



PATRONES, COMUNICACIÓN Y REFLEXIÓN EN MATEMÁTICAS

Amparo Govea Fontanilla,

Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla

Inmaculada Otero Mateos,

Colegio de San Francisco de Paula, Sevilla

RESUMEN.

Con este trabajo pretendemos mostrar un tipo de materiales que puedan resultar más o menos novedosos por los contenidos tratados pero más aún por los objetivos que se persiguen, en tres áreas de habilidades matemáticas distintas. Pero es en la manera de evaluar estas tareas dónde encontramos su principal novedad. Esto es, no se trata de meros trabajos de ampliación o profundización ajenos a la materia o tal vez solo para alumnos con altas capacidades en nuestra asignatura, sino que forman parte de la nota trimestral de los alumnos saliéndose en gran medida de lo que suele ser habitual en nuestras aulas, pero acercándose desde una perspectiva muy interesante al desarrollo de las competencias básicas y a la introducción de patrones y modelos matemáticos en edades tempranas.

Nivel educativo: Aunque los ejemplos son de 3º de la ESO las ideas son aplicables a toda la ESO.

1. INTRODUCCIÓN.

Presentamos en este trabajo una colección de actividades relacionadas con tres áreas de habilidades inherentes al desarrollo del pensamiento matemático: la investigación de patrones, la comunicación matemática y la reflexión. Son actividades reales, desarrolladas con alumnos de 3º de la ESO del Colegio de San Francisco de Paula de Sevilla (<http://www2.sfpaula.com/>) y que constituyen parte de su nota en la evaluación trimestral (es este un elemento diferenciador puesto que no son ciertas tareas extras para algunos alumnos, sino que tienen un peso real y específico en la nota trimestral de todos los alumnos).

Todas ellas están imbuidas del espíritu y metodología que promueve el Programa de Años Intermedios (PAI) de la Organización del Bachillerato Internacional (OBI, <http://www.ibo.org/es/>), adaptadas a nuestro enfoque pedagógico como colegio e inmersas en el desarrollo de los temarios oficiales españoles. (Somos miembros de esta organización desde 1997 y



en el 2009 fuimos autorizados para impartir además el Programa del Diploma para alumnos de Bachillerato).

A veces estas tareas están íntimamente ligadas a los contenidos desarrollados en los programas y sirven para afianzarlos desde otras perspectivas, a veces se salen de los contenidos oficiales enriqueciendo aún más sus conocimientos de la Historia de las Matemáticas, por ejemplo, o la adquisición de destrezas más allá de las básicas.

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRES ÁREAS Y DE LOS OBJETIVOS PERSEGUIDOS.

La primera de las áreas trabajadas es la **Investigación de patrones**, una primera aproximación a la obtención de modelos y a la formalización en términos matemáticos de los fenómenos que siguen alguna pauta.

"La investigación de patrones permite a los alumnos experimentar el placer y la satisfacción del descubrimiento matemático. Mediante el uso de investigaciones matemáticas, los alumnos tienen la oportunidad de aplicar conocimientos matemáticos y técnicas de resolución de problemas, generar y analizar información, encontrar relaciones y patrones, y describirlos en términos matemáticos como reglas generales proporcionando justificaciones o pruebas.

Al final de cada curso, cuando se investiguen problemas tanto teóricos como de la vida real, el alumno debe ser capaz de:

- *seleccionar y aplicar las técnicas matemáticas de resolución de problemas y de investigación adecuadas*
 - *reconocer patrones*
 - *describir patrones como relaciones o reglas generales*
 - *extraer conclusiones coherentes con los hallazgos*
 - *justificar o demostrar reglas generales y relaciones matemáticas."*
- (Guía de Matemáticas, OBI).

Las otras dos áreas mencionadas más arriba solemos trabajarlas conjuntamente, en una misma tarea o actividad, pues por sus propios objetivos son fácilmente aplicables a un mismo tipo de proyecto casi siempre íntimamente relacionados con situaciones reales.

