XV CEAM
Baeza, 2014

SOCIEDAD ANDALUZA DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

LA MÚSICA: MATEMÁTICAS HECHAS ARTE

Manuel Amaro Parrado
mamarop@gmail.com

XV CEAM
Baeza, 2014

¿Existió primero la Música y se matematizó posteriormente o la Música, tal y como la conocemos, es una mera aplicación de