dio sus frutos con una beta del módulo que diversos miembros de l'ACG testearon

Actualmente está disponible una versión totalmente operativa para Moodle 1.9[1]. Sara Arjona y Jaume Fernández continúan trabajando en el módulo para incluir mejoras y hacerlas públicas en la web oficial de Moodle; José Luis Cañadilla, David Obrador y Raúl Fernández hacen difusión del módulo en Linz, Lleida, Donosti, Barcelona, Valencia, Granada, Málaga… crean actividades y exploran sus múltiples posibilidades.

[1] http://moodle.org/plugins/view.php?plugin=mod_geogebra.

# 2. CARACTERÍSTICAS DEL MÓDULO.

Moodle, como buen entorno virtual de aprendizaje que es, permite una exposición estructurada de contenidos, la comunicación con el profesor, la colaboración entre alumnos, el seguimiento del aprendizaje, la importación y exportación de recursos, la creación de cuestionarios, etc.

GeoGebra nació como una aplicación para trabajar la geometría dinámica en secundaria aportando como novedad la sencillez, la rapidez y la interrelación entre geometría y álgebra. Actualmente GeoGebra es una macro aplicación para trabajar matemáticas (algebra, geometría, aritmética, cálculo, estadística y probabilidad…) de forma dinámica a nivel de primaria, secundaria y universidad

Ciertamente que Moodle permite insertar applets de GeoGebra, pero el tratamiento es parecido al de una imagen o cualquier otro objeto multimedia. El proceso consiste en qué el/la profesor/a edita una página con texto, imágenes y un applet de GeoGebra; el/la alumno/a accede a la página, lee el texto, observa las imágenes, interactúa con el applet y, a lo sumo, responde a una pregunta en un campo de texto o elige la respuesta correcta entre diversas opciones, en este caso el profesor podrá consultar la respuesta y la puntuación. El papel que juega GeoGebra es de mera ilustración interactiva.

Este nuevo módulo de Moodle enriquece enormemente el papel de GeoGebra, aprovecha toda su potencialidad, lo hace protagonista de la actividad. El/la alumno/a accede a la actividad GeoGebra, lee el texto, observa las imágenes, interactúa con el applet, y ahora además:

- El alumno puede guardar y entregar el applet o bien guardar y continuar otro día con la actividad, con un simple clic.
- Alumno y profesor pueden consultar el applet tal y como lo ha dejado el alumno, consultar los diversos intentos y saber la fecha y hora en qué ha realizado la actividad.
- La creación y edición de una actividad GeoGebra es muy sencilla.
- Se pude incluir una variable (grade) en el applet, que contenga la puntuación del alumno. El valor de grade depende de lo que haga el alumno. Esta puntuación queda almacenada en Moodle y puede ser consultada por el profesor y el alumno.
- Se pueden introducir objetos aleatorios para que los alumnos no se puedan copiar el resultado de sus compañeros y que puedan repetir la actividad varias veces.

Con este módulo también nos evitamos el proceso laborioso que algunos profesores utilizan en sus clases: el alumno que accede a Moodle, se descarga el archivo ggb, realiza la actividad en local, guarda el archivo, vuelve acceder a Moodle para enviarlo al profesor; para que después el profesor se descargue uno a uno los archivos de los alumnos, los abra en local para ver lo que han hecho y vuelva a acceder a Moodle para poner nota. Con este módulo el proceso es mucho más simple.

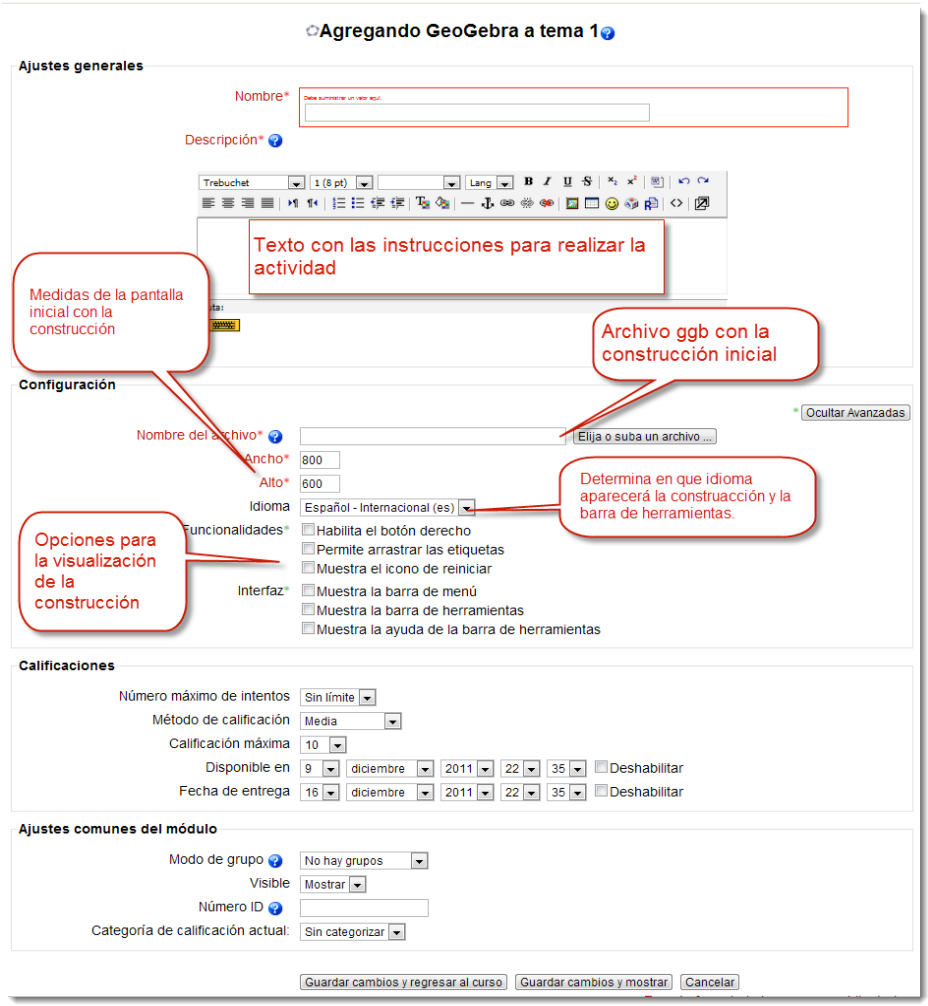



Figura 1. Formulario de creación de una actividad

# 3. ESTRUCTURA DEL TALLER.

El taller consta de tres partes. Primero habrá una breve explicación de lo que es el módulo y sus características, unos 15 minutos. Seguidamente los asistentes accederán al Moodle con el rol de alumnos y realizaran algunas actividades de ejemplo que se encontraran creadas. Podrán experimentar desde el punto de vista del alumno y observar las características antes comentadas. A continuación los asistentes entraran como profesor en la plataforma y observaran las actividades realizadas por sus compañeros. Unos 25 minutos.

En la tercera parte del taller, los asistentes crearan diversas actividades GeoGebra de complejidad creciente. La primera, muy sencilla, para familiarizarse con el formulario. En las siguientes se introducirá la autocorrección y la aleatoriedad.

# REFERENCIAS.

ARJONA, S. y Fernández, J. (2012): *Actividades GeoGebra.* http://moodle.org/plugins/view.php?plugin=mod_geogebra.

# GEOGEBRA EN EL BLOQUE DE ANÁLISIS

**Miguel Ángel Fresno Martínez**,
*I.E.S. Pedro Soto de Rojas, Granada (Granada)*
**María Peñas Troyano**,
*I.E.S. Luis Bueno Crespo, Armilla (Granada)*
**Ana Belén Heredia Álvarez**,
*I.E.S. Pablo Rueda, Castillo de Locubín (Jaén)*

## RESUMEN.

Se trata de trabajar con algunas de las herramientas de la versión 4 de GeoGebra buscando su utilización en el desarrollo de actividades que puedan ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de Análisis del actual Bachillerato.

Desde el concepto de derivada de una función en un punto, al cálculo de áreas de regiones planas limitadas por curvas continuas mediante la integral definida, pasando por la representación gráfica, optimización…, GeoGebra nos ayuda a que el alumnado visualice, experimente, compruebe y conjeture con funciones tan fácilmente como puede hacerlo con elementos geométricos.

**Nivel educativo**: Bachillerato.

## 1. INTRODUCCIÓN.

GeoGebra, se presentó en sus orígenes como un sencillo pero potente programa de geometría dinámica que permitía una excelente interacción entre los elementos gráficos y algebraicos, de ahí su nombre. En la actualidad, gracias a su amplio desarrollo, disponemos también de herramientas y comandos para tratar problemas de cálculo, matemática discreta, estadística y probabilidad

El objetivo de este taller es poner en contacto a los asistentes con las nuevas herramientas y funcionalidades de la versión 4 de GeoGebra que se relacionan más directamente con los contenidos del bloque de Análisis del Bachillerato, realizando construcciones de applets que puedan ser útiles en el aula.

Se trabajarán los siguientes aspectos:

- Introducción en la barra de entrada de una función, de una función definida en un intervalo, de una función "a trozos".
- Presentación en la ventana algebraica y en la ventana gráfica, representación gráfica de funciones, opciones.
- Funciones predefinidas y comandos específicos de función.
- Posibilidades que brindan las nuevas herramientas: *Botón*, *Casilla de entrada* e *Inspección de función* en la creación de applets para uso en el aula.
- Segunda ventana gráfica como elemento auxiliar en la construcción de los applets.
- Escritura de textos en la ventana gráfica, "arrastrar y soltar" y fórmulas latex.

# 2. CONTENIDOS

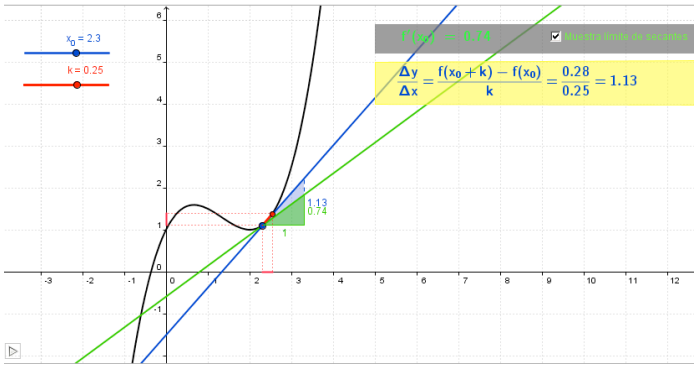
Resulta evidente la utilidad y facilidad con la que GeoGebra nos permite representar gráficamente funciones, pero puede servirnos también para visualizar todos los aspectos que se tratan en el bloque de contenidos que nos ocupa.

Algunos de los ejemplos concretos a trabajar durante el taller.

## 2.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

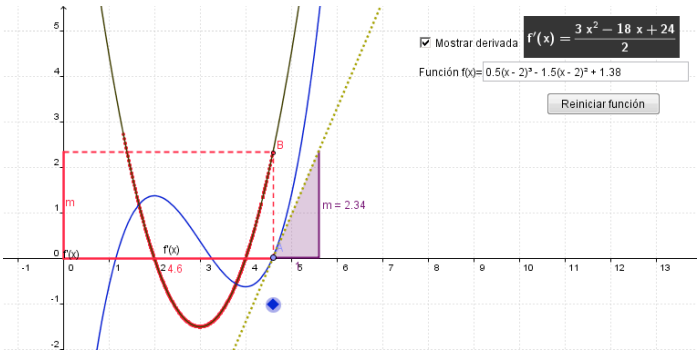
Se trata de visualizar el valor de la derivada en un punto como límite de las pendientes de las secantes.

Se utilizan herramientas ya disponibles en la versión 3 de GeoGebra y se analizarán las dificultades que pueden aparecer.



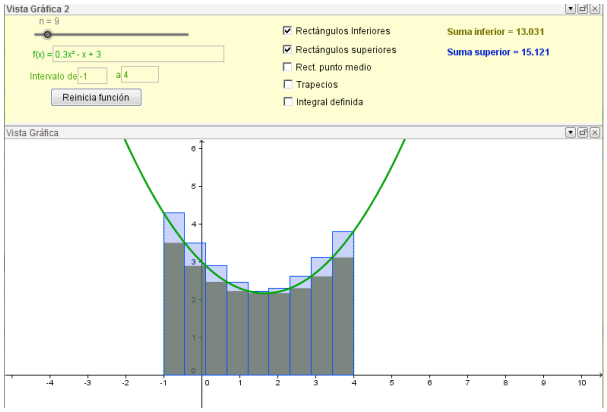

## 2.2 FUNCIÓN DERIVADA.

Introducimos dos nuevas herramientas *Casilla de entrada* y *Botón*, para darle dinamismo a la construcción de la función derivada a partir de la derivada en cada punto.

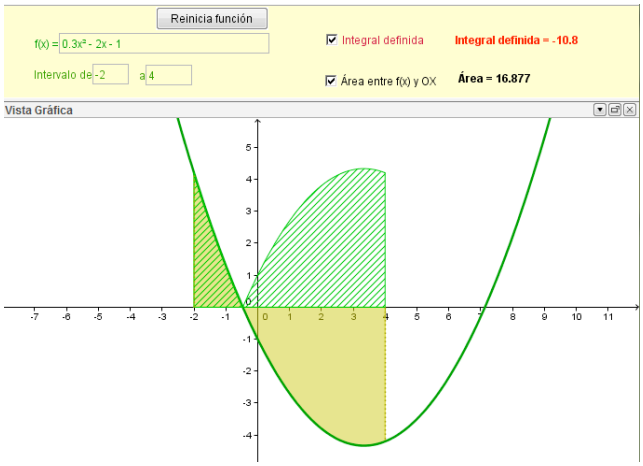



## 2.3 INTEGRAL DEFINIDA.

Aprovechamos la posibilidad que nos brinda la segunda ventana gráfica para construir un applet que nos permita visualizar las sumas inferiores, sumas superiores, sumas de trapecios… y su aproximación a la integral definida en un intervalo cuando aumentamos el tamaño de la partición del mismo.

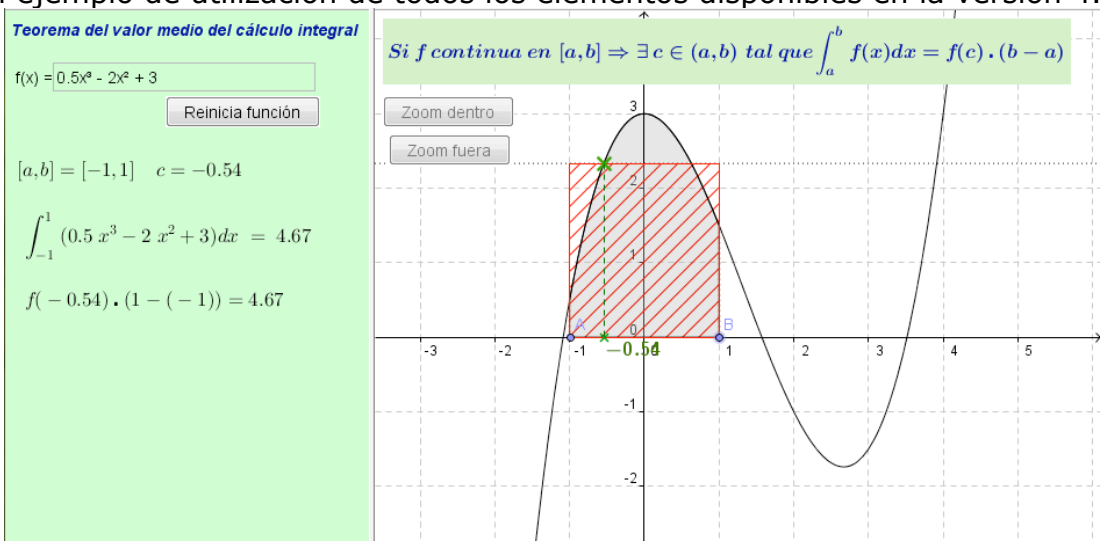



O bien para mostrar la diferencia entre el valor de la integral definida de una función en un intervalo [*a, b*] y el área limitada por su gráfica el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b*.



