Experimentos con pompas de jabón: una aproximación a la Geometría

Rafael López

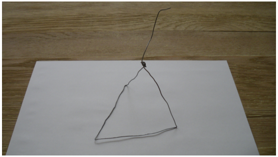
XIV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas
Málaga, 4-6 de junio de 2012

¿Porqué el agua adopta esas formas y no otras?

Estudiar las formas geométricas de gotas y líquidos, describirlas matemáticamente

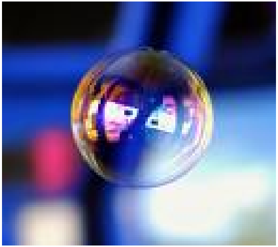
Material para los experimentos

1. agua con jabón
2. glicerina
3. alambre
4. "objetos" para hacer pompas
5. ¡paciencia!
6. curiosidad: preguntas - porqué



Experimento 1: pompa de jabón

La pompa de jabón es redonda



Independientemente del objeto utilizado

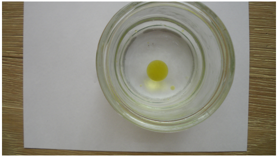
¿Porqué son redondas? y no cuadradas, o amorfas,

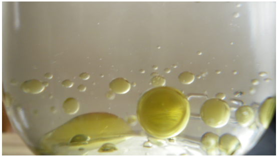
Experimento 2: gotas de aceite en agua

Las gotas de aceite en agua son redondas.

Se las toca, se las rompe, pero cuando están en equilibrio

¡son redondas!





Problema isoperimétrico

- De entre todas las superficies que encierran un volumen fijo ¿cuál es la que tiene menor área?
- De entre todas las superficies con un mismo área ¿cuál es la que encierra mayor volumen?

Problema isoperimétrico en el plano

Suponiendo área=1

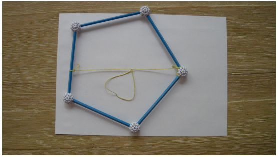
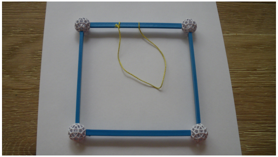
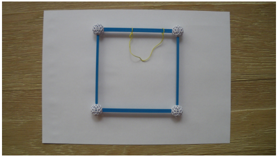
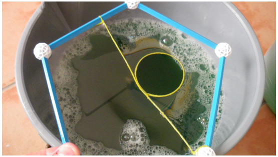
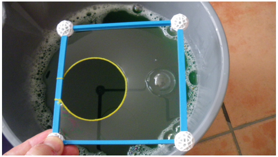
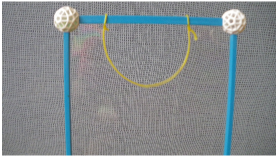
polígono	lados	longitud
triángulo	3	4'55
cuadrado	4	4
hexágono	6	3'77
octógono	8	3'64
dodecágono	12	3'58
circunferencia	∞	3'54

Teorema (Desigualdad isoperimétrica)

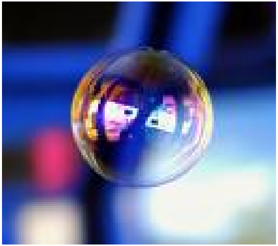
- *Para curvas:*
$$L^2 \geq 4\pi A$$
y la igualdad ocurre si y sólo si la curva es una circunferencia.
- *Para superficies:*
$$A^3 \geq 36\pi V^2$$
y la igualdad ocurre si y sólo si la superficie es una esfera.

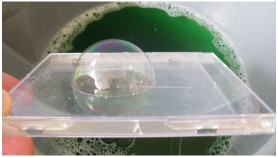
Experimento 3: Problema isoperimétrico en el plano

- Curva cerrada $\rightarrow$ circunferencia
- Fijando los dos bordes $\rightarrow$ arco de circunferencia
- Los bordes se mueven libremente en una recta $\rightarrow$ semicircunferencia

- Superficie cerrada $\rightarrow$ esfera
- Superficie con borde circular $\rightarrow$ casquete esférico
- Superficie con borde libremente en un plano $\rightarrow$ semiesfera





En ausencia de gravedad, la energía viene dada por la tensión superficial, que es proporcional al área superficial

