



CONCEPCIONES PERSONALES DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE ALCANZABILIDAD Y REBASABILIDAD DEL LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

José Antonio Fernández Plaza
Enrique Castro Martínez
Luis Rico Romero
Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Universidad de Granada

RESUMEN.

Se presentan algunos resultados iniciales de una entrevista llevada a cabo con estudiantes de segundo curso de bachillerato sobre las concepciones ligadas a los términos "alcanzar" y "rebasar". Los datos se recogieron de dos formas. La primera, por escrito donde expresaron su intuición inicial sobre estos términos. La segunda, mediante grabación, se les presentaron en pizarra diversas gráficas para que decidieran si el límite era o no alcanzable o rebasable de acuerdo a lo que tenían escrito. Se detectan matices de significado adicionales a su uso coloquial, si bien, intuitivos, cuando los emplean en el contexto gráfico particular de límite finito de una función en un punto.

Nivel educativo: Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN.

La influencia del significado y usos coloquiales de algunos términos propios del lenguaje del cálculo, a saber, "límite", "aproximarse", "tender a", "converger", "alcanzar" y "rebasar", ha sido reportada en Cornu (1991) y Monaghan (1991). Consideramos importantes las concepciones erróneas que pueden tener los estudiantes cuando emplean tales términos en el contexto de trabajo sobre este contenido, dado que la enseñanza actual del concepto de límite de una función en un punto, restringida a la transmisión de una definición intuitiva y al trabajo rutinario de reglas de cálculo algebraico, elude las concepciones que los estudiantes tienen de los términos "alcanzar" y "rebasar", en particular.

Presentamos los resultados derivados de una entrevista realizada con estudiantes de un 2º curso de Bachillerato con el objetivo de describir las nociones de "alcanzar" y "rebasar" que los estudiantes ponen de manifiesto y contrastarlos con su uso coloquial y matemático.



2. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LOS TÉRMINOS "ALCANZAR" Y "REBASAR".

Consideramos importante la realización de un análisis conceptual de términos clave, en nuestro caso, "alcanzar" y "rebasar" para delimitar el significado y uso matemático en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001) y es útil para interpretar la concepción de los sujetos.

"Alcanzar" es intuitivamente "llegar a" o "llegar a tocar" (RAE, 2001, Moliner, 1998, Oxford, 2011). Fernández-Plaza (2011) define "alcanzar" en el sentido en que una función alcanza el límite si el valor límite es la imagen del punto en el que se estudia el límite (continuidad); extendiendo su significado a que el límite sea el valor de cualquier otro punto del dominio.

Observamos que "rebasar" tiene un sentido coloquial de "quedar por encima de una cota superior" (RAE, 2001), excluyéndose la acepción "quedar por debajo de una cota inferior". En este trabajo ampliaremos el rango de sentidos del término "rebasar", de tal manera que diremos que el límite de una función es rebasable si podemos construir dos sucesiones monótonas de imágenes convergentes al límite, una creciente y otra decreciente, para convenientes sucesiones de valores de x convergentes al punto donde se lleva a cabo el estudio del límite (Fernández-Plaza, 2011). Es preciso notar que la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite finito de una función en un punto no tienen carácter general, sino particular y son independientes lógicamente dado que no existe ninguna implicación lógica entre ellas.

3. DISEÑO DE LA EXPERIENCIA.

Detallamos a continuación el diseño del estudio llevado a cabo basado en el método de encuesta, en formato de entrevista semiestructurada.

3.1. SUJETOS.

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a tres estudiantes de un instituto de la provincia de Granada, cursando la materia de matemáticas II, en 2º curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencia y Tecnología. Los sujetos habían participado en el curso 2010/2011 en el estudio que realizamos sobre el mismo tópico en Fernández-Plaza (2011) empleando como instrumento un cuestionario, siendo planificada esta intervención para marzo de 2012.

La instrucción previa que recibieron los sujetos no la consideramos oportuna, a efectos de las características del instrumento que íbamos a utilizar, ya que sus tareas difieren de las incluidas en los libros de texto sobre el tópico en cuestión.

3.2. INSTRUMENTO Y APLICACIÓN.

El instrumento es una plantilla que incluye la siguiente pregunta:

Lee con atención el enunciado siguiente:

Describe en cada apartado cómo entiendes los siguientes términos "Aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "converger", en el contexto de límite finito de una función en un punto.