La **Comunicación en matemáticas** está ligada a las posibilidades de las matemáticas como lenguaje universal.

"Se espera que los alumnos utilicen el lenguaje matemático adecuadamente al comunicar las ideas, los razonamientos y los hallazgos, tanto de forma oral como escrita.

Al final de cada curso el alumno deberá ser capaz de comunicar las ideas, los razonamientos y los hallazgos demostrando que:

- *utiliza el lenguaje matemático adecuado (notación, símbolos, terminología) en explicaciones tanto orales como escritas*



- *utiliza diferentes formas de representación matemática (fórmulas, diagramas, tablas, cuadros, gráficas y modelos)*
- *pasa de una forma de representación a otras.*

Se anima a los alumnos a elegir y utilizar las TIC apropiadas, cuando dispongan de ellas, para mejorar la comunicación de sus ideas matemáticas". (Guía de Matemáticas, OBI).

En la **Reflexión en matemáticas** acercamos al alumno al análisis de sus hallazgos, del propio proceso, de las múltiples estrategias y a la valoración del error como un elemento más de aprendizaje y comprensión.

"Al final de cada curso los alumnos deberán ser capaces de:

- *explicar si sus resultados tienen sentido en el contexto del problema*
- *explicar la importancia de sus hallazgos*
- *justificar el grado de precisión de sus resultados, cuando corresponda*
- *sugerir mejoras para el método cuando sea necesario."* (Guía de Matemáticas, OBI).

3. LA EVALUACIÓN: UN ELEMENTO DIFERENCIADOR.

Estas tres áreas de desarrollo de habilidades, destrezas y competencias básicas matemáticas, son para nosotros tres de los cinco criterios de evaluación de nuestra materia, con un peso total dentro de la misma del 30%.

Lo que distingue la evaluación de este tipo de tareas que miden la adquisición paulatina de destrezas es que la calificación sumativa se emite al final del proceso, es decir, previamente a la emisión de la nota que entrará a formar parte de la evaluación del alumno se desarrolla al menos una actividad similar, orientadora, preparatoria, que se evaluará formativamente. Esta evaluación formativa permite informar al alumno de sus debilidades y fortalezas y ofrecerle el feedback necesario para que mejore y alcance los niveles adecuados antes de enfrentarse a la tarea final del proceso de la que emitiremos una calificación que sí contará en su expediente.

Además, la calificación se emite utilizando bandas de calificación o niveles de descriptores que marca la propia Organización y que debemos adaptar y reformular para cada actividad planteada según nuestros propios criterios como colegio. Se puede ver un ejemplo de estas rúbricas adaptadas a las distintas actividades en los casos que recogemos más abajo.

4. UN EJEMPLO DE PATRONES: "LA ESCITALA ESPARTANA"

4.1. OBJETIVO:

Esta actividad no está conectada de forma directa con ninguna lección del temario, aunque de forma tangencial puede relacionarse con el tema de "Sucesiones y Progresiones".



Con ella se pretende conseguir que los alumnos desarrollen la habilidad del reconocimiento de patrones matemáticos que es difícil de adquirir mediante los ejercicios que tradicionalmente se desarrollan en el aula, básicamente de cálculo.

Estuvo enmarcada dentro de otras actividades relacionadas con la Criptografía: una sesión inicial en la que se habló del cifrado de César, el visionado de documentales sobre la máquina Enigma y la recomendación de la lectura del libro Susana Mataix, *Lee a Julio Verne: El amor en tiempos de Criptografía*, Rubes, 2002.

4.2. METODOLOGÍA:

Esta actividad se realizó en tres grupos de 3º ESO (88 alumnos). En una primera fase se les planteó a los alumnos una actividad formativa que se desarrolló en dos sesiones de una hora cada una:

En la primera se realizó una breve introducción a la historia de la Criptografía y se hizo un ejemplo práctico (el profesor explicó el método y los alumnos lo aplicaron individualmente mientras el profesor iba por la clase resolviendo dudas).