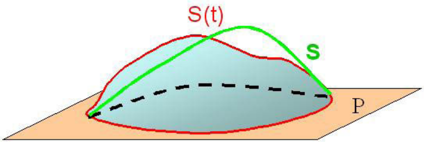
$$A(S) = \int_S 1$$

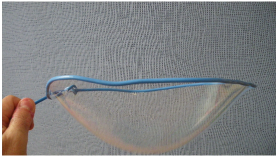
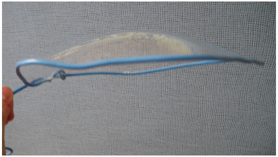
La solución en equilibrio es solución de un problema variacional

Deformación de S: $\{S(t); t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ manteniendo el volumen encerrado

$A(t) =$ área de $S(t)$

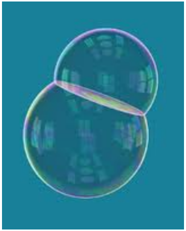
Cálculo de puntos críticos $A'(0) = 0$



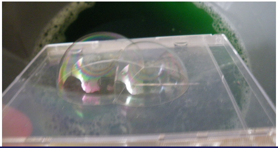
 

Experimento 5: Problema isoperimétrico de la doble pompa

Hallar la forma de dos superficies pegadas que, teniendo volúmenes predeterminados, tienen menor área.

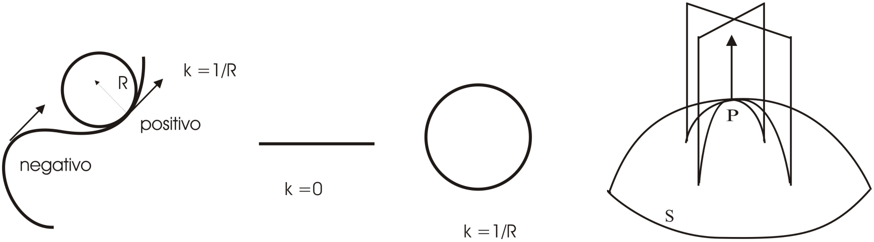


M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros, 2002



Curvatura de una superficie

¿Qué es la <u>curvatura</u> de una curva? su aceleración, $\kappa(t) = |\alpha''(t)|$



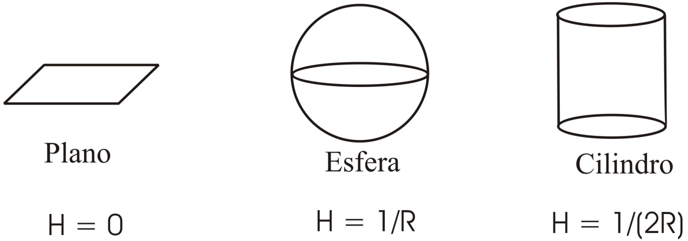
$$\lambda_1(p) = \max\{\text{curvaturas de curvas planas en } p\}$$

$$\lambda_2(p) = \min\{\text{curvaturas de curvas planas en } p\}.$$

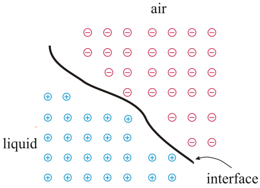
Definición

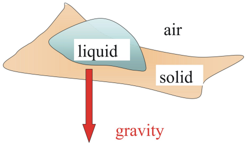
La curvatura media en p es

$$H(p) = \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2}.$$



Ejemplo más simple: curvatura media constante





En condiciones ideales (microgravedad, presión constantes,...)

Ecuación de Laplace:

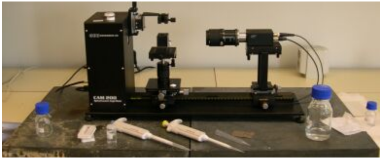
$$\boxed{P_L - P_A = 2H\,\gamma + cz.}$$

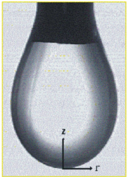
γ: coeficiente de tensión superficial.

H = curvatura media de la interfase.

Sin gravedad, la <u>interfase</u> es una superficie con <u>curvatura media constante</u>.