La entrevista se aplicó en un aula ordinaria, habilitada para el investigador y los sujetos seleccionados. El protocolo de aplicación seguido fue la petición previa a los estudiantes de que escribieran sus respuestas en el espacio blanco marcado en la plantilla de respuesta proporcionada. A continuación se grabó la discusión en común de las mismas. Una vez que todos los sujetos hubieran explicado su respuesta, el investigador dibujo en pizarra unas gráficas para facilitar que ellos pudieran añadir matices a su respuesta original, para el caso de los términos "alcanzar" y "rebasar" tales gráficas eran similares a las que se muestran en la figura 1.

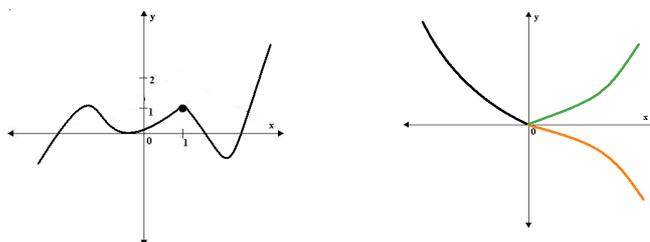


Figura 1. Gráficas 1. y 2. de apoyo a las respuestas sobre "alcanzar" y "rebasar"

La característica principal de la gráfica 1 es que el valor del límite se toma en diferentes puntos del dominio, no sólo en el punto $x=1$ y se empleó para discutir la alcanzabilidad del límite. La gráfica dos incluye dos funciones, con una rama común (negro) y con dos ramas propias (naranja y verde), y se empleó de apoyo para discutir la rebasabilidad del límite en $x=0$.

4. RESULTADOS.

Una vez realizada la entrevista, se llevó a cabo la transcripción de la grabación y de las respuestas escritas. Los sujetos los denotamos por María, Aurora y José. Comenzamos el análisis de los datos por las respuestas escritas.

4.1. CONCEPCIONES INICIALES DE LOS SUJETOS.

Presentamos en la tabla 1 las reflexiones de cada uno de los sujetos a la pregunta propuesta en la plantilla, que como ya hemos dicho, son previas a la discusión.



Sujetos	Alcanzar	Rebasar
José	<i>Alcanzar un límite es conseguir calcular el valor exacto</i>	<i>Sobrepasar el valor del límite</i>
Aurora	<i>Alcanzar es saber cual es $f(x)$ del punto que estudiamos</i>	<i>Es pasarse del límite</i>
María	<i>Consiste en llegar a conseguir en un momento dado un valor determinado</i>	<i>Consiste en sobrepasar el valor de un número determinado</i>

Tabla 1. Reflexiones iniciales sobre "alcanzar" y "rebasar"

Detectamos en este grupo de estudiantes dos sentidos iniciales diferentes aunque no necesariamente excluyentes en el que se interpreta el término "alcanzar".

- *Sentido de exactitud:* José y María, consideran que la alcanzabilidad es una propiedad del proceso de cálculo, que debe originar un valor exacto al límite.
- *Sentido de imagen:* Aurora considera que un límite es alcanzable si se conoce la imagen del punto. No descartamos una posible identificación entre límite y la imagen.

El término "rebasar" es interpretado por los tres sujetos como sinónimo a "sobrepasar" y "pasarse". Esto origina la conjetura de que estos términos hagan referencia a que la función debe tener valores por debajo del límite y por encima, y no sólo por encima.

4.2. CONCEPCIONES FINALES O INDUCIDAS DE LOS SUJETOS.

La discusión moderada por el investigador puede desencadenar cambios en las concepciones iniciales de los sujetos, en virtud de la influencia patente de los ejemplos específicos que se mostraron en la pizarra (figura 1).

Seleccionamos segmentos de la entrevista que reflejan el refinamiento o cambio en las concepciones de los sujetos sobre los términos "alcanzar" y "rebasar" a partir de su discusión sobre las gráficas propuestas.

Investigador: *¿Consideráis que si los valores de $f(x)$ [refiriéndose a una gráfica similar a la gráfica 1 en la pizarra] toman el valor del límite es alcanzable?*

María: *Yo creo que tienen que contar, son parte de la función.*

Aurora: *Es que a lo mejor si el límite es **alcanzado**, significa que en otro punto de la función tiene el mismo valor.*

Investigador: *¿Estás de acuerdo?*

José: *Yo creo que sí.*

Aurora: *Que sea **alcanzado** pienso que... se puede...el mismo valor, pero*



en otros puntos de la función. Pero si es **alcanzable** pues ya me quedo en lo de solamente una función pequeña.