En la segunda sesión se le planteó a los alumnos una actividad similar que debía ser resuelta en clase de forma individual. A continuación se hizo una puesta en común de los resultados y se hizo una corrección cruzada del ejercicio. Se evaluó teniendo en cuenta los descriptores que se adjuntan.

En una segunda fase, tras haber comprobado el profesor que la técnica había sido suficientemente asimilada, se les puso una prueba similar, esta vez evaluada mediante una nota sumativa. Esta segunda fase se desarrolló en una sola sesión de una hora de duración.

Para realizar la actividad los alumnos usaron los siguientes materiales: cilindros de distintos grosores (pueden servir barras de pegamento), papel, regla y tijeras.

4.3. COMENTARIOS:

Fue una actividad interesante para los alumnos desde un primer momento, al tratarse de un tema novedoso para ellos, conectado con distintos momentos de la Historia. Este interés por su parte hizo que los alumnos estuvieran motivados y receptivos, consiguiendo muy buenos resultados.

4.4. DESARROLLO:

1ª SESIÓN: INTRODUCCIÓN TEÓRICA Y EJEMPLO

A los alumnos se les dio un resumen de la evolución histórica de la Criptografía sobre el que haremos algunos comentarios en la exposición.

Nº orden de la letra	Orden/fila	Nº fila
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	1



5	2	2
6	2	3
7	3	1
8	3	2
9	3	3
10...	4...	1...

Vamos a suponer que hemos enrollado la tira de papel dando nueve vueltas alrededor de la escitala y hemos escrito 3 líneas. Por tanto, al desenrollar vemos 27 letras, de tal forma que:

Luego, en este caso, el patrón en cuanto a su posición en el mensaje cifrado es:

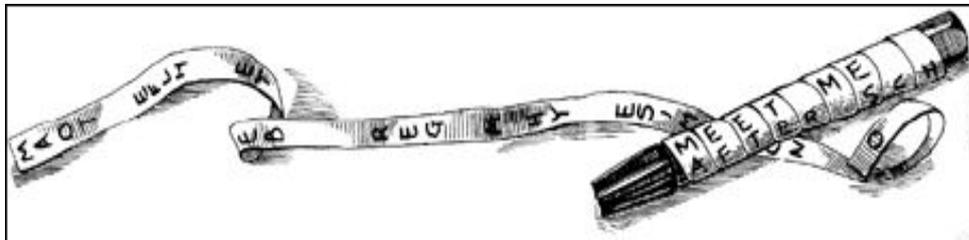
$$N^{\circ} \text{ letra} = 3(n^{\circ} \text{ columna} - 1) + n^{\circ} \text{ fila}$$

Este tipo de criptograma se llama de transposición, porque siempre salta un número fijo de posiciones, es decir, además del anterior, existe otro patrón que, expresado como término general de una sucesión recurrente es:

$$\text{Letra en posición } (n + 1) = \text{Letra en posición } n + 3$$

Para resolverlo sin tener la escitala hay que hacer una cuadrícula rectangular, escribiendo el texto cifrado en columnas verticales hasta que en horizontal aparezca un mensaje. Hay que ir probando con el número de filas hasta obtener un resultado lógico.

EJEMPLO



El mensaje cifrado que nos han mandado es una tira de papel en la que aparece la siguiente secuencia de letras:

LTEOAUICRÑIEACOSNTES

Vamos a ir probando con distintas cuadrículas, empezando por una de dos filas:

L	E	A	I	R	I	A	O	N	E
T	O	U	C	Ñ	E	C	S	T	S

Como vemos, no tiene sentido en horizontal. Pasamos a una cuadrícula de tres filas:

L	O	I	Ñ	A	S	E
T	A	C	I	C	N	S
E	U	R	E	O	T	

Tampoco tiene sentido. Pasamos a una de cuatro filas:



L	A	R	A	N
T	U	Ñ	C	T
E	I	I	O	E
O	C	E	S	S

Intentamos ahora con una de cinco filas:

L	U	I	S
T	I	E	N
E	C	A	T
O	R	C	E
A	Ñ	O	S

Efectivamente, el texto claro es: "Luis tiene catorce años". Vemos que en todos los casos se salta cinco posiciones. Para comprobar el patrón, usamos ahora la expresión:

$$N^{\circ} \text{ letra} = 5(n^{\circ} \text{ columna} - 1) + n^{\circ} \text{ fila}$$

Por ejemplo: la letra que aparece en el lugar 10° (Ñ) está en la 5^{a} fila en 2^{a} posición. Igualmente, su patrón de descodificación es :

$$\text{Letra en posición } (n + 1) = \text{Letra en posición } n + 5$$

2ª SESIÓN: ACTIVIDAD PROPUESTA

Te ha llegado el siguiente texto cifrado:

LTENNALAALEEROCELSLDLISUEBEA

Debes tener en cuenta que está cifrado según la técnica de la escitala espartana y que en este mensaje aparece un hueco que hay que dejar. Ahora, contesta a las siguientes preguntas:

- Halla el texto claro.
- ¿Sigue patrón de descodificación como sucesión recurrente? Compruébalo.
- ¿Sigue algún patrón en cuanto a la posición? Si es así, hállalo y compruébalo con la letra B.
- ¿Puedes dar alguna justificación geométrica a este método? ¿Sirve este aspecto geométrico como sistema de descodificación? (Repite el proceso con otro cilindro diferente y observa lo que ocurre).



	Descriptor PAI para el criterio B	Indicadores para esta prueba
0	El alumno no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que se exponen a continuación.	El alumno no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que se exponen a continuación.
1 – 2	El alumno aplica técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones sencillos, aunque necesita cierta orientación por parte del profesor.	Plantea adecuadamente el método de descodificación con cuadrícula. Encuentra el texto plano (a).
3 – 4	El alumno selecciona y aplica técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones y sugiere relaciones o reglas generales.	Halla el patrón de descodificación de forma recurrente y lo comprueba (b).
5 – 6	El alumno selecciona y aplica técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones, describe los patrones como relaciones o reglas generales y saca conclusiones de acuerdo con los hallazgos.	Halla una expresión general para el patrón de localización de cada letra y lo comprueba (c).
7 – 8	El alumno selecciona y aplica técnicas matemáticas de resolución de problemas para reconocer patrones, describe los patrones como relaciones o reglas generales, saca conclusiones de acuerdo con los hallazgos y proporciona justificaciones o demostraciones.	Justifica el apartado b. Intenta justificar el método desde el punto de vista geométrico y obtiene una expresión general del patrón geométrico.

5. UN EJEMPLO DE COMUNICACIÓN Y REFLEXIÓN: "ESTUDIO DE BENEFICIOS DE UNA EMPRESA"

5.1. OBJETIVO:

Esta actividad se desarrolla dentro del tema "Funciones" y con ella se busca complementar los ejercicios teóricos que se practican habitualmente.

Se consigue que los alumnos adquieran con más facilidad los conceptos del tema, además de conectar con problemas de la vida real y que perciban claramente la presencia de las Matemáticas en distintos ámbitos de la vida cotidiana.

Este tipo de actividades permite la atención a la diversidad, ya que es posible plantear un número menor de preguntas o, si es necesario, aumentarlas en número y en profundidad para aquellos alumnos que demandan ejercicios superiores.

5.2. METODOLOGÍA:

Se planteó en tres grupos de 3º ESO, formados por un total de 88 alumnos, desarrollando la actividad en dos fases:

En una primera fase se les propone a los alumnos una actividad formativa que desarrollan individualmente en una sesión de una hora de duración, con ayuda del profesor en los casos en que sea necesario.