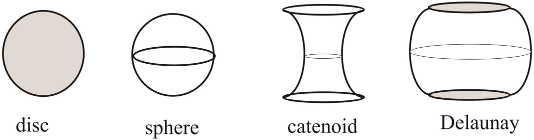
- $H = 0 \Longleftrightarrow P_L = P_A$: minimizan el área.
- $H = ct \Longleftrightarrow P_L \neq P_A$: : minimizan el área para deformaciones que conservan el volumen.





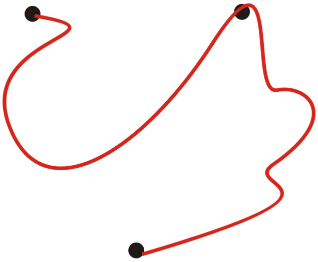
Las superficies CMC son películas de jabón: minimizan el área cuando hay algunas condiciones:

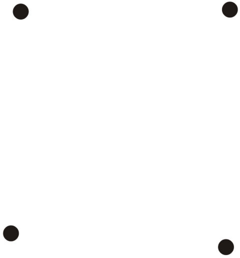
- un alambre circular $\rightarrow$ disco plano (la frontera).
- inflando aire hasta forma una pompa de jabón $\rightarrow$ esfera (el volumen).
- dos círculos coaxiales $\rightarrow$ catenoide (la frontera).
- dos círculos coaxiales, con dos discos pegados e inflando aire $\rightarrow$ superficies de Delaunay (frontera + volumen).

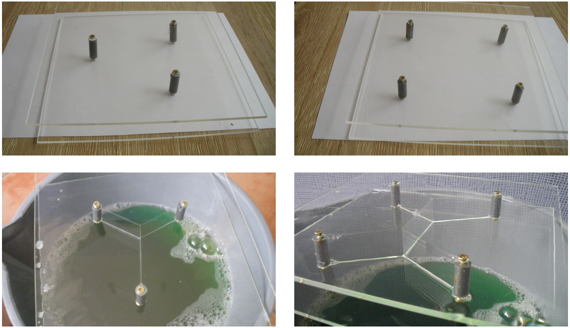


Experimento 6: Problema de Steiner I

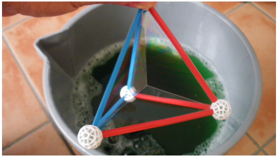
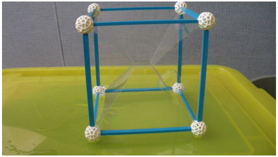
Minimizando el camino más corto entre diferentes puntos del plano



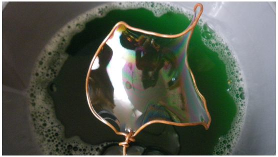


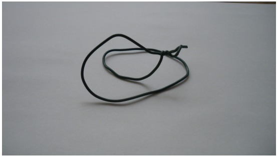


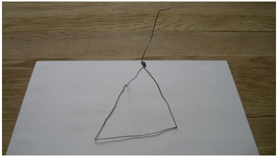
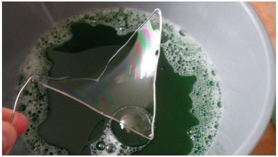
Minimizando el camino más corto entre diferentes puntos del espacio

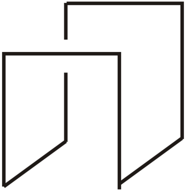
Experimento 8: superficie bordeada por una curva cerrada

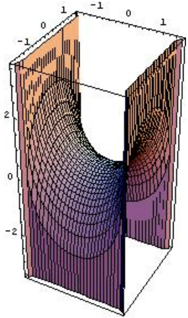




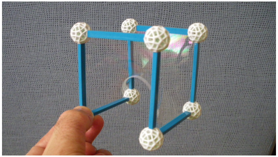



Experimento 9: La superficie de Scherk





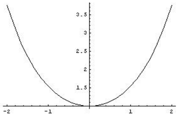
$$f(x,y) = \log\left|\frac{\cos(y)}{\cos(x)}\right|$$

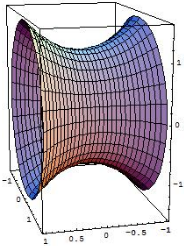


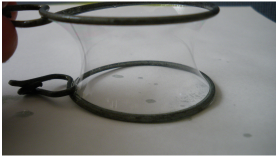
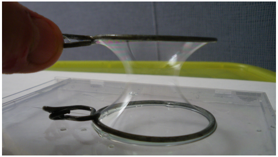
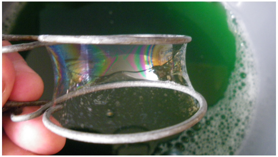
Experimento 10: la catenoide