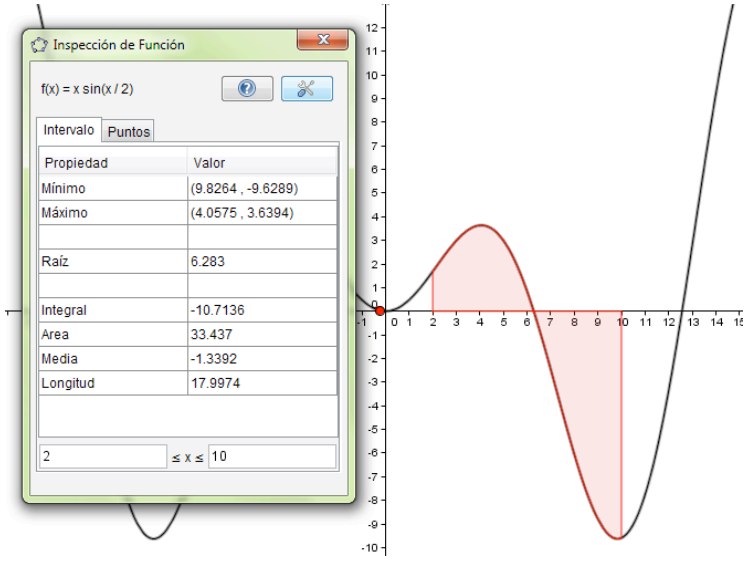

## 2.4 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Un ejemplo de utilización de todos los elementos disponibles en la versión 4.



### 2.5 HERRAMIENTA INSPECCIÓN DE FUNCIÓN

Una nueva herramienta de información que nos permite analizar con todo detalle las características de una función.




## REFERENCIAS.

http://wiki.geogebra.org/es/Manual:Página_Principal

## NECESIDADES

Puesto que se trata de un taller sobre aplicación de GeoGebra 4 es necesario disponer de ordenadores con dicho software, bien en un aula dotada de los mismos, o bien, lo que sería más deseable, que los interesados asistan con su portátil con el software instalado.

Cañón proyector y fotocopias de las hojas de trabajo, que se facilitarán si es admitida la propuesta de taller, para los asistentes.

El número máximo debería ser veinticinco personas.

A desarrollar en dos horas.

# GEOGEBRA Y LA DIVERSIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

**Raúl Manuel Falcón Ganfornina**,
*ETS Ingeniería de Edificación, Universidad de Sevilla.*
**Ricardo Ríos Collantes de Terán**,
*I.E.S. Sofía, Jerez de la Frontera (Cádiz)*

## RESUMEN.

En el presente taller se elaboran actividades basadas en las nuevas herramientas de *GeoGebra 4* para trabajar la diversidad en el aula de Matemáticas. En concreto, se desarrollan evaluaciones iniciales para determinar el nivel de partida del alumnado y ejercicios de profundización autocorregibles que se adaptan de forma automática al nivel de los estudiantes. Se muestra en particular cómo abordar los distintos contenidos matemáticos que se tratan en Educación Primaria y Secundaria, al igual que ciertos aspectos que pueden ser de utilidad en enseñanza universitaria. Las actividades a desarrollar permiten al mismo tiempo profundizar en el manejo de GeoGebra de cada uno de los asistentes al taller, desde los que no conocen dicho programa, hasta los que tienen un nivel más avanzado.

**Nivel educativo**: El taller va dirigido a todos los niveles educativos.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Para poder trabajar la diversidad en el aula hay que conocer el nivel de partida del alumnado (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1990). Existe una variada gama de actuaciones por parte del profesorado para determinar dicho nivel, la cual se extiende desde el simple análisis de los resultados obtenidos por cada estudiante en cursos anteriores hasta la observación directa de la actividad del alumno en el aula. Una posible actuación es la utilización de herramientas informáticas con vistas a evaluar el conocimiento previo requerido para abordar un determinado contenido. Dichas herramientas pueden ser de gran utilidad además a la hora de tratar los distintos niveles de partida encontrados. En este sentido, el uso de ordenadores en el aula posibilita trabajar la diversidad de una forma factible.

En el aula de Matemáticas, un programa informático que se ha vuelto indispensable en los últimos tiempos es *GeoGebra*, software libre que, unificando herramientas de Geometría Dinámica y Cálculo Simbólico, permite elaborar plantillas que pueden emplearse en clase para abordar de una forma dinámica e interactiva todo tipo de contenido matemático en cualquier nivel educativo (BARRENA et al., 2011). En el presente trabajo se muestra cómo las nuevas opciones disponibles en la versión 4 de *GeoGebra* permiten además generar actividades autocorregibles que posibilitan tanto conocer el nivel inicial del alumnado como adaptarse de forma automática al ritmo de aprendizaje de cada estudiante para que vaya alcanzando los objetivos mínimos planteados.

# 2. ELABORACIÓN DE UNA PRUEBA INICIAL.

La prueba inicial a generar como plantilla consta de varias actividades relacionadas con contenidos trabajados en cursos anteriores. Los posibles tipos de ejercicios son: introducción de texto, respuesta única, respuesta múltiple y relación entre objetos. Así por ejemplo, en este último tipo de actividad donde se tienen que relacionar dos listas de conceptos (Figura 1), se pueden crear tantas casillas de entradas como relaciones existan, con el nombre de los elementos de una de las listas y asociados a los valores de la otra lista.

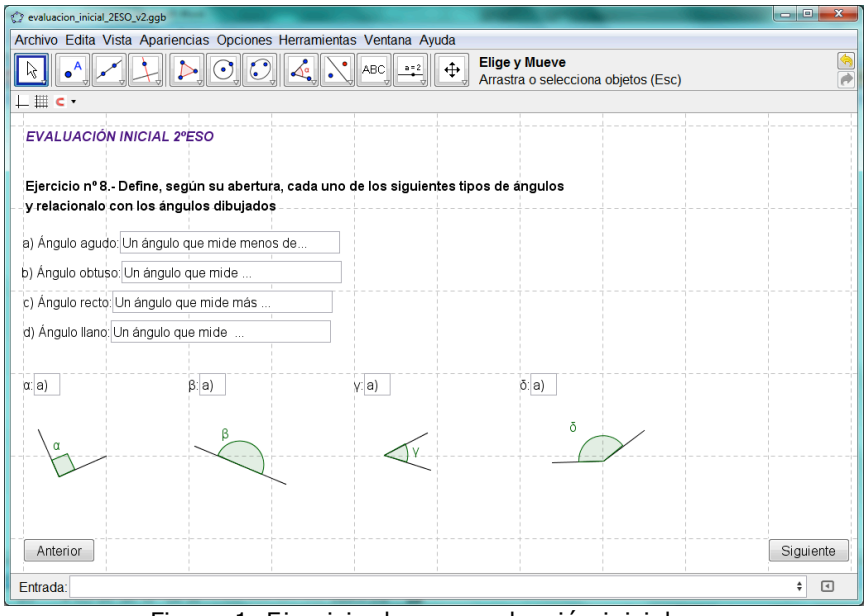


Figura 1. Ejercicio de una evaluación inicial.

La estructura de cada actividad consiste en un texto con el enunciado, una o varias casillas de entrada, para que el alumno pueda introducir su repuesta y los distintos objetos que corresponden con la actividad: figuras geométricas, imágenes, gráficas de funciones o estadísticas. Estos objetos pueden crearse haciendo uso de los distintos comandos de GeoGebra. Así, por ejemplo, se puede utilizar el comando *Histograma[<Lista de Extremos de Intervalo>, <Lista de Alturas>]*, para crear un histograma y hacer preguntas sobre él, o crear un trozo de una función con el comando *Función[ <Función>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final> ]*…

Para cada actividad deben crearse dos tipos de variables: las asociadas a las respuestas introducidas por los alumnos y las correspondientes a las soluciones exactas que permiten comprobar si las primeras son correctas o no. Es importante señalar que las de primer tipo deben ser creadas antes de las casillas de entrada de respuesta, pues estas últimas se asocian a dichas variables. Así, cuando el alumno escribe su respuesta en la casilla de entrada, el valor de la variable se modifica. Si además se quiere que los alumnos tengan el mismo ejercicio con distintos datos, como, por ejemplo, para ejercicios de cálculo (Figura 2), se puede introducir un tercer tipo de variables, en este caso aleatorias, haciendo uso del comando *AleatorioEntre[ ]*.

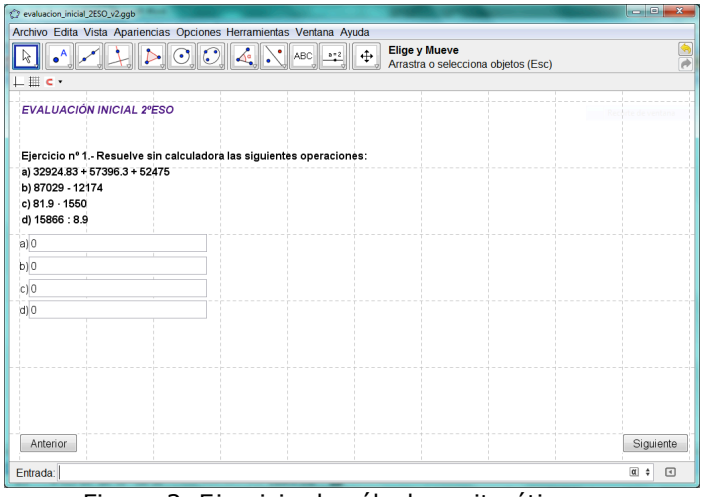


Figura 2. Ejercicio de cálculos aritméticos

A continuación basta insertar dichos datos en el texto del enunciado utilizando la pestaña *Objetos* (Figura 3). Para evitar que, al actualizar o recargar el archivo de GeoGebra, estos datos varíen, se puede utilizar el comando *CopiaObjetoLibre(AleatorioEntre[ ])* en un botón al comienzo de la evaluación inicial. En este caso, dado el gran número de objetos asociados, es muy recomendable irlos nombrando de una manera ordenada al mismo tiempo que se van creando, con vistas a poder modificarlos con facilidad posteriormente.

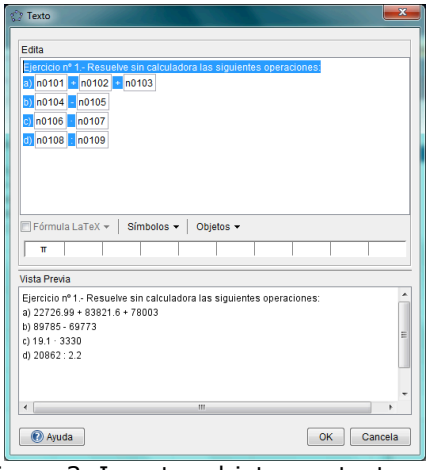


Figura 3. Insertar objetos en texto.

Para pasar de una actividad a otra basta crear una nueva variable numérica, denominada "*ejercicio*", y dos botones (*anterior* y *siguiente*) que modifiquen el valor de la misma al pulsarlos. Para ello se hace uso de los programas de *Guión-Scripting* asociados a dichos botones, los cuales permiten tanto crear nuevos objetos como modificar los que ya existen. Concretamente, uno de los botones tendrá asociado el valor *ejercicio=ejercicio-1*, mientras que el otro tendrá el valor *ejercicio=ejercicio+1*. Así, una vez creada la primera actividad con sus textos, variables, casillas de entrada y demás objetos, se le pondrá como *Condición Para Exponer Objeto* de la pestaña *Avanzada* de sus *Propiedades*: *ejercicio==1*. Finalmente, para facilitar la creación de la siguiente actividad basta

imponer que todos los objetos, excepto la variable *ejercicio*, sean auxiliares, desapareciendo de esta forma de la ventana algebraica.

# 3. ELABORACIÓN DE ACTIVIDADES PARA TRABAJAR LA DIVERSIDAD.

En la segunda parte del taller planteamos algunos posibles mecanismos a llevar a cabo en *GeoGebra* a la hora de generar actividades que permitan adecuarse al ritmo de trabajo de cada alumno. La idea es plantear un tipo de actividad con distintos niveles de dificultad que posibilite de forma automática al estudiante ir formándose de manera progresiva en el concepto o contenido matemático en cuestión. A diferencia de una prueba inicial en la que el mismo alumno decide cuándo pasar a la siguiente actividad, en este caso debe ser el propio programa el que se encargue de plantear un ejercicio con un mayor grado de dificultad una vez superadas las expectativas de la actividad realizada o bien genere un nuevo ejercicio de dificultad similar o incluso inferior a la misma si ésta no ha sido correctamente desarrollada.

Para ello, debe crearse un botón que al ser pulsado registre la respuesta del alumno y la compare con la solución exacta, aumentando o disminuyendo la puntuación del alumno en función de si su respuesta es correcta o no (Figura 4). Dicha puntuación es almacenada en una variable interna creada expresamente en este sentido, de tal forma que, cuando el alumno alcanza una determinada nota prefijada de antemano, el nivel de dificultad del ejercicio aumenta.

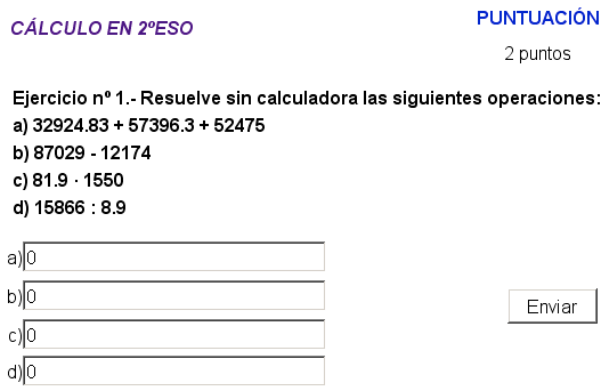



Figura 4. Actividad autocorregible.

Dicha variable de puntuación puede depender de otro tipo de factores como puede ser por ejemplo el tiempo de respuesta. En este sentido, puede hacerse uso de un deslizador con velocidad 1/8 que simule el paso de los segundos, de tal forma que la puntuación disminuya en función del tiempo y que en cada nivel de dificultad el tiempo permitido sea menor.

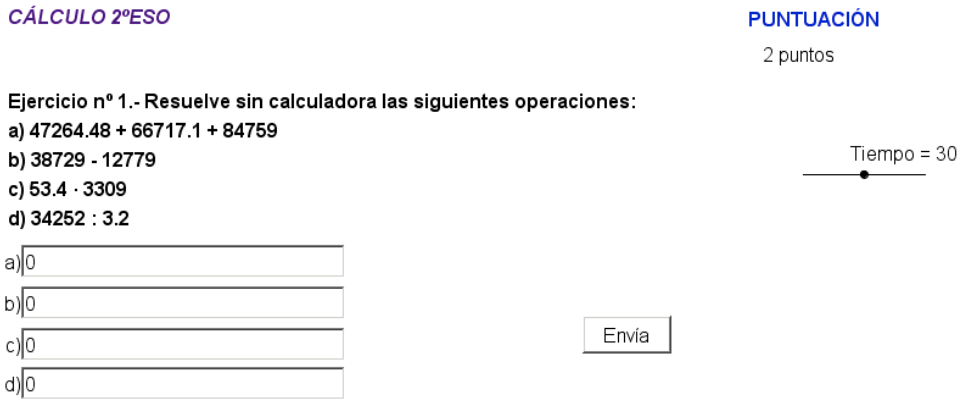



Figura 5. Prueba de profundización con puntuación dependiendo del factor tiempo.

El hecho de poder ir almacenando en variables tanto las respuestas como las puntuaciones del alumno permite además poder programar la posibilidad de que, por ejemplo, ante un número determinado de fallos, aparezca una pantalla con contenido teórico que ayude al alumno a recordar el concepto y la técnica matemática que ha de utilizar ante el ejercicio que está llevando a cabo.

# 4. CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se han mostrado diversas técnicas para generar plantillas en GeoGebra que posibiliten tanto conocer el nivel inicial del alumnado ante un nuevo contenido matemático, como una profundización en el mismo de forma autodidacta que posibilite atender a la diversidad en el aula. Si bien existen otras herramientas informáticas que pueden generar este tipo de plantillas, pensamos que es interesante combinar todas estas técnicas con el potencial de GeoGebra a la hora de diseñar actividades matemáticas dinámicas e interactivas.

# REFERENCIAS.

BARRENA, E., FALCÓN, R.M., RAMÍREZ, R. y RÍOS, R. (2011). *Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra*, Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática 25, 161-174.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1990). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*, Washington, DC: National Academy Press.

# CONSULTAS SENCILLAS Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN ESTADÍSTICA: SIMA

**José Antonio Moreno Muñoz**,
*Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía*

## RESUMEN.

El Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía pone a disposición de los usuarios el Sistema de Información Multiterritorial de Andalucía (SIMA). Este banco de datos ofrece una gran cantidad de información estadística sobre múltiples temas y para una amplia variedad de ámbitos territoriales, desde distritos o secciones censales a países de la Unión Europea.

La aplicación informática permite la consulta de datos, obtener variadas representaciones gráficas y mapas a partir de los datos seleccionados, así como trabajar con los datos introducidos por el propio usuario. Adicionalmente, existe la opción de recuperar las consultas realizadas, e imprimir y exportar la información en soporte electrónico. Por sus características, es uno de nuestros productos más demandados.

**Nivel educativo**: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

## 1. INTRODUCCIÓN.

El objetivo principal del SIMA es poner a disposición de todos los usuarios una herramienta sencilla que de soporte a sus requerimientos de información y les permita representarla de diversas formas, ya sea mediante gráficos o mapas.

SIMA se presenta de varias formas. Si accedemos a la página de este producto en la página web del Instituto de Estadística y Cartografía de Andalucía, encontramos tres accesos posibles:

- Acceso al banco de datos, es una versión web del SIMA donde se puede consultar información estadística (Figura 1). Solo se pueden consultar los datos disponibles y presentarlos en forma de tabla o gráfico, por tanto, es más limitada funcionalmente que la aplicación instalable SIMA. Aunque como ventaja podemos señalar que, al tratarse de una versión online, contiene datos más actualizados.
- SIMA_Software proporciona información sobre la aplicación instalable SIMA. El conocimiento y manejo de esta aplicación será el eje fundamental de este taller.
- Andalucía pueblo a pueblo - Fichas municipales presenta una selección de las variables más representativas que se incluyen en el SIMA para cada municipio de Andalucía.

Desde estas tres vertientes se facilita el acceso a información estadística referenciada a niveles muy desagregados del territorio, dando la posibilidad de conocer y comparar la situación y realidades de estos ámbitos territoriales.

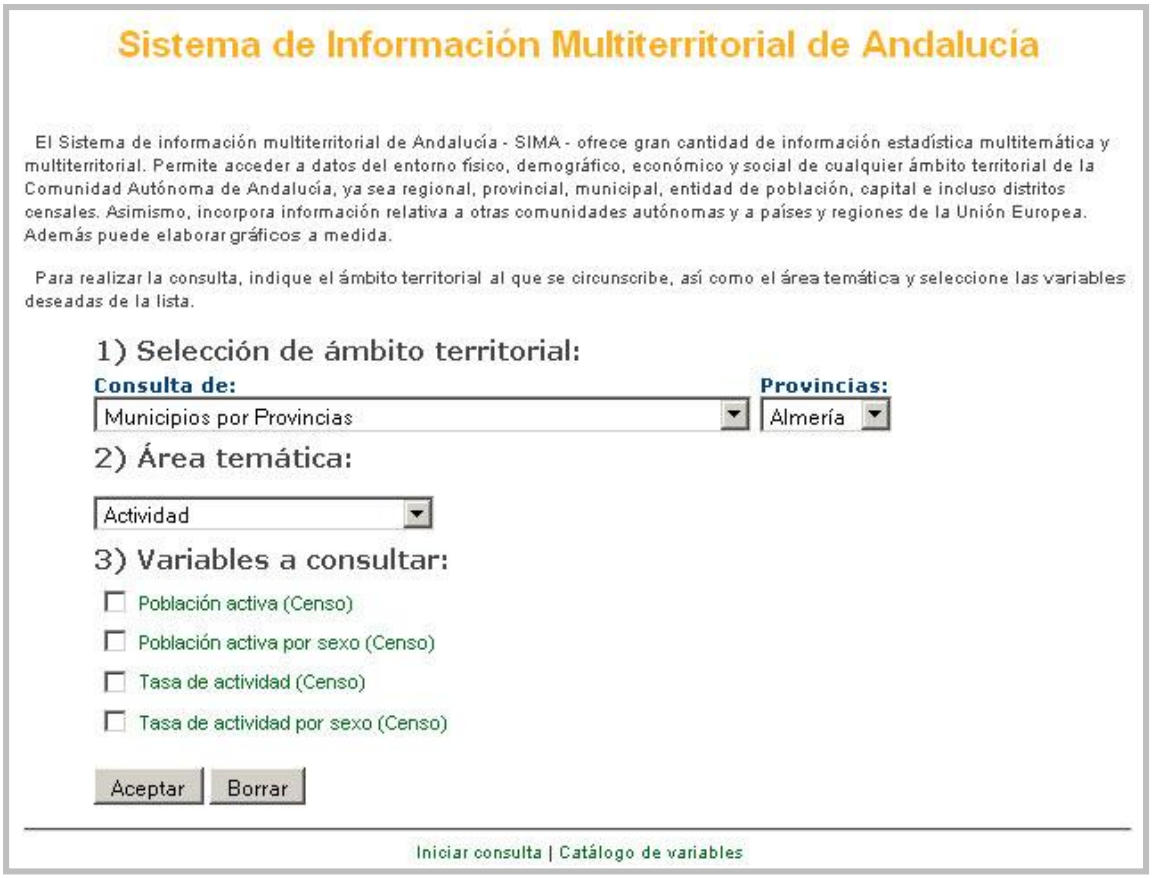



Figura 1. Página principal de la versión web del banco de datos SIMA.

# 2. LA APLICACIÓN SIMA.

. La aplicación SIMA permite la generación de consultas (tablas bidimensionales) con información multitemática para los principales ámbitos territoriales. Dichas consultas pueden incluir información del propio sistema o bien incorporar datos ajenos a éste, ya sea de forma manual o bien a través del portapapeles. Además, permite la generación de nuevas variables que resultan de la combinación, a través de una operación aritmética, de los elementos anteriormente mencionados.
Además, sobre estas consultas se pueden aplicar filtros, modificarlas o guardarlas para volver a recuperarlas con posterioridad.

## 2.1. CREACIÓN DE CONSULTAS.

Cuando creamos una consulta en SIMA, debemos especificar una serie de elementos que van a definirla. Concretamente se habrá de especificar:

- Ámbito de la consulta, el ámbito territorial para el que van a estar desagregados los datos.
- Lista temático-temporal. Aquí se hace la selección simultánea de las variables que vamos a consultar y el año de referencia de los datos. Podemos actuar escogiendo las variables entre las existentes en el catálogo

temático (mediante selección a medida o por años), definiendo una variable calculada (llamada concepto operación, que puede servir, por ejemplo, para calcular una medida entre el número de habitantes) o una variable no contemplada y que nos interese tratar con la aplicación (llamada concepto de usuario).

- Lista territorial. Permite escoger los elementos del ámbito territorial que nos interesen, es decir, si hemos escogido el ámbito municipal puede que solo nos interesen los municipios de una provincia concreta.

De forma opcional, se pueden definir filtros sobre una consulta. Podemos determinar que todas las variables que hemos escogido o calculado se muestren solo para los municipios que superen un determinado número de habitantes o establecer cualquier otra condición sobre cualquier otra variable contenida en el banco de datos.

También es posible incluir algunos estadísticos descriptivos básicos en las consultas: suma, máximo, mínimo y media.

Como ya se ha mencionado, las consultas resultantes se pueden guardar, modificar, exportar o imprimir; lo que supone una gran ventaja respecto a otros bancos de datos.

## 2.2. GRÁFICOS Y MAPAS.

La funcionalidad sobre gráficos de SIMA incluye una amplia variedad de representaciones gráficas sobre los datos contenidos en una consulta y una opción particular para representar pirámides de población de manera rápida y sencilla (Figura 2).

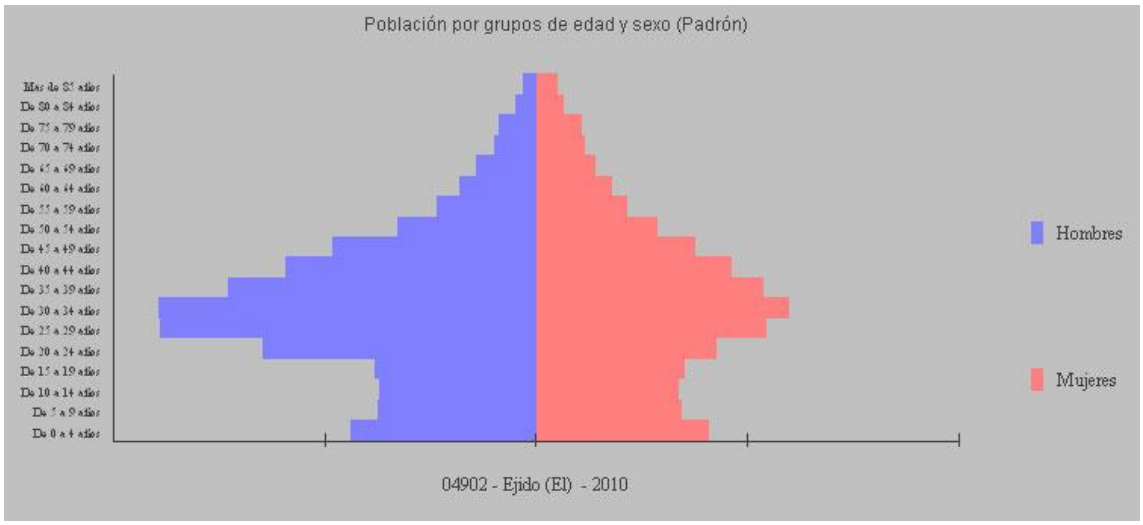



Figura 2. Pirámide de población simple del municipio de El Ejido (Almería)

Mediante la utilización de mapas se puede analizar la distribución espacial de la información estadística de manera muy intuitiva. Así se puede presentar la localización geográfica de los datos, realizar comparaciones entre territorios o confirmar hipótesis establecidas a priori sobre dichos datos. La aplicación del SIMA permite hacer este tipo de representaciones mediante mapas para diversos ámbitos territoriales, pudiendo definir los intervalos a representar, la leyenda o la escala en la que se visualiza (Figura 3).

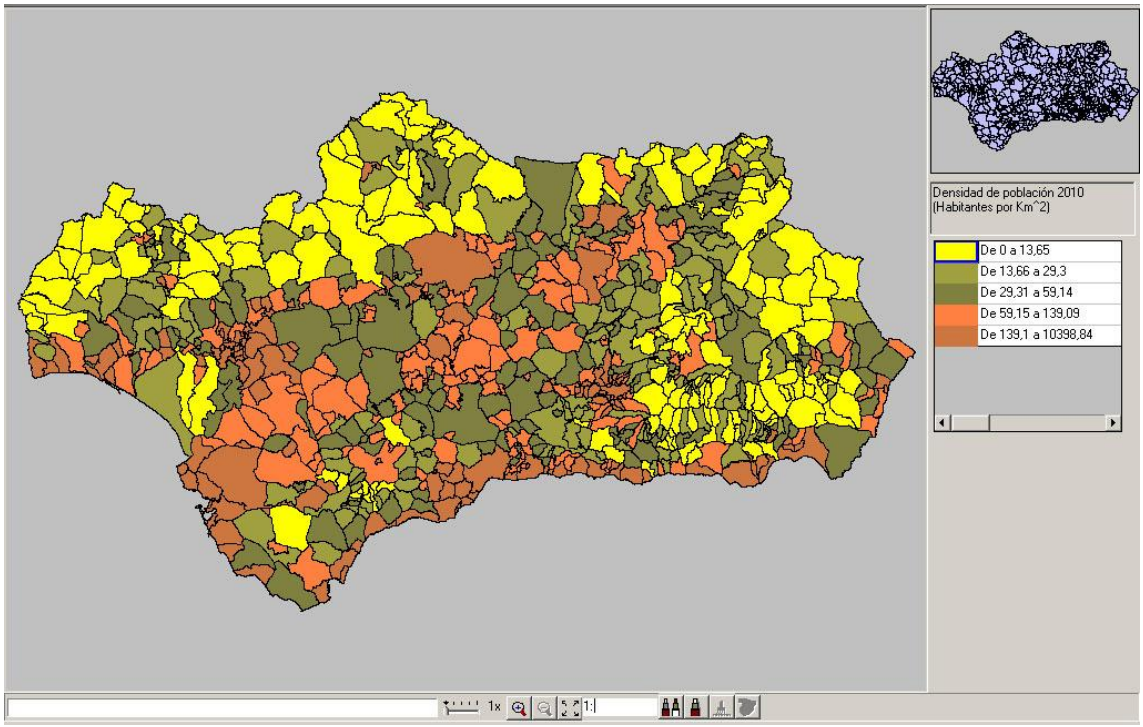



Figura 3. Mapa municipal sobre densidad de población en Andalucía

## 2.2. DESARROLLO DEL TALLER.

Durante el taller se hará una introducción al manejo de SIMA a través de la descripción de sus menús de opciones e iconos, sirviendo este proceso de hilo conductor para pormenorizar las funcionalidades de la aplicación.

A continuación se harán una serie de ejemplos de consultas que servirán de práctica a los asistentes al taller. Podrán comprobar las prestaciones de la aplicación con datos reales, elaborando tablas de datos que serán representadas gráficamente y mediante mapas.

# MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

**Luis Berenguer Cruz**

## RESUMEN.

En este taller queremos presentar una serie de materiales y realizar actividades que contribuyan al aprendizaje de los diferentes contenidos de Geometría por parte de los escolares.

La importancia de estos materiales y recursos no reside en sí mismos, sino en el uso que los docentes hagan de ellos. Siempre hay que planificar las actividades que presentaremos para evitar pérdidas de tiempo y atención.

La clase de Matemáticas no tiene por qué ser aburrida, al profesor debe gustarle la asignatura que da, y disfrutar con ella, proporcionando a los alumnos instrumentos, para que, a través de la manipulación e investigación con esos materiales cree situaciones activas de aprendizaje, y le faciliten el paso de lo concreto a lo abstracto.

Entre los materiales a utilizar proponemos libros de espejos, círculo de ángulos, mecano, polígonos, pentominós y hexaamantes.

**Nivel educativo:** Internivelar

**Bloque temático:** B4. Recursos y materiales en Matemáticas.

# MATERIALES Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS Y EL ÁLGEBRA

**Luís Berenguer Cruz**

## RESUMEN.

En este taller queremos presentar una serie de materiales y realizar actividades que contribuyan al aprendizaje de los diferentes contenidos de Números y Álgebra por parte de los escolares.

La importancia de estos materiales y recursos no reside en sí mismos, sino en el uso que los docentes hagan de ellos. Siempre hay que planificar las actividades que presentaremos para evitar pérdidas de tiempo y atención.

Si conocemos el material, y el cómo transformarlo, veremos que con poco trabajo podemos disponer de gran cantidad de juegos e instrumentos para nuestra clase.

Entre los materiales a utilizar proponemos círculo de fracciones, juegos de tablero para álgebra y fracciones, tiras de fracciones, dominós y triminós, cartas...

**Nivel educativo:** Internivelar.

**Bloque temático:** B4. Recursos y materiales en Matemáticas

# MARCAPÁGINAS MATEMÁTICO: PROPUESTAS PARA INCLUIR LA LECTURA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

**Rafael Ramírez Uclés**,
*Colegio El Carmelo, Granada*
**Pablo Flores Martínez**,
*Universidad de Granada*

## RESUMEN.

En este taller se presentan diferentes materiales didácticos (ficha del profesor, ficha del alumno, selección de contenidos matemáticos, cuestionario de comprensión…) para que la lectura sea una herramienta más en la clase de matemáticas. Se pretende promover la lectura, empleando textos que tengan contenido matemático, sin perder de vista su intención literaria. Se reflexionará sobre algunas posibles pautas para que los asistentes elaboren sus propios recursos y así desarrollar en el alumnado de todas las etapas educativas la comprensión lectora ligada al aprendizaje de contenidos del área de matemáticas.

**Nivel educativo**: Secundaria, Bachillerato, Primaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En la actualidad se está destacando la importancia educativa, cultural e intelectual de la lectura, como fin y como medio en la educación. La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), en su artículo 26, apartado 2, señala que en Secundaria Obligatoria y Bachillerato se prestará una atención especial a la adquisición y desarrollo de las competencias básicas, se fomentará la correcta expresión oral y escrita y se promoverá el hábito de la lectura y la capacidad de expresarse correctamente en público. La OCDE (2005) le da una importancia general a la función social y cultural que desempeñan las matemáticas y de ello se hace eco el reciente Decreto de Mínimos de las Educación Primaria y Secundaria (Ministerio de Educación, 2006). Una de las manifestaciones que muestran el papel social y cultural de las matemáticas son los textos en los que se utilizan las matemáticas para contar historias, argumentar sobre su papel social, proponer sus conceptos como personajes de ficción literaria, etc.

En los planes de estímulo de la lectura, la atención a la competencia comunicativa se está atendiendo desde todas las áreas del currículo. Desde la educación matemática se viene propugnando desde hace tiempo la importancia de considerar la dimensión social y cultural de las matemáticas. Estos factores nos llevan a proponer la participación de los profesores de matemáticas en los planes de incitación a la lectura, el ampliar la destreza de los profesores de matemáticas para desarrollar la competencia comunicativa en sus alumnos, y el

aprovechamiento de los recursos literarios existentes para promover la lectura de textos que muestren el papel cultural, social y lúdico de las matemáticas.

En esta línea, el Grupo LaX, formado por profesores de los diferentes niveles educativos, ha elaborado en los últimos años una serie actividades para fomentar la lectura de libros relacionados con las matemáticas (Grupo LaX, 2008; Ramírez y Largo, 2007). Este material está recopilado en la wiki *www.leermatematicas.es* y está siendo utilizado en diferentes cursos de formación dentro del programa Thales-CICA organizado por la SAEM Thales (*Marcapáginas matemático, A leer matemáticas*), cursos de formación permanente para profesores del Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI (*La lectura como recurso didáctico en matemáticas*) y en distintos foros en los que se ha reflexionado sobre el papel de la lectura en matemáticas (Grupo LaX, 2009; Ramírez y Grupo LaX, 2011; Ramírez, 2012).

A partir de estas experiencias hemos realizado una selección de textos y lecturas para los distintos niveles y contenidos curriculares y presentamos diferentes materiales didácticos (ficha del profesor, ficha del alumno, selección de contenidos matemáticos, cuestionario de comprensión…) para favorecer la comprensión lectora ligada al aprendizaje de contenidos del área de matemáticas. Pretendemos que tanto el desarrollo del taller como las aportaciones del profesorado asistente marquen unas pautas para elaborar recursos y la lectura se convierta en una herramienta más en la clase de matemáticas.

## 2. OBJETIVOS.

De un modo general estamos interesados en obtener de las lecturas el máximo rendimiento didáctico desde un punto de vista matemático, procurando que existan distintos niveles de profundización en dichas lecturas. Más concretamente, nos planteamos los siguientes objetivos:

- Elaborar materiales para trabajar en el aula la comprensión lectora en distintas áreas o materiales del currículo, muy especialmente, en las matemáticas.
- Resaltar la importancia de la lectura como medio para desarrollar las distintas competencias.
- Considerar las matemáticas como una ciencia social y cultural.
- Profundizar en la comprensión de los contenidos matemáticos que aparecen en los textos.
- Fomentar la lectura entre los alumnos y alumnas y desarrollar la competencia lingüística y matemática atendiendo simultáneamente a la mejora de las demás competencias: expresión cultural y artística, aprender a aprender, tratamiento de la información y competencia digital, la competencia social y ciudadana y el conocimiento e interacción con el mundo físico.
- Dar a conocer textos y lecturas con aplicaciones para la enseñanza de las matemáticas.
- Atender a la diversidad del alumnado mediante la selección de textos y lecturas.

# 3. ¿POR QUÉ UTILIZAR LA LECTURA EN CLASE DE MATEMÁTICAS?

Como parte introductoria del taller reflexionaremos sobre diversos aspectos que creemos conveniente tener en cuenta para la inclusión de la lectura en nuestras clases

## 3.1. MOTIVACIÓN

Todo el movimiento que realza el papel cultural y social de la matemática, le quita su imagen estereotipada de negativa y aburrida, para darle un papel destacado en la relación con el mundo. Una de las formas de establecer esta relación es considerar la matemática como elemento lúdico. El enlace entre el papel lúdico y la aparición de textos de valor literario con contenido matemático hace que consideremos que las matemáticas pueden emplearse para desarrollar competencias lingüísticas y comunicacionales en nuestros alumnos.

## 3.2. DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS

Para hacer una enseñanza dirigida a desarrollar competencias básicas en los alumnos, hay que promover situaciones que los enfrenten a situaciones prácticas en las cuales se relacionen con el conocimiento matemático, dándoles la ocasión de ser conscientes de su aprendizaje. La lectura de textos relacionados con las matemáticas en los que se contextualiza el conocimiento matemático, permite cubrir las dos primeras facetas de la enseñanza por competencia (resolver situaciones prácticas, contextualizadas, mediante un conocimiento matemático). Pero si además se planifican las actividades de manera adecuada, se estará tendiendo a que los alumnos aprendan a aprender, y sean conscientes de ello, ya que la lectura es un medio de contacto natural con el conocimiento.

Por tanto, la justificación de que la lectura es pertinente en educación matemática, y de que estas lecturas colaboran a desarrollar hábitos lectores, se basa en dos ideas fundamentales: considerar las Matemáticas como una ciencia social y cultural y resaltar la importancia de la lectura para desarrollar la mayoría de las competencias.

## 3.3. RELACIÓN ENTRE MATEMÁTICAS Y LITERATURA

La relación entre matemáticas y literatura es compleja (Del Río, 2010; Marín, 2006 y 2009). Desde el inicio, el mensaje matemático ha adquirido forma de texto. La especialización de las ciencias ha generado un estilo particular para cada narrativa, logrando que en la actualidad distingamos, a veces de manera abusiva, textos literarios de textos matemáticos. Eso es lo que hace que en los centros no se piense en matemáticas cuando se proyectan los planes de animación a la lectura.

Si bien es verdad que el texto matemático tiene una estructura que lo aleja de la literatura de creación, hay que reconocer que hay muchas clases de textos matemáticos, y que la conexión entre texto literario y texto matemático no es igual a lo largo de la historia ni de los textos. Observamos que en la utilización de la literatura en la enseñanza de las matemáticas aparecen diversas direcciones de trabajo. Junto a propuestas de trabajo que se valen de textos completos, empleándolos fuera del aula, de manera paralela al currículo, otros

proponen buscar textos para emplearlos de manera puntual en el aula (integrados en currículo) (Marín, 2006). Pero además hay otras variantes, como la creación de textos, el contar historias matemáticas, etc.

### 3.4. SELECCIÓN DE TEXTOS RELACIONADOS CON LAS MATEMÁTICAS

En la intersección (o interacción) entre literatura y matemáticas, podemos establecer los polos matemático y literatura como dos aspectos interesantes para caracterizar los textos. O sea, empleamos el grado en que están implicadas las matemáticas y el grado en que está implicada la literatura como dos dimensiones para clasificarlos.

Para estudiar el grado en que los textos implican la literatura, consideramos dimensiones que caracterizan una obra literaria: la intención artística del autor, la temporalidad, es decir, su relación con el momento histórico en que se crea y el grado en que representa valores y sentimientos universales.

A partir de estos criterios, podemos emplear las siguientes dimensiones que relacionan las matemáticas y la literatura:

- El Grado de creación literaria que encierran. Algunos libros tienen una intención analítica, adquiriendo la forma de ensayo, mientras que otros tienen una intención artística, lúdica, con forma narrativa
- La intención divulgadora del autor, que puede ir desde plantear cuestiones y pasatiempos matemáticos a crear un mensaje onírico sobre las matemáticas
- La forma de implicar las matemáticas en la historia. En un extremo se sitúan los libros cuyo objeto principal es la matemática, mientras que en el otro extremo, están los que hacen alguna alusión a los conceptos matemáticos.

## 4. RECURSOS PARA LEER MATEMÁTICAS

En este momento del taller, presentamos diversas propuestas didácticas para estimular recíprocamente las matemáticas y la literatura. Partimos de ejemplos muy concretos que son fácilmente generalizables a otros textos y contenidos matemáticos.

### 4.1. PRUEBAS INICIALES

Para motivar la lectura durante el curso, es aconsejable que enseñemos a nuestros alumnos a utilizar "el sentido matemático" al leer un texto. Sugerimos que, como prueba inicial al principio del curso, seleccionemos un fragmento de uno de los libros y les "enseñemos a leer matemáticas". Como ejemplo, presentamos una prueba inicial de lectura para 4º E.S.O. El libro seleccionado es El diablo de los números. Pretendemos extraer dos ideas fundamentales: el concepto de número primo y la imposibilidad de dividir entre cero.

### 4.2. ELABORACIÓN DE UN PLAN DE LECTURA EN MATEMÁTICAS

En un marco general de un plan de apoyo a la lectura o simplemente en una programación de departamento, podemos seleccionar una serie de títulos para nuestra biblioteca de aula. La cantidad de libros a leer por cada alumno, sus títulos, las actividades a realizar, la forma de evaluarlos y otros muchos aspectos

didácticos permiten la adaptación a cada clase o alumno, siendo una buena herramienta para atender a la diversidad. El diseño de las actividades que proponemos está basado en experiencias ya realizadas, pero seguramente admiten todas las variaciones para adaptarlas a las distintas programaciones. Es conveniente una buena coordinación con el resto de Departamentos, especialmente el de Lengua, para marcar las pautas a seguir en estos proyectos y en el resto de lecturas de otras asignaturas. A modo de ejemplo, presentamos un plan de lectura desde Primaria hasta Bachillerato.

### 4.3. LECTURAS EN PARALELO

Una propuestas de trabajo concreta es utilizar los textos completos, empleándolos fuera del aula, de manera paralela al currículo. Pretendemos analizar las posibilidades didácticas de textos para la investigación, el planteamiento y la resolución de problemas. Para ilustrar estas ideas, mostraremos como a través del libro Planilandia (Abbott, 2008) trabajaremos paralelamente los conceptos de forma geométrica y dimensión. De manera análoga, se puede elaborar el material necesario para trabajar paralelamente otras lecturas con otro contenido matemático: "El hombre que calculaba" y los números, "Un matemático lee el periódico" y la estocástica, "El hombre anumérico" y la probabilidad…

El principal aplicación didáctica que pretendemos conseguir al incluir nuestro programa de lectura es conseguir que los alumnos "lean con sentido matemático", es decir, le marcamos unas pautas para guiar su lectura:

- Señalar los contenidos matemáticos.
- Relacionarlos con los estudiados en clase.
- Conocer protagonistas y hechos fundamentales de la historia de las matemáticas.
- Encontrar matemáticas en contextos reales.
- Profundizar e investigar en un contenido matemático.

### 4.4. LECTURAS INTEGRADAS EN EL CURRICULUM

En los texto anteriores hemos destacado la intencionalidad del autor para presentar los contenidos matemáticos, convirtiendo a la obra literaria en el contexto en el que el aprendizaje matemático tiene lugar. Sin embargo, la relación entre matemáticas, enseñanza y literatura puede enriquecerse desde otra perspectiva, en la que son las propias matemáticas las que aportan una mejor comprensión de un fragmento literario, incluso cuando el texto no persigue ninguna enseñanza matemática.

El enfoque es diferente al presentado en las lecturas en paralelo, ya que en este tema las lecturas aparecen integradas en el curriculum. Presentamos diversas actividades para estudiar con mayor profundidad los aspectos matemáticos de un texto, lo que puede favorecer una mejor comprensión de los mismos y motivar la lectura.

Destacamos tres aportes principales para diseñar actividades de lectura integradas en el currículum: destacar cuánta matemática hay en las novelas, reconocer el papel de la literatura en la enseñanza de las matemática y seleccionar textos matemáticos de diversos autores. Como aplicación práctica y a modo de ejemplo, exponemos un ejemplo de selección de lecturas sobre las que

trabajar específicamente la resolución de problemas. Pretendemos que el análisis de un fragmento literario o un libro de literatura universal con alusiones matemáticas se convierta en una propuesta de aula que, además de estudiar las matemáticas que contiene, estimule su lectura.

## 5. DISEÑAR PROPUESTAS DE AULA

A partir de todo lo expuesto anteriormente, pretendemos trabajar en grupos reducidos para elaborar propuestas de aula concretas para finalmente compartirlas y reflexionar sobre ellas.

En este trabajo en grupo seleccionaremos una lectura en paralelo, un fragmento literario o un libro de literatura universal con alusiones matemáticas y estudiaremos las matemáticas que contiene y cómo las presenta el autor, analizaremos sus cualidades para proponerlo como texto para estimular la lectura y diseñaremos propuestas de aula a partir de ellas.

Finalmente, expondremos otras ideas que pueden complementar los temas abordados en el taller: proyectos literarios, taller de lectura para padres, etc.

## REFERENCIAS.

ABBOTT, E. A. (2008). *Planilandia*. Barcelona. Editorial Laertes.

DEL RÍO, J. (2010*). También los novelistas saben matemáticas*. León. Editorial Akrón.

GRUPO LAX (2008). *El fomento de la lectura en el aula de matemáticas: aprender a leer matemáticas*. Proyecto financiado por el Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

GRUPO LAX (2009, julio). *Aprender a leer matemáticas*. Comunicación presentada en el XIV Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (XV JAEM). Gerona (España). Organizado por la Federación de Entidades para la Enseñanza de las Matemáticas en Cataluña.

MARÍN, M. (2006). Las matemáticas de una novela. *SIGMA* nº 29, 159-172.

MARÍN, M. (2009). Matemáticas y literatura, un binomio perfecto. *UNO* 50**,** 47-63.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de Diciembre. *BOE nº 5 de 5/1/2007*.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003*. Santillana, Madrid (España).

RAMÍREZ, R. (2012, julio). *Recursos para introducir la lectura en el aula de matemáticas*. Taller presentado en la VII Escuela de educación matemática Miguel de Guzmán: Procesos comunicativos y enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. UNIA, Rábida (Huelva).

RAMÍREZ, R y GRUPO LaX (2011, julio). *Los profesores de matemáticas también leen*. Comunicación presentada en el XV Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (XV JAEM). Gijón (España). Organizado por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática (SADEM) Agustín de Pedrayes.

RAMÍREZ, R. y LARGO, A. (2007). A leer matemáticas. *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, 24* (3), 123-135.

# INTRODUCCIÓN AL GEOGEBRA 3D

**José Manuel Dos Santos Dos Santos**,
Instituto GeoGebra Portugal, *Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico do Porto – Portugal*

## RESUMEN.

Con GeoGebra 5.0 el desarrollo de aplicaciones para la geometría en el espacio son, cada vez, más accesibles y rápidas de elaborar en el aula. Así, este taller tiene como objetivo introducir los procedimientos básicos para utilizar las capacidades 3D de la versión de GeoGebra 5.0 Beta. Se mostrará la construcción de algunos ejemplos de aplicaciones que permiten el estudio de: geometría analítica en el espacio; de situaciones relacionadas con modulación 3D y el análisis de gráficas de funciones; las secciones de un plano en un doble cono; y otras situaciones útiles para el desarrollo de habilidades de visualización para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El taller se desarrollará a partir de secuencias de comandos o herramientas, ayudando a los participantes para realizar las tareas, cada una de ellas ejemplificadas durante la sesión.

**Nivel educativo**: Cursos de Educación Secundaria

## 1. INTRODUCCIÓN.

Para trabajar en 3D con GeoGebra, tenemos que utilizar la versión 5.0 beta disponible en http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp, y estar seguros de que contamos con la Vista Gráfica 3D activa. Los objetos pueden ser creados utilizando las herramientas de la barra superior, o un comando en el campo de entrada, en la parte inferior, como puede verse en la Figura 1.

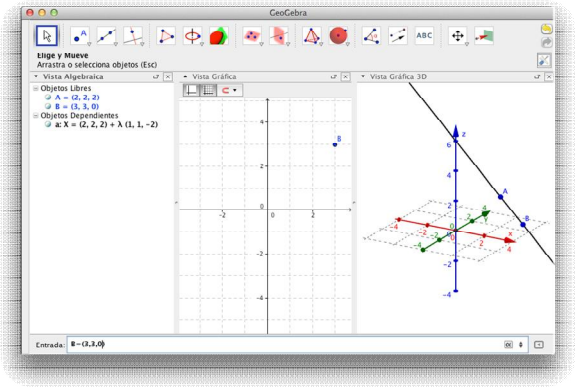



Figura 1. Vista típica del GeoGebra 5.0 con la Vista Algebraica, Vista Gráfica e Vista Gráfica 3D.

La imagen, que se presenta en la Figura 1, corresponde a la disposición típica de las vistas, sin embargo, esta disposición puede ser cambiada por el usuario. Se observa, en la figura 1, dos puntos A y B y una línea en la Vista Gráfica 3D.

En la Vista Gráfica sólo se observa el punto B, ya que es el único objeto que pertenece al plano xOy. Por último, en la Vista Algebraica, se encuentran las coordenadas de los puntos [A=(2,2,2) , B=(3,3,0)] y la recta AB, representada por la letra a, y su ecuación vectorial X=(2,2,2)+λ (1,1,-2).

| Objetos | Herramientas | Comandos |
|---|---|---|
| Puntos. |  | A=(3,2,5)<br>Dado un punto B en el espacio obtenemos sus coordenadas a partir de x(B), y(B) e z(B). |
| Circunferencias en el espacio. |  | Circunferencia[<Recta(eje)>, Punto(centro)] |
| |  | Circunferencia[<Punto(centro)>, Radio(número o valor numérico), <Recta(eje)>] |
| |  | Circunferencia[ <Punto>, <Punto>, <Punto>] |
| Intersección de un plano con una cuádrica o polígono. |  | IntersecaRecorridos[ <Plano>, <Cúadrica> ] |
| Planos. |  | Plano[ <Punto>, <Punto>, <Punto> ] |
| |  | Plano[ <Punto>, <Recta>] |
| Plano paralelo a un otro por un punto exterior. |  | Plano[ <Punto>, <Plano> ] |
| Plano perpendicular a una recta o dirección por un punto exterior. |  | PlanoPerpendicular[ <Punto3D>, <Recta3D> ] |
| Esferas. |  | Esfera[ <Punto>, <Punto>] |
| |  | Esfera[ <Punto>, <Radio (valor numérico)> ] |
| Pirámides |  | Pirámide[ <Punto>, <Punto>, ... ] |
| Prismas |  | Prisma[ <Polígono>, <Punto> ]<br>Prisma[ <Punto>, <Punto>, ... ] |
| Extruda a pirámide o cono |  | Pirámide[ <Polígono>, <Altura (valor)> ]<br>Cono[< Circunferencia >, <Altura (valor)>] |
| Extrusíon a prisma o cilindro |  | Prisma[ <Polígono>, <Altura (valor)> ]<br>Cilindro[ < Circunferencia >, <Altura (valor)> ] |

Tabla 1. Objetos elementales, herramientas e comandos

Objetos geométricos elementales tales como puntos, objetos rectos o planos, círculos o esferas, y otros se obtienen de una orden introducida en la barra de entrada, o una herramienta. En la Tabla 1 se presentan las herramientas y comandos que permiten la obtención de algunos de estos objetos.

# 2. TAREAS.

De seguida se presentan las tareas a ser realizadas durante el taller. La primera relaciona geometría e funciones. Las cuatro siguientes se centran en la visualización de propiedades geométricas en el espacio. La última se foca en la exploración de las sección originada por un plano en un doble cono.

## 2.1. CUBO DE ARISTA A.

En esta primera tarea se pretende construir un cubo, en que la medida de su arista varia con un selector. Se analiza las secciones de un cubo por un plano que intercepta tres aristas que concurren en un vértice del cubo. De un modo exploratorio se obtendrá la variación del área y del perímetro de la sección en función de la distancia del plano hasta el vértice del cubo.

1. Iniciemos el GeoGebra versión 5.0 Beta, guarde el archivo com el nombre cuboarista_a.ggb.
2. Dirigiéndose al menú vista, seleccione la Vista Gráfica 3D.

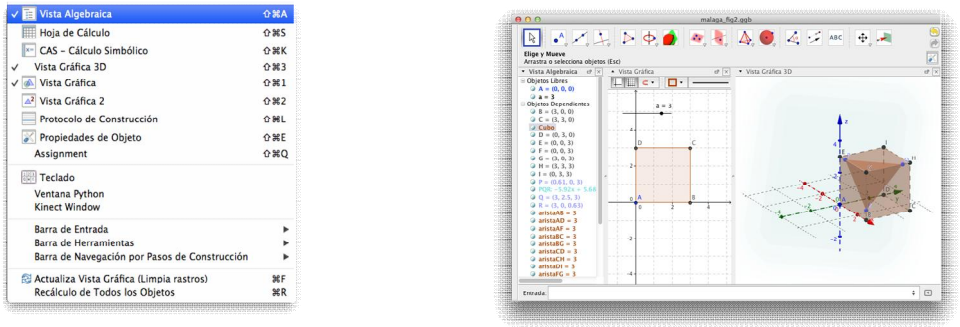



Figura 2. Menú Vista, a la izquierda, y aspecto del cubo que se pretende construir con base en el proceso presentado en el paso 6, a la derecha.

3. En la Barra de Entrada escriba a=3, de entrada, y exhibir el selector.
4. Se definen os vértices del cubo a partir del vértice A, adicionando un vector de norma a en las tres direcciones de los ejes de referencia, usando la barra de entrada usando, por ejemplo, los siguientes comandos:

   A=(0,0,0)
   B=A+(a,0,0)
   C=A+(a,a,0)
   D=A+(0,a,0)
   E=A+(0,0,a)

5. Por ultimo el cubo es definido como un prisma de Vértices A,B,C y D la base, un cuadrado, con lado de arista [AE] que mide a. Ca=prisma[A,B,C,D,E] .Guarde el archivo. Guarde copia de este archivo con el nombre cuboarista_a1.ggb.
6. Una construcción alternativa, usando el comando cubo, seria la secuencia de comandos:

   A=(0,0,0)
   B=A+(a,0,0)

E=A+(0,0,a)
Cubo[A, B, Vector[A, E]]

7. Marque los puntos P, Q y R que pertenecen a aristas que concurren en un vértice del cubo, por ejemplo el punto G.
8. Defina el plano PQR, con la herramienta ,o, en alternativa, con el comando Plano[P,Q,R].
9. Mueva los puntos e observe la sección provocada por el plano en el cubo.
10. Vamos a determinar la distancia de vértice del cubo, G, al plano PQR. Por ejemplo, siguiendo la secuencia de comandos:

    b=Perpendicular[G,PQR]
    S=Interseca[b,PQR]
    dist=Distancia[G,S]

( al alterar la posición de los puntos P, Q y R se altera el valor de la distancia *dist* )

11. Para analizar la variación de la área e el perímetro del polígono PQR en función de la distancia *dist*, representemos los puntos M y N.

*Nota: se considera el problema para P, Q y R que no coinciden con los vértices del cubo.*

a. M=(dist, Area[ Polígono[P,Q,R] ])
b. N=(dist, Perímetro[ Polígono[P,Q,R] ])

12. Vamos alterar las características de los puntos M y N, en el menú Propiedades de Objetos, de modo a obtener su rastro, representarlos con colores distintas, activar su representación en la Vista Gráfica 2. Véase la figura 3.

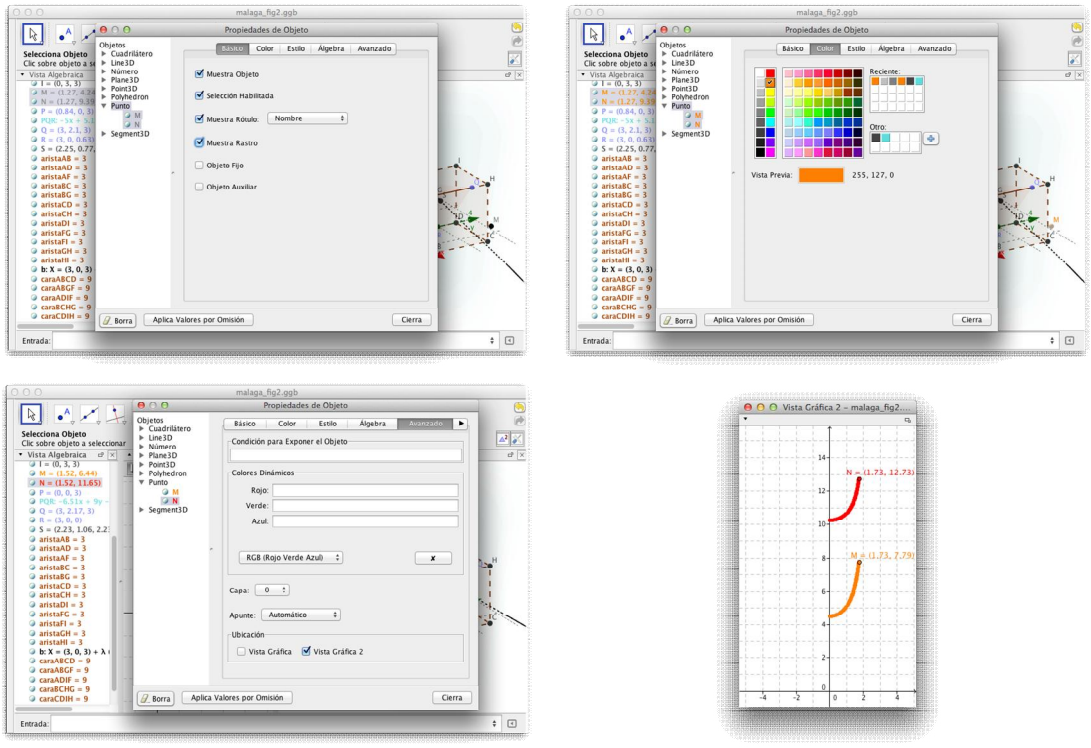



Figura 3. Menú Propiedades de Objetos, diferentes sub-menús, aplicado a puntos.

13. Mueva los puntos P, Q, R observe el rastro de los puntos M y N. Tomando a=3 y para cada una de las medidas, indique entre que valores pueden variar.

14. Haga una aplicación de modo a explorar planos paralelos a diagonales faciales del cubo, $\alpha_a$. Investigue el área e perímetro de las secciones por los planos $\alpha_a$ en el cubo.

## 2.2. CONSTRUCCIONES COM CUBOS DE ARISTAS CONGRUENTES.

1. Después de construir un cubo, seleccione una de sus caras, y usando la herramienta  , *Extrusión*, usando para la medida de la altura el valor de *a*, críe una construcción con cubos.

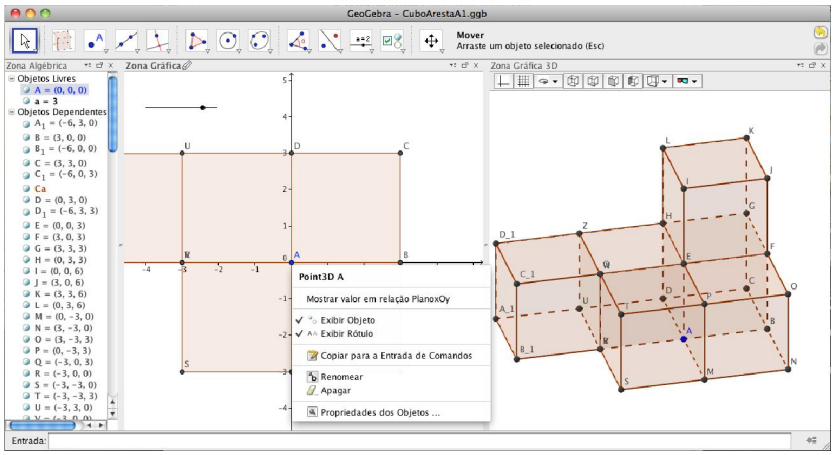
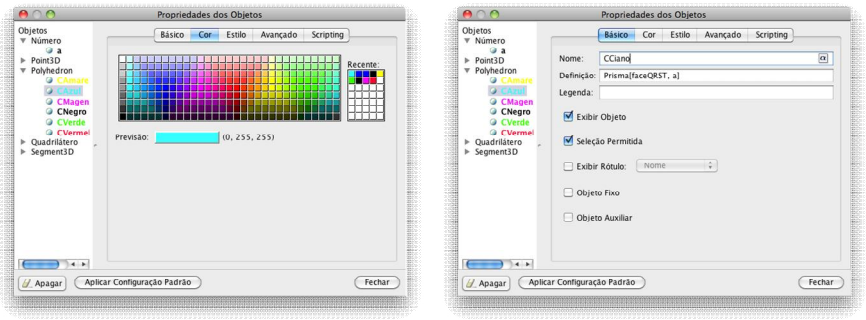



Figura 4. Ejemplo de una construcción pedida en el paso 1.

2. Utilice el botón derecho del *ratón* sobre un punto, para acceder al menú. *Propiedades de objeto* …
3. De modo a esconder los *puntos 3d*, e a alterar los colores de los cubos, como se sugiere en las imágenes de la figura 5.



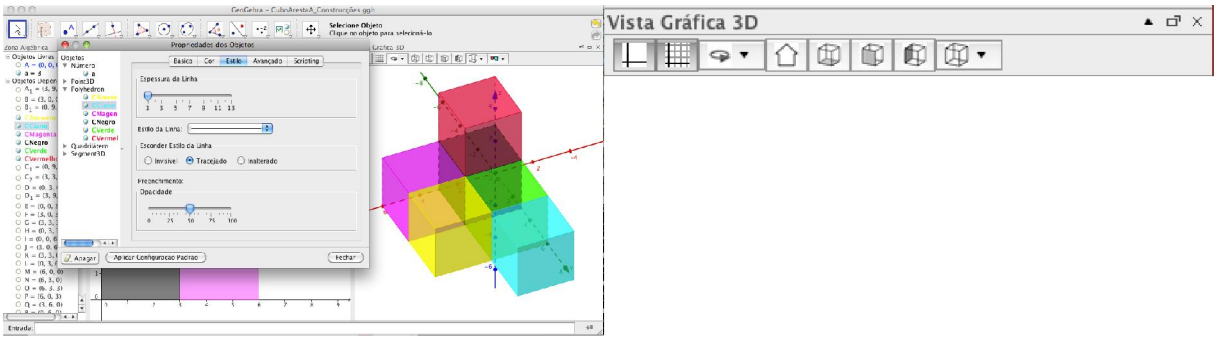



Figura 5. Menú Propiedades de Objetos, diferentes sub-menús, aplicado a puntos.

4. Explore la construcción con la herramienta ,*Rota Vista Gráfica 3D*.

## 2.3. TETRAEDRO COM VÉRTICES EN UN CUBO.

*1.* Construye un cubo usando el comando *Cubo[ <Punto>, <Punto>, <Dirección> ].* Por ejemplo marque los puntos A y B, con la herramienta ,de seguida escriba Cubo[A, B, zAxis3D], en la barra de entrada.

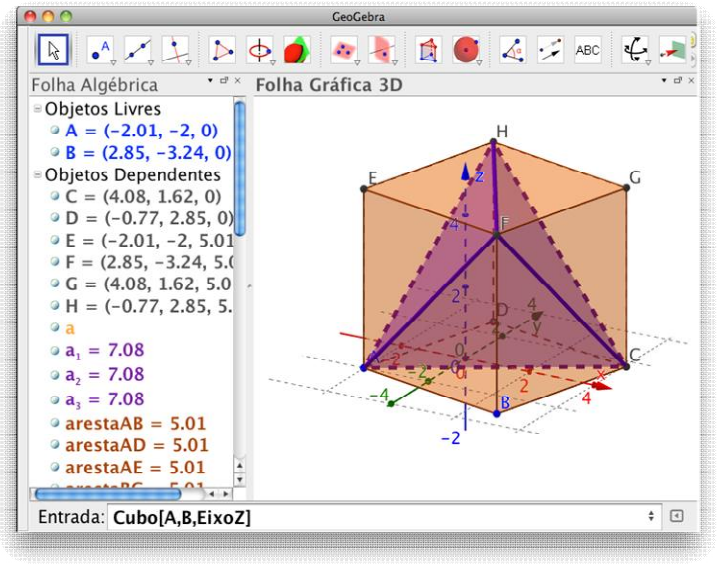



Figura 5. Tetraedro con vértices en un cubo.

2. Para definir el tetraedro podemos definir los cuatro triángulos equiláteros que integran las caras del sólido, como ejemplo véase la figura 5. Así, las podemos definir usando a herramienta polígono , o los comandos siguientes:

f1=polígono[A,C,F]

f2=polígono[A,C,H]

f3=polígono[A,F,H]

f4=polígono[C,F,H]

3. Finalmente altere las propiedades de los objetos de modo a ajustar los colores y su visibilidad.
4. El tetraedro puede también ser definido usando *Tetraedro[ <Punto>, <Punto>, <Dirección> ].* Como construiría el tetraedro usando este comando?
5. Experimente los comandos abajo para representar otros poliedros platónicos para allá de los hexaedros e tetraedros regulares.

Dodecaedro[ <Punto>, <Punto>, <Dirección> ]

Icosaedro[ <Punto>, <Punto>, <Dirección> ]

Octaedro[ <Punto>, <Punto>, <Dirección> ]

## 2.4. PIRÁMIDES- CUAL O NÚMERO MÍNIMO DE VÉRTICES PARA OBTENER UNA PIRÁMIDE?

Para conducir una exploración relacionada con la respuesta a la cuestión anterior, puede sugerir-se a los alumnos que marquen puntos en la vista 2D para definir las bases, un punto en 3D para definir el vértice opuesto a la base y usen el comando pirámide en la barra de entrada.

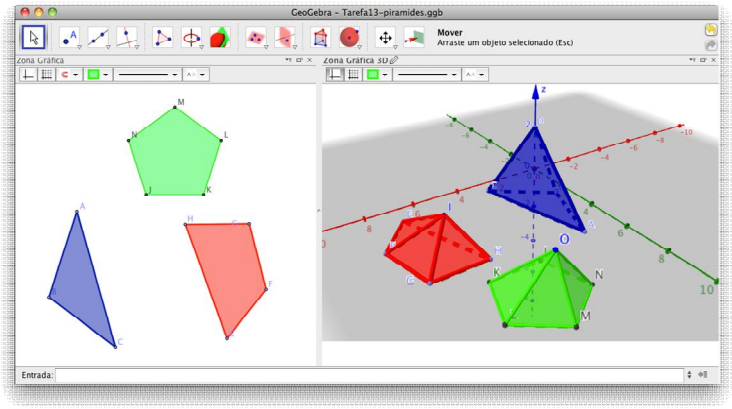



Figura 6. Pirámides en la Vista Gráfica 3D e sus bases en la Vista

En la aplicación que dio origen a la imagen de la figura 6, se uso el GeoGebra 5.0 del modo siguiente:

1. Se activo la Vista Gráfica, Vista Gráfica 3D y Barra de Entrada, usando el menú Vista .
2. Para la pirámide azul:

a. Se marcaran con la herramienta tres puntos no plano xOy, o Punto [xOyPlane];
b. Um punto no eje Oz, o Punto[zAxis3D];
c. Se uso el comando P_{Az}=Pirámide[A,B,C,D].

3. En el caso de la pirámide roja:

   a. Con la herramienta se marcaran cuatro puntos no plano xOy;
   b. Um punto en el espacio escribiendo en la barra de entrada

I=(6, 3, 1);

c. Se uso el comando P_{Va}=Pirámide[E,F,G,H,I] .

4. Por último, la pirámide verde fue realizada de u modo diferente.
   a. Se marcaran, con a herramienta , los puntos J y K, en la Zona Gráfica;
   b. En la Zona Gráfica, con a herramienta polígono regular, se construyo el polígono de la base, un pentágono, con los puntos J, K y el número de vértices 5;
   c. Finalmente, se uso el comando P_{Vd}=Pirámide[J, K, L, M, N, O].
5. Use la herramienta para construir otras pirámides.

La aplicación, permitirá alterar las vistas y los vértices de las pirámides. Permitiendo obtener una verificación de que el número mínimo de puntos para definir una pirámide es de cuatro, en que uno de ellos no puede estar en el mismo plano de los otros tres puntos. Puede también explorar-se el concepto de pirámide oblicua y recta.

## 2.5. EXPLORAR LA ESFERA.

1. Abra el GeoGebra 5.0 y exhiba la Vista Gráfica y la Vista Gráfica 3d.
2. En la *Vista Gráfica use la* herramienta , Nuevo Punto y marque dos puntos A, origen del sistema de ejes, y B. Use la herramienta , Circunferencia(Centro,Punto) y marque a circunferencia de centro en A y que pasa por B.
3. En la *Vista Gráfica 3d* use la herramienta , Esfera(Centro,Punto) y obtenga la esfera de centro A y cuya superficie contiene el punto B.

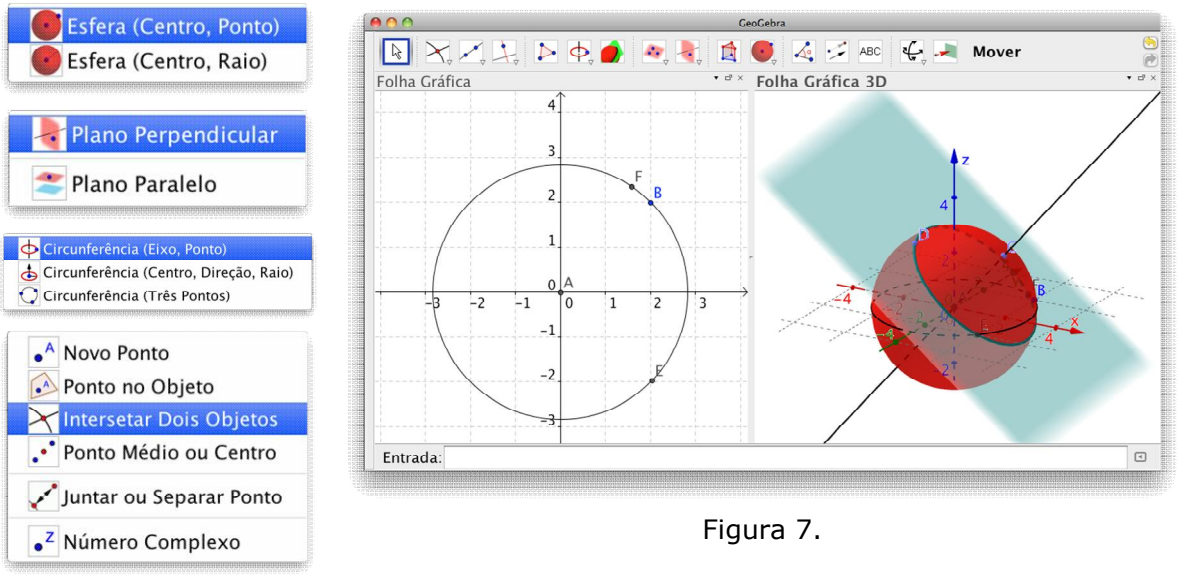



Figura 7.

4. En la *Vista Gráfica 3d*, use la herramienta ,punto, para marcar el punto C sobre a superficie esférica. De seguida use la herramienta ,Reta(Dos Puntos), para marcar la reta AC.

5. Marque un punto D sobre la superficie esférica.
6. Usando la herramienta ,Plano Perpendicular, obtenga el plano perpendicular a AC que pasa por D.
7. Recorriendo a la herramienta ,Circunferencia(Eje,Punto), construya la circunferencia de eje AC y que contiene D.
8. Intercepte el plano con la superficie esférica usando a herramienta ,Interseca Dos Superficies.
9. Usando la herramienta ,Interseca Dos Superficies, obtenga os puntos F y E, intersección de las dos circunferencias. Obtendrá algo parecido a la figura 7 en la *Vista Gráfica 3D*.
10. Mueva los puntos B, C y D y explore la aplicación.
11. Use las herramientas aquí sugeridas, o otras, para construir un cubo con vértices sobre la esfera.

## 2.6. CÓNICAS EN 3D.

1. Abra el GeoGebra en la versión 5.0.
2. En el menú vista active la Vista Gráfica 3D.
3. Use la barra de comandos para dar entrada, de cada uno de los comandos:

*. a=ConoInfinito[(0, 0, 0), (0, 0, 3), 45°]*
*i. A= (4,4,0)*
*ii. B=(0,-4,0)*
*iii. C=(0,0,4)*
*iv. b=Plano[A,B,C]*

4. Mueva los puntos A, B y C en la Vista Gráfica 3D y observe la intersección del cono con o plano.

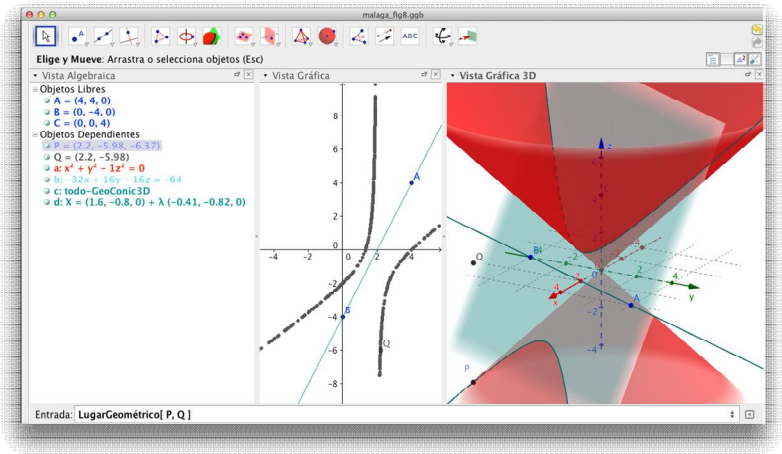



Figura 8. Doble cono interceptado con el plano ABC y proyección sobre xOy.

5. Determine la intersección de cono con el plano, usando la herramienta  , seleccionando c la intersección de las dos superficies, o escribiendo *c=Interseca[a,b]* o *IntersecaRecorridos[a, b],* y dando entrada, en la barra de comandos. De este modo observara la cónica.
6. Para obtener la intersección de ABC con xOy puede usar la herramienta  , o dar entrada del comando *IntersecaRecorridos[xOyPlane, b]*
7. Mueva los puntos A, B y C e observe las diferentes cónicas que se obtienen.
8. Marque un punto sobre la cónica, usando la herramienta  , o el comando P=Punto[c]. Mueva el punto P sobre la cónica c.
9. Marque el punto Q=(x(P), y(P)), active su rastro  , y mueva el punto P, obtendrá la proyección de la cónica c en el plano xOy.

## REFERENCIAS.

Azevedo, A. Dos Santos, J. Correia, P. (2011) O GeoGebra no desenvolvimento dos temas da Álgebra e da Geometria no 3o Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, tarefas para a sala de aula e conhecimento do software necessário à ação do professor. Curso n.3, ProfMat 2011. Lisboa

Azevedo, A. Dos Santos, J. Correia, P. (2011) O GeoGebra no desenvolvimento dos temas e competências matemáticas no 1o e 2o Ciclo do Ensino Básico, tarefas para a sala de aula e conhecimento do software imprescindível à ação do professor. Curso n.4 , ProfMat 2011. Lisboa

Dos Santos, J. (2012) Un taller en GeoGebra 3D. I Encuentro en Andaluzia: GeoGebra en el Aula. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Granada, 14 de Abril de 2012.

Dos Santos, J. (2011) Notas da disciplina Matemática. Materiais y Tecnologias, opção do 3º ano do Curso de Educação Básica, ESE - IP Porto. Porto. ( Materiales poli-copiados)

Trocado, A. (2012) Relações entre a Geometria e as Funções com o GeoGebra 5.0. II Da Geogebra Portugal. Sessão Prática. ESE-IP Porto. Porto.

# TALLER MATEMÁTICAS EN LA MAGIA

**Manuel Amaro Parrado**,
*I.E.S. Jándula, Andújar (Jaén)*

## RESUMEN.

Con este taller se pretende mostrar la potencialidad que tienen ciertos trucos y metodologías empleadas por los magos a la hora de explicar numerosos conceptos matemáticos. Empleando cálculo mental, álgebra básica, álgebra más avanzada, ecuaciones, matrices, propiedades interesantes de los números, sistemas de numeración y otros recursos matemáticos, se desarrollarán una serie de juegos cuya finalidad principal es llamar la atención del alumno y conseguir que él mismo modifique las condiciones para crear sus propios trucos.

**Nivel educativo**: Cualquier curso de la ESO y Bachillerato.

## 1. INTRODUCCIÓN.

En este taller realizaremos numerosos juegos mágicos con cartas, dados, tarjetas, calculadora, cálculo mental…

Una vez realizados los trucos, se revelará la parte matemática, permitiendo que los asistentes a su vez realicen sus propias herramientas mágicas para que practiquen los trucos en parejas o grupos. También se sugerirá que ellos mismos propongan sus propias alternativas de juego.

## 2. ACTIVIDADES A DESARROLLAR.

El objetivo de la actividad es dar a conocer algunos trucos de magia basados en su casi totalidad en principios matemáticos. Algunos de estos trucos serán:

- El número de oro
- Tarjetas mágicas I
- Tarjetas mágicas II
- Las cuatro cartas
- Las nueve cartas
- El matemago desordenado
- Sumas ocultas de dados
- Trucos mentales
- Trucos sencillos con álgebra
- El mago ligón
- Chinos en el mundo
- El 142857
- Las 21 cartas

Una vez realizados los trucos de magia, se discutirán/explicarán los principios matemáticos subyacentes, la forma de aplicarlos en el ámbito docente, y las posibles variaciones que de dichos juegos se pueden realizar.

# ZOCOS

# MATEMÁTICAS RECREATIVAS

**Galán Mata, Carmen**,
I.E.S. P.J. Miravent (Isla Cristina)
**González Ortiz, Alicia**,
I.E.S. P.J. Miravent (Isla Cristina)
**González Ortiz, Fidela María**,
I.E.S. P.J. Miravent (Isla Cristina)
**González Ortiz, Alejandra**,
IES Turóbriga (Aroche)

## RESUMEN.

En este zoco pretendemos exponer el trabajo que hemos desarrollado en nuestro centro en los últimos cursos, tanto el elaborado por nosotras como profesoras, como el que han llevado a cabo nuestros alumnos y alumnas. Así, presentamos muestras de problemas de ingenio, pistas para descubrir matemáticos o matemáticas famosos, collage de matemáticos ilustres, tarjetas matemáticas navideñas, matemáticas relacionadas con nuestra vida cotidiana y una muestra de las fotografías presentadas para la última edición de nuestro concurso.

**Nivel educativo**: ESO y Bachillerato

## 1. INTRODUCCIÓN

En este zoco pretendemos exponer el trabajo que hemos desarrollado en nuestro centro en los últimos cursos, tanto el elaborado por nosotras como profesoras, como el que han llevado a cabo nuestros alumnos y alumnas. Así, presentamos muestras de problemas de ingenio, pistas para descubrir matemáticos o matemáticas famosos, collage de matemáticos ilustres, tarjetas matemáticas navideñas, matemáticas relacionadas con nuestra vida cotidiana y una muestra de las fotografías presentadas para la última edición de nuestro concurso

Para el Zoco que proponemos necesitaremos varios paneles o paredes para pegar el material que llevamos. Todo el material se compone de folios tamaño A4 plastificados. En total llevaremos, aproximadamente, 73 folios del material que detallamos a continuación

## 2. MATERIAL QUE PRESENTAMOS.

### 2.1. PROBLEMAS DE INGENIO.

Presentamos una muestra de problemas de ingenio que hemos elaborado para la participación de nuestro alumnado de un concurso del mismo nombre. Estos problemas eran buscados y presentados por nosotras de forma semanal y el alumnado debía resolverlos en el plazo de una semana, al término de la cual se

renovaba el problema y se exponía un ranking de la clasificación (el problema bien resuelto tenía una puntuación de 10)
Presentaremos diez problemas a modo de ejemplo de tamaño folio A4 plastificados.

### 2.2. El matemático misterioso.

Llevaremos una muestra del concurso también del mismo nombre que hemos desarrollado en el centro en condiciones parecidas al "Problema de la Semana". La muestra consta de cinco series de pistas correspondientes a cinco matemáticos ilustres y cinco collages con la biografía de los mismos. Todo ello tamaño folio A4 y plastificado.

### 2.3. Tarjetas matemáticas Navideñas

Presentamos las mejores tarjetas que ha elaborado nuestro alumnado en los dos últimos cursos para el concurso anual celebrado en Navidad. Las tarjetas son de diversos tamaños, todos ellos algo inferiores a un folio A4 y las llevaremos también plastificadas. La muestra se compone de diez tarjetas aproximadamente.

### 2.4. Fotografía Matemática

Expondremos las mejores fotografías presentadas por el alumnado en el último concurso de Fotografía Matemática celebrado en el centro. Serán quince fotografías de tamaño 10x18 que van pegadas y plastificadas en una cartulina de tamaño algo mayor de un folio A4

### 2.5. Matemáticas de la Vida Cotidiana

Presentaremos algunos ejemplos que hemos elaborado para exponer en nuestro "Tablón de las Mates" para mostrar al alumnado que las matemáticas están presentes en nuestro entorno y en cualquier parte. Diez folios A4 plastificados.

### 2.6. Díselo con Matemáticas

Presentamos las tres cartas de amor ganadoras de nuestro primer concurso de Cartas de Amor Matemáticas, celebrado el día 14 de febrero en el centro con el nombre "Díselo con Matemáticas". Las tres cartas están en formato folio A4 plastificado.

### 2.7. Logos Matemáticos

Levaremos como muestra de nuestro concurso de logos matemáticos que nos han representado curso tras curso cinco de ellos, en tamaño folio A4 también plastificados.

### 2.8. Sudokus

Para finalizar la muestra presentamos algunos de los Sudokus que hemos propuesto a nuestro alumnado también dentro del marco del juego y de las matemáticas recreativas, como un concurso anual que ha tenido mucha aceptación. Llevaremos diez de esos sudokus en folios A4

# LA DISCOTECA DE LOS NÚMEROS

**Iranzu López de Dicastillo Garnica**,
*Colegio de Educación Especial Los Ángeles, Logroño (La Rioja)*
**Mª Inmaculada Palomo Sáenz**,
*Colegio San José, Logroño (La Rioja)*
**Mª Leonor López de Dicastillo Roldán**,
*Diseño gráfico e ilustraciones (La Rioja)*

## RESUMEN.

El trabajo que presentamos es un proyecto didáctico para la construcción del número y de las operaciones básicas. Tiene como objetivo principal que cada alumno construya por sí mismo la serie numérica de forma activa, natural y progresiva, siguiendo su propio ritmo de aprendizaje, y que sea capaz de operar con ella y aplicarla en sus situaciones cotidianas.

Entre las características que lo diferencian de otros métodos de aprendizaje destacamos el respeto y atención a las diferencias individuales, por haber nacido dentro de ellas, y la disposición en la que pone a los alumnos para que éstos puedan inventar, dar soluciones, prever resultados, calcular, intuir lo que va a pasar y plantear soluciones.

**Nivel educativo**: Educación Infantil y Educación Especial.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Cuando trabajas con alumnos con necesidades educativas especiales te ves obligado en muchas ocasiones a adaptar los métodos y materiales del mercado, y a inventar mil y una ideas que faciliten a estos alumnos la adquisición de gran parte de los contenidos curriculares.

Pocos métodos tienen en cuenta aspectos como, por ejemplo, la edad cronológica de estos alumnos. Es verdad que su inteligencia puede ser la de un niño de infantil, pero sus experiencias vitales, su entorno, su cuerpo, su aspecto físico tienen diez, quince o veinte años. ¿Cómo vamos a motivarles entonces contando patitos o celebrando su cumpleaños en un parque infantil?

De esta necesidad surgió la discoteca de los números. Al principio sólo fue un calendario con el que los alumnos pudieran aproximarse a la idea del tiempo y de la sucesión de los días, pero poco a poco fueron capaces, además, de generar los números diferenciando entre unidades (niños en la cafetería) y decenas (corros de niños bailando).



Figura 1. La discoteca de los números.

# 2. DESARROLLO DE LAS SESIONES DE TRABAJO.

La discoteca estará colocada en un lugar del aula visible para todos los alumnos y accesible, de forma que cada día un alumno sea el encargado de trabajar con ella. Mide 150 x 70 cm aproximadamente.

## 2.1. SESIÓN DE PRESENTACIÓN.

El primer día se presenta la discoteca a los alumnos para ir hablando de las diferentes partes de que consta.

A la derecha está la TAQUILLA y diez fichas con las caras de los niños que están esperando para entrar. Recabamos la atención en el PORTERO. Él es el encargado de abrir o cerrar la discoteca con sus respectivas llaves (+) y (-), y es también quién nos dirá cuántos niños pueden entrar o salir a la vez, indicándolo con un cartel colocado a su lado.

Una vez dentro de la discoteca vemos la CAFETERÍA, con diez taburetes colocados en círculo donde los niños que vayan entrando deberán permanecer hasta que se complete el corro, y un gran cuadro negro donde colocaremos el número (de color negro) de niños que hay sentados en los taburetes.

Finalmente, a la izquierda está la DISCOTECA. En ella aparece un escenario con instrumentos, preparado para que aparezcan los músicos (la plataforma del escenario gira para que aparezcan o desaparezcan los músicos), y varios corros de diez círculos cada uno, donde se van a colocar los niños que entren de la cafetería. Vemos también que hay un cuadro rojo donde colocaremos el número (de color rojo) de corros que hay en la discoteca.

## 2.2. PRIMERA SESIÓN.

Para poder empezar a jugar se colocan en la taquilla los números ordenados del 1 al 10 y las fichas con los diez niños que esperan para entrar. Como vamos a empezar utilizando la discoteca como un calendario, cada día entrará un niño por lo que en el cartel del portero pondrá el número 1. Se abre la taquilla, se coloca la llave del portero que indica la discoteca está abierta (+) y se coloca en el tejado un letrero con el nombre del mes en el que estamos.

El primer niño recoge su entrada, saluda al portero, entra en la cafetería y se sienta siempre empezando por el asiento de arriba (iremos colocando a los niños en sentido de las agujas del reloj). En el cuadrado negro de la cafetería se pone la tarjeta con el número 1, también de color negro, que simboliza los niños que hay en la cafetería y el día del mes.

## 2.3. SESIONES DE LA SEGUNDA A LA NOVENA.

Cada día, entre el segundo y el noveno del mes, vamos a realizar la misma rutina que el día anterior, introduciendo actuaciones para reforzar la idea de orden, de secuencia, de correspondencia uno a uno y de inclusión. Los alumnos empiezan a fijarse en el número de taburetes que quedan vacíos, que son los días que faltan para que todo el corro se vaya a bailar.

El noveno día crece la expectación: sólo queda un sitio libre y están impacientes por ver qué ocurrirá al día siguiente.

### 2.4. SESIÓN DÉCIMA.

Una vez realizada la misma rutina que en días anteriores, entra el décimo niño y observamos que el corro se ha llenado. Hoy pueden pasar a la discoteca para bailar. Cuando esto ocurre todos juntos cantamos "A bailar, a bailar".

Los diez niños se colocan en uno de los corros de la discoteca y aparecen los músicos. Se coloca la tarjeta del número uno de color rojo en el cartel de la discoteca porque hay un corro bailando. La cafetería ha quedado vacía, por lo que ha de colocarse la tarjeta con el 0 de color negro. Hemos formado el número 10. Cantamos la canción "El baile de las decenas". También la taquilla está vacía, por lo que colocamos otros diez niños en la fila, esperando para seguir entrando.

### 2.5. SESIONES POSTERIORES.

En las sesiones de la undécima hasta el día en que termina el mes, procedemos de la siguiente manera:

- Se colocan niños en la cafetería hasta completar un nuevo corro a la vez que se van cambiando las tarjetas con los números de color negro, construyendo de esta manera los números del 11 al 19.
- Cuando se completa otro corro se pasa a la discoteca y se cambian las dos tarjetas, tanto la roja como la negra. Es el número veinte.
- Se procede de igual manera hasta completar un tercer corro, el número 30.
- Cuando termina el mes se vacía la discoteca y se vuelve ha empezar desde el número 1.

## 3. ALGO MÁS QUE UN CALENDARIO.

Para facilitar la representación gráfica de los números y las operaciones, acordamos con los alumnos utilizar los siguientes símbolos:

- Un vaso con una pajita, que representa la cafetería (las unidades).
- Un corro de diez pequeños círculos rojos, que representa la discoteca (las decenas).
- Un autobús, que partirá hacia el concierto sólo cuando se haya llenado con 10 corros de niños (las centenas).
- Además, dibujaremos la cara del portero junto a la llave correspondiente para indicar que sumamos o restamos.

Cuando los alumnos han adquirido suficiente soltura con el manejo de la discoteca como calendario es momento de utilizarla para trabajar con ellos otros conceptos aritméticos como los que se mencionan a continuación.

### 3.1. GENERACIÓN DE LAS CANTIDADES DEL 0 AL 100.

- Construcción del número como adición de uno más.
- Construcción de las decenas como grupos de 10 niños.
- Interiorización de la posición de las cifras y su valor.

### 3.2. COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE LOS NÚMEROS.

En el transcurso del juego los alumnos comprueban cómo se va formando el número 10 como resultado de sus sumas (1+9, 2+8, 3+7, etc.). Para favorecer su comprensión hemos elaborado un juego de cartas de parejas en las que ellos tienen que unir las cantidades que juntas suman 10.

### 3.3. MAYOR Y MENOR.

Sólo con mirar el número de niños en la cafetería y el número de corros en la discoteca los alumnos van descubriendo intuitivamente qué cantidades son mayores o menores.

### 3.4. LA SUMA.

- Actividad 1. Encaminada a que los alumnos entiendan el significado del primer sumando. Le llamamos "En la cafetería hay…"
- Actividad 2. Para trabajar el significado del segundo sumando. Le llamamos "El portero dice que entren…"
- Actividad 3. La suma. "En la cafetería hay… y el portero dice que entren…" Presentamos a los alumnos la suma con los símbolos acordados (vaso, corros, portero).
- Actividad 4. Suma de dos sumandos, uno de ellos con dos cifras.

### 3.5. LA RESTA

- Actividad 1. Vaciando la discoteca. Dedicamos unas sesiones a vaciar la discoteca sacando poco a poco a los niños que hay dentro, empezando por los que están en la cafetería y después descomponiendo los corros de la discoteca. Los alumnos van realizando las restas de forma manipulativa y se van familiarizando con el signo -.
- Actividad 2. "En la cafetería hay… y el portero dice que salgan". Se plantean diferentes situaciones que los alumnos deben resolver deshaciendo los corros de la discoteca (resta con llevadas).

A partir de aquí, los alumnos estarán preparados para sumar y restar cualquier cantidad, de una forma natural y sencilla.

## 4. MATERIALES ADICIONALES.

Para trabajar todos estos conceptos hemos preparado una serie de materiales adicionales que los alumnos pueden manipular y que facilitan la representación de las diferentes situaciones de aprendizaje que se les proponen:

- Discotecas individuales con sus correspondientes accesorios, adaptadas a las necesidades de cada alumno. (70 x 40 cm)
- Láminas en las que se muestra la formación de los números del 0 al 9. (Tamaño folio)
- Cartas de complementarios. (Tamaño cuartilla)
- Tarjetas "Que entren" y tarjetas "Que salgan" (Tamaño cuartilla)
- Cuadernillos de sumas y restas con la simbología acordada. (Tamaño folio)

## REFERENCIAS.

Kamii, Constance. *"El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget"* Teachers Collage, Columbia University, 1985

Martínez Montero, Jaime. *"Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales"* Ed. Wolters Kluwer España, S.A., 2010

# GEOMETRÍA FLEXIBLE CON POLIFIELTROS 3D

**Dolores Jiménez Cárdenas**,
CEIP Joaquín Tena Sicilia *(Abla, Almería)*
**José Luis Rodríguez Blancas**,
*Universidad de Almería*
http://www.polifieltros3d.com/

## RESUMEN.

Polifieltros 3D es un nuevo juego de construcción de figuras geométricas de fieltro y velcro convenientemente cosido en sus bordes. Sólidos platónicos, poliedros truncados y estrellados, sólidos arquimedianos, deltaedros, mosaicos de distintos tipos (regulares, semiregulares, demiregulares, de Penrose), superficies topológicas como la cinta de Moebius, el toro o la botella de Klein, fractales como el tetraedro de Sierpinski o la esponja de Menger, son algunas de las figuras que se pueden montar con este juego.

**Nivel educativo**: Desde infantil hasta universidad.

## 1. VENTAJAS DEL USO DE ESTE JUEGO EN EL AULA

Este juego nos parece ideal para usarlo en el aula de matemáticas, según hemos constatado ya en diversos centros educativos. La ilusión y curiosidad que ha despertado en el alumnado nos ha animado a promover este juego entre el profesorado. A continuación os describimos algunas de las ventajas que pensamos disfruta este nuevo juego:

- Contiene figuras variadas de **distintos grados de dificultad**.
- **Fortalece el pensamiento geométrico** en el espacio, dando pie al profesorado a explicar conceptos más complejos de geometría relacionados con las figuras.
- Es un buen **complemento** a la **geometría con papel** o cartulina, y puede combinarse con otros juegos de construcción, como ZOME, Polydron, Geomat, etc.
- El fieltro es flexible, se retuerce y dobla mejor que el papel o la cartulina, permitiendo al alumnado experimentar con bastantes figuras (incluso, distintas a las habituales), e incentivando así su **creatividad e imaginación**.
- Al no necesitar pegamento, las figuras pueden montarse y desmontarse tantas veces como se quiera.
- La **rapidez** con la que se montan y desmontan las figuras, en comparación con otros juegos similares, constituye sin duda una de las grandes ventajas de este juego, pues permite aprender más conceptos geométricos en menor tiempo.
- La mayoría de las figuras necesitan más de dos personas para montarse, lo que induce a la **colaboración, coordinación e interacción** entre el alumnado.

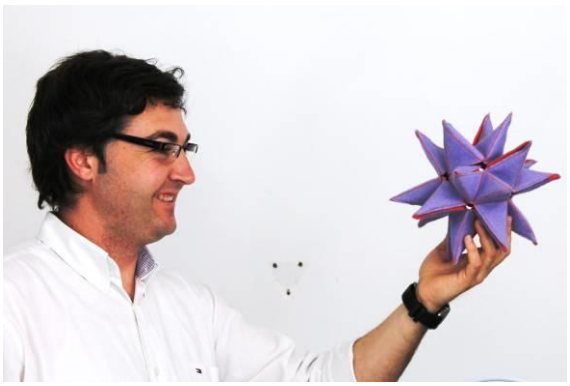
# 2. FIGURAS GEOMÉTRICAS.

En la página web http://www.polifieltros3d.com hemos publicado ya bastantes fotos y videos. A continuación os dejamos una muestra variada de todas las figuras que se pueden montar.

## 2.1. SÓLIDOS PLATÓNICOS Y ESTRELLADOS

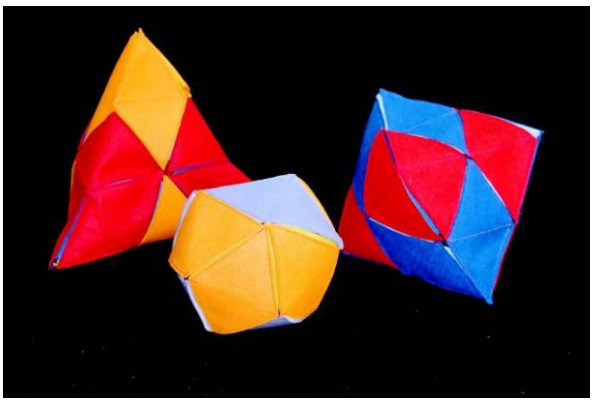
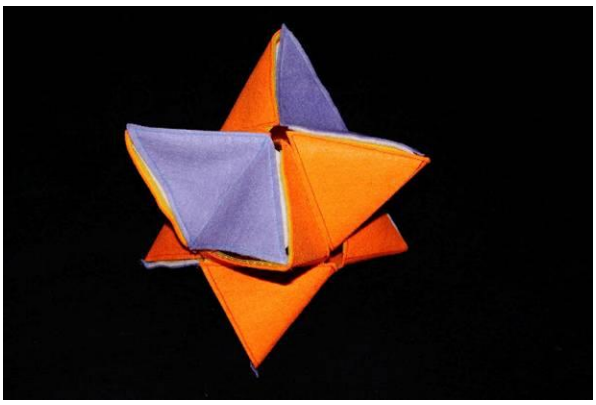
En el zoco, podréis montar poliedros a partir de sus desarrollos planos usuales. En las primeras imágenes, por ejemplo, pueden verse el dodecaedro y su correspondiente dodecaedro estrellado envolviéndolo. En la segunda a nuestra hija Sara, que es la primera que disfruta con las nuevas figuras. En la última foto, vemos a José Abel, de la asociación Matemática Thales de Almería, sosteniendo un icosaedro estrellado durante un taller de Juegos topológicos en Profundiza de Matemáticas, celebrado el pasado 14 de abril.



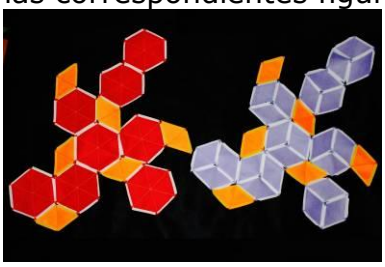
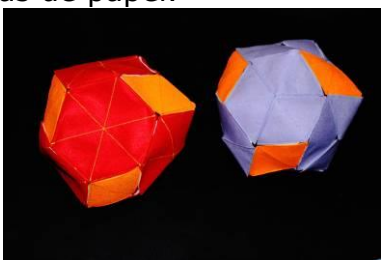
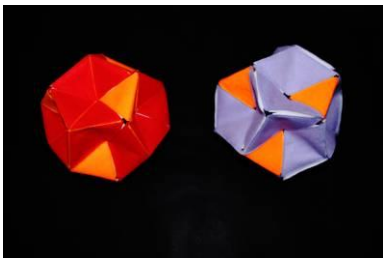



## 2.2. DELTAEDROS.

Los deltaedros son poliedros que están formados por triángulos equiláteros, pero pueden formarse también por rombos (=unión de dos triángulos equiláteros). En la primera imagen vemos un tetraedro, un icosaedro y un octaedro formado por rombos de colores. Podemos formar también los 8 deltaedros convexos, y por supuesto, deltaedros no convexos como el octaedro estrellado (segunda foto).

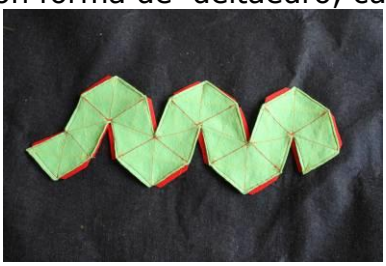



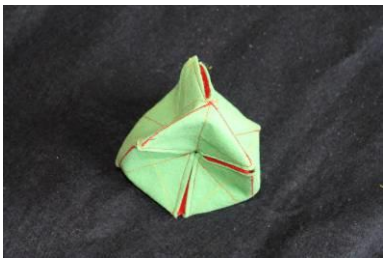
En las tres fotos siguientes mostramos dos maneras equivalentes de formar la tercera estelación del icosaedro: una solo con hexágonos rojos y rombos naranjas, y otra con rombos lilas y naranjas. La flexibilidad del material nos permite meter y sacar las puntas del poliedro fácilmente, algo difícil realizar con las correspondientes figuras de papel.

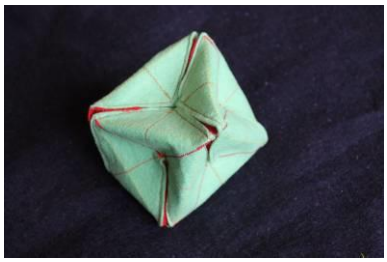




## 2.3. FLEXIBILIDAD Y SIMETRÍAS

Aprovechamos la flexibilidad del material para ver fácilmente, por ejemplo, las simetrías del dodecaedro rómbico. Este poliedro es bien conocido por teselar el espacio euclídeo, disponiéndose exactamente como las celdas de un panal de abejas. Doblando hacia adentro convenientemente diferentes vértices o diagonales de los rombos (cosidas en amarillo o naranja), se obtienen poliedros no convexos con forma de deltaedro, cubo y octaedro.





## 2.4. POLIEDROS ARQUIMEDIANOS.

Recordemos que estos poliedros se construyen uniendo polígonos regulares, siguiendo la misma sucesión de polígonos en cada vértice. En las siguientes fotos vemos a alumnado de Profundiza de Matemáticas formando el dodecaedro romo y el gran rombicosidodecaedro, alumnado de 4º de primaria del CEIP Joaquin Tenal Sicilia, y a Sara sosteniendo el icosaedro truncado (pelota de fútbol).

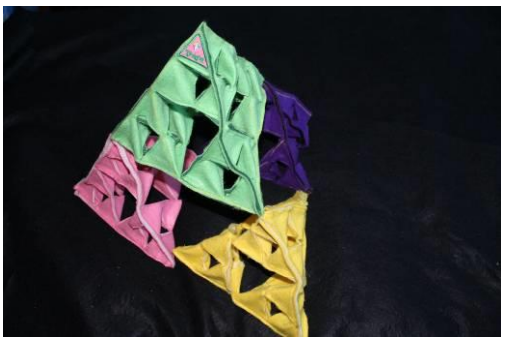


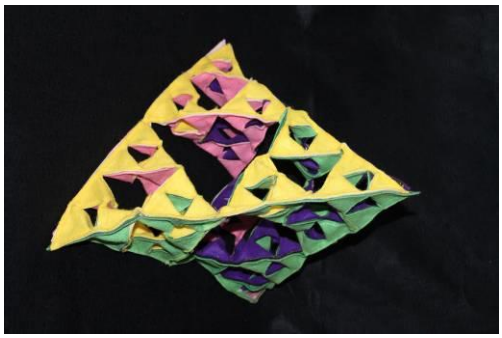




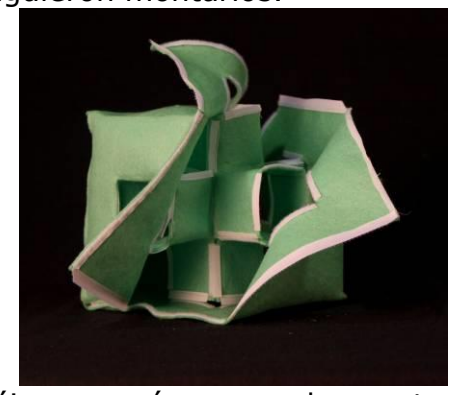
## 2.5. FRACTALES

A continuación os mostramos la 2ª iteración del tetraedro de Sierpinski, a partir de una sola pieza de fieltro, y la 3ª iteración combinando 4 de copias de distintos colores.

La esponja de Menger es mucho más complicada de elaborar con fieltro. De momento hemos obtenido la primera iteración. El pasado 21 de abril, durante un taller en "els dissabtes del les matemàtiques", en la UAB, dos voluntarios consiguieron montarlos.





Podéis ver cómo se desmonta poco a poco en el video "stop motion" http://youtu.be/oQevUDo91FQ.

## 2.6. Mosaicos.

Las reglas para unirse las piezas, dardo y cometa, en los famosos mosaicos de Penrose (1ª foto de la izda.) se garantizan cosiendo los velcros macho y hembra convenientemente en el borde. De este modo, hasta niños de primer ciclo de primaria serán capaces de montar preciosos mosaicos de Penrose. Con más edad, podrán también doblarlos si quieren al final para formar bonitas figuras tridimensionales. Por supuesto, se pueden formar todo tipo de mosaicos con otro tipo de piezas. En las dos últimas fotos os mostramos un mosaico semiregular del tipo 3,4,6,4, (análogos a los poliedros arquimedianos) y un bonito vestido geométrico formado a partir del mosaico.

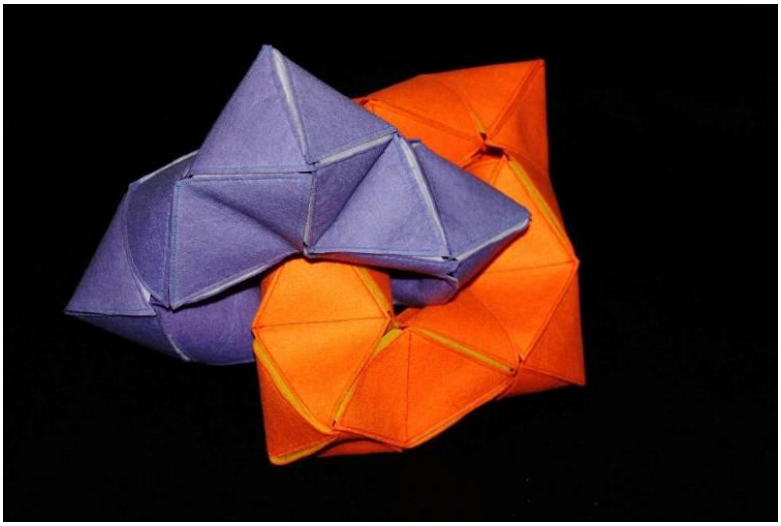







## 2.7. SUPERFICIES.

Conos, cilindros, cintas de Moebius, helicoides, etc. pueden construirse, pero lo más interesante de este juego es que se pueden construir triangulaciones (o parcelaciones con otros polígonos) de todo tipo de superficies. En las fotos os mostramos dos toros de Stewart enlazados y una botella de Klein.





# ENLACES.

Web de los Polifieltros 3D
http://www.polifieltros3d.com/

Web de los Juegos Topológicos
http://topologia.wordpress.com/