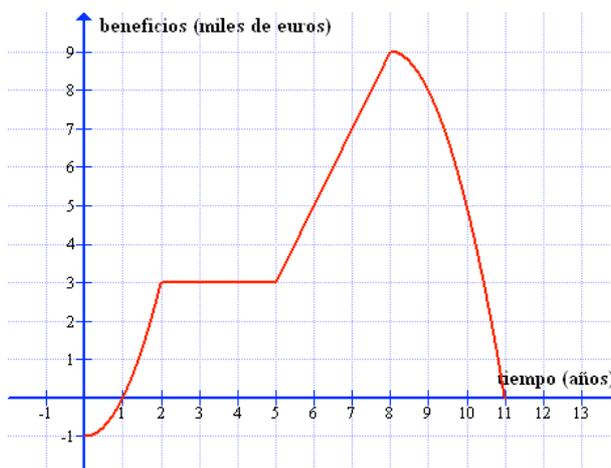
En la segunda fase, y en condiciones de examen, se les propone a los alumnos una actividad similar.

5.3. COMENTARIOS:

Al igual que suele ocurrir con cualquier actividad que rompe la rutina de la clase, esta también atrajo la atención de los alumnos. Les resultó motivador y, al igual que en la actividad anterior, permitió que los alumnos consiguieran buenas calificaciones.

5.4. DESARROLLO:

Una empresa estuvo funcionando durante un cierto periodo de tiempo y los beneficios, en miles de euros, variaron con el tiempo (x) que estuvo funcionando (expresado en años) según se puede apreciar en la gráfica siguiente:



Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tiempo estuvo en funcionamiento la empresa? Exprésalo con notación matemática.
- Razona si crees que, desde el punto de vista de la empresa, era lógico que dejara de funcionar cuando lo hizo.
- ¿Entre qué valores de pérdidas y/o beneficios trabajó la empresa? Exprésalo en notación matemática. ¿En qué periodo de tiempo hubo pérdidas? ¿y beneficios? Razona tu respuesta.
- ¿Cuáles fueron sus valores máximos y mínimos? Exprésalos en notación matemática, razonando si se trata de extremos absolutos o relativos.
- Expresa verbalmente y en notación matemática los años en los que los beneficios aumentaron y disminuyeron.
- Razona si esta afirmación es verdadera o falsa: "Los beneficios de la empresa no corresponden a una función continua, porque su gráfica cambia de forma en $x = 2$, $x = 5$ y $x = 8$ ".



6. UN EJEMPLO QUE COMBINA LAS TRES ÁREAS: "MOSAICOS"

6.1. OBJETIVO:

Esta actividad se desarrolla dentro programa de 3º ESO y con ella se desarrolla íntegramente el tema de "Movimientos en el plano".

6.2. METODOLOGÍA:

Se planteó en tres grupos de 3º ESO, formados por un total de 71 alumnos, desarrollando la actividad en dos fases:

En una primera fase se les propone a los alumnos la actividad formativa que se adjunta y que desarrollan individualmente en tres sesiones de una hora de duración, con ayuda del profesor en los casos en que sea necesario y consultando el libro de texto, si lo necesitan.

En la segunda fase, y en condiciones de examen, se les propuso a los alumnos una actividad más corta y del mismo grado de dificultad que debe ser resuelta en una única sesión de una hora de duración.

6.3. COMENTARIOS:

Dado lo novedoso del tema para ellos, les costó un poco conectar con la actividad, pero tras unos pocos minutos, estaban plenamente centrados en ella. Además, para el caso de la primera figura se les pidió que ordenadamente fueran explicando sus hallazgos y hubo un alto nivel de participación de los alumnos.

6.4. DESARROLLO:

Las siguientes figuras representan motivos decorativos propios del arte califal. En el diseño de estos mosaicos encontramos numerosos elementos geométricos que experimentan movimientos en el plano.