La catenoide es la única superficie de revolución que es minimal. La ecuación de la curva generatriz es

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$





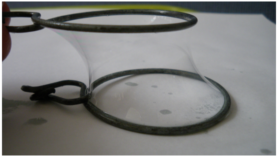





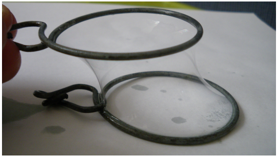
Experimento 11: Ejemplos minimales de Riemann

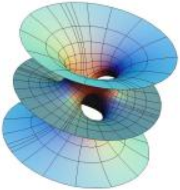
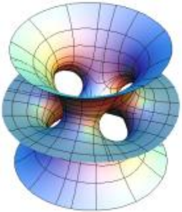
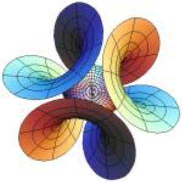
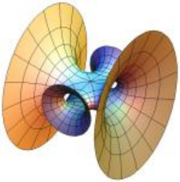
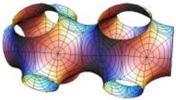
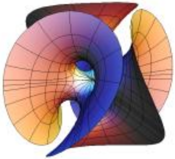
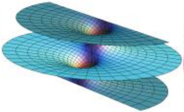
Superficies minimales acotadas por dos circunferencias en planos paralelos.

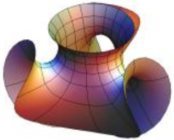
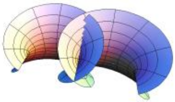
Teorema

1. *Si el borde de una superficie minimal son dos círculos concéntricos, la superficie es una catenoide.*
2. *Si el borde son dos círculos en planos paralelos, la superficie es uno de los ejemplos de Riemann.*

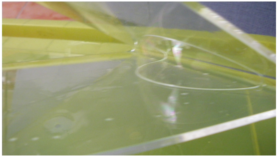


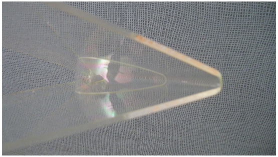


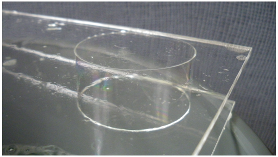








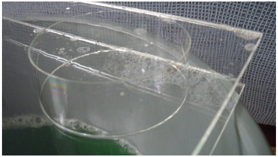



Superficies CMC con borde en planos paralelos y en cuñas



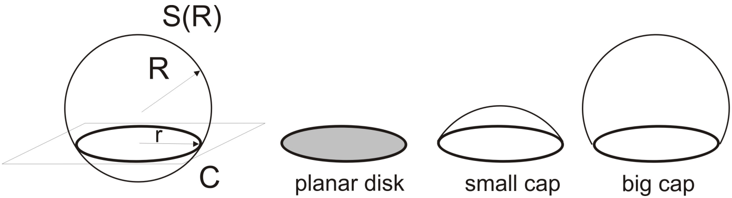


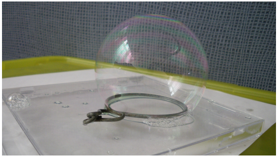
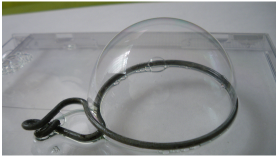




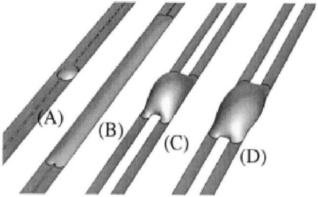
Experimento 13: Cómo hacerse famoso en el mundillo de la geometría

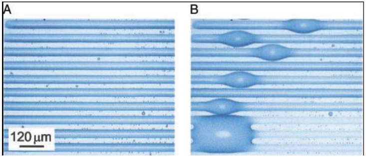
¿cuáles son las superficies CMC bordeadas por un círculos?



The Max Planck Institute of Colloids and Interfaces, Potsdam, Alemania





http://www.ugr.es/local/rcamino/publications/articles.htm

¡ Gracias por su atención !