Investigador: ¿Qué creéis vosotras que es rebasable, aquí es rebasable? [señala el ejemplo en pizarra similar a la gráfica 2 con "forma parabólica", rama verde]

Aurora: Que se alcance el...se me ha ido la palabra, valores superiores, o sea, imágenes superiores al valor del límite.

Investigador:...el límite en este caso [señalando el mismo ejemplo en pizarra] es 0.

María: Por eso, que la función tiende a 0.

Investigador: ¿El límite 0 es rebasable?

María: Si continua sí, pero si no no.

Investigador: ¿Si hace esto es rebasable? [Dibuja en la misma gráfica anterior una rama, de tal forma que la función global es estrictamente decreciente en todo el dominio, es decir, similar a la gráfica 2 con la rama naranja]

José: Yo creo que es rebasable en los dos casos.

Describimos por tanto matices adicionales a las concepciones de los sujetos sobre el término "alcanzar".

- *Sentido de propiedad global:* Para José y para María, si el límite es alcanzable implica que el valor del límite se puede tomar en otros puntos del dominio.
- *Doble sentido local-global:* Aurora hace dos distinciones bien remarcadas: Una local, expresada por el término "alcanzable" y una global, mediante el término "alcanzado" concordando con sus compañeros. Pone así de manifiesto la ambigüedad del término "alcanzar".

Para el término "rebasar" existen tres sentidos claramente diferenciados:

- *Sentido "encima":* Aurora considera que el límite no es rebasable, si la función sólo toma valores superiores al del límite, así considera que el límite 0 en la gráfica 2 con rama naranja es rebasable y no lo es si se considera la rama verde.
- *Sentido "encima-debajo":* María con la expresión "si continua sí, si no no" indica que la función rebasa el límite si toma valores por encima y por debajo del límite por ambos lados, es decir, si el límite es mínimo relativo o absoluto de la función como en el caso de la gráfica 2 (con rama naranja) no es rebasable.
- *Combinación de los dos anteriores:* José admite los dos sentidos, al afirmar que el límite es rebasable en los dos casos de la gráfica 2.

5. CONCLUSIONES.

Este trabajo pone de manifiesto la necesidad de considerar en el aula las intuiciones personales que los estudiantes tienen de los términos que describen



propiedades del concepto de límite, que son de hecho, diferentes a los que a su uso coloquial o matemático se refieren.

Consideramos una medida de atención a la diversidad en el aula, la discusión y reflexión crítica de las intuiciones personales de los estudiantes, de manera que se facilita al profesor la obtención de un clima de comunicación adecuado para transmitir los conocimientos de referencia oportunos, proporcionándoles contextos en los que sus intuiciones ya no son válidas y favoreciendo la participación activa de los estudiantes en su aprendizaje.

Los resultados obtenidos dan lugar a cuatro conclusiones importantes:

1. Las nociones descritas por los escolares para los términos "alcanzar" y "rebasar" concuerdan con el análisis conceptual previo de dichos términos en Fernández-Plaza (2011).
2. El apoyo gráfico ha favorecido una mejor precisión de las reflexiones proporcionadas por los sujetos y ha facilitado la discriminación de sus producciones iniciales.
3. Han aparecido matices de significado diferentes al uso coloquial de dichos términos, lo cual no quiere decir que no sean acordes con el uso coloquial que los propios sujetos realicen de los mismos.
4. Actualizamos los trabajos de Cornu (1991) y Monaghan (1991) mediante el análisis conceptual realizado y parcialmente contrastado en este estudio.

AGRADECIMIENTOS.

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto "Modelización y representaciones en educación matemática" (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3er Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

REFERENCIAS.

CORNU, B. (1991). *Limits*. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

FERNÁNDEZ-PLAZA, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf.

MOLINER, M. (1998). *Diccionario del uso del español*. (2ª Ed, Vol. 2). Editorial Gredos, Madrid.

MONAGHAN, J. (1991). *Problems with the Language of Limits*. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.



OXFORD (2011). *Oxford Dictionaries*. Oxford: Oxford University Press. Disponible en: <http://oxforddictionaries.com>. Consultado [24-06-2011].

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. (22nd ed). Madrid. Disponible en <http://www.rae.es/rae.html>. Consultado [24-06-2011].

RICO, L. (2001). *Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática*. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, 179-193. Editorial Universidad de Granada, Granada.