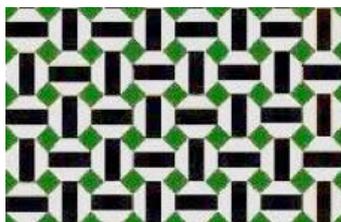


FIGURA 1

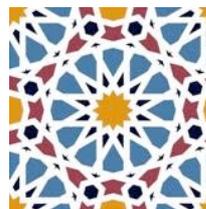


FIGURA 2

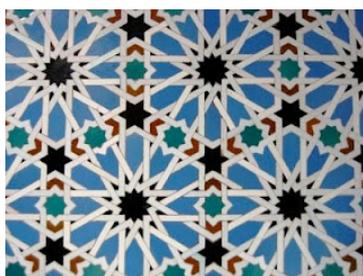


FIGURA 3



FIGURA 4



Para rellenar un plano con losetas (teselar el plano) de forma periódica, existen varios movimientos en el plano:

1.-Traslación. La nueva loseta que añadimos es igual a la anterior, desplazada a una nueva posición sin giros de ningún tipo.

2.-Simetría. Cada loseta nueva es la imagen especular de una anterior, con un eje de simetría dado.

3.-Rotación o giro. La nueva loseta surge por el giro de una anterior con centro en algún punto determinado y con un ángulo concreto.

Para ayudarte a realizar esta actividad puedes consultar el Tema 9 de tu libro de texto.

En una transformación geométrica se llama figura invariante a la que se transforma en sí misma. Completa la siguiente tabla indicando qué movimientos dejan invariantes los motivos de los mosaicos anteriores.

FIG. Nº	TRASLACIÓN	SIMETRÍA	GIROS
1			
2			
3			
4			

Representa en el plano XY el triángulo de vértices $A(1,4)$, $B(2,6)$ y $C(3,1)$. Partiendo de esta figura inicial, dibuja la figura que se obtiene tras hacer las siguientes transformaciones:

- Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda.
- Traslación vertical de 2 unidades hacia abajo.
- Traslación oblicua de 3 unidades a la derecha y 1 hacia arriba.
- Simetría axial horizontal
- Simetría axial vertical
- Simetría central
- Giro de 90° .

Explica verbal y matemáticamente las conclusiones que has reflejado en la tabla de la pregunta nº 1, indicando en cada caso, según proceda: tipo de traslación (horizontal, vertical u oblicua), tipo de simetría (central o axial) y ángulo de giro.

- a) Enumera tres ejemplos (naturales o artificiales) en los que aparezcan estas transformaciones.
- b) Explica, en cada caso, las transformaciones en los ejemplos que has puesto.



REFERENCIAS

AA.VV. "International Mathematics for the Middle Years 4". Pearson.

AA.VV. "International Mathematics for the Middle Years 5". Pearson.
ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL "Guía de
Matemáticas". PROGRAMA DE AÑOS INTERMEDIOS.

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL "El Programa de
los Años Intermedios: de los principios a la práctica".

ÁMBITO HUMANÍSTICO IES PUERTA DEL ANDÉVALO. "Ámbito
Humanístico 2º ESO" [en línea]. 3 de diciembre de 2010 [consulta 15 de
marzo 2012]. Disponible en:

http://ambitohumanistico2.blogspot.com.es/2010_12_01_archive.html

BUITRAGO LAGUNA, Prado. "Escitala". En: *Experimentos: Infantil y
Primaria* [en línea]. 7 de abril de 2010 [consulta 20 de febrero de 2011].
Disponible en:

http://www.cepvaldepeñas.es/cientifico/index.php?option=com_content&view=article&id=181:escitala&catid=60:inventos-y-maquinas

MARTÍNEZ, Rebeca. *Rebeca Martínez: Instinto gráfico* [en línea]. 4 de
febrero 2010 [consulta 15 de marzo 2012]. Disponible en:

<http://rojosandiaverdelimon.blogspot.com.es/2010/02/la-importancia-del-color-en-la-cultura.html>

MOLA, Maite. *Grupos de simetría* [en línea]. [consulta 15 de marzo
2012]. Disponible en: <http://www.telefonica.net/web2/m-p/gs.htm>

"Matemáticas y más: Simetría" [en línea]. 8 de septiembre de 2011
[consulta 15 de marzo 2012]. Disponible en:

<http://pacoymatematicas.blogspot.com.es/2011/09/simetria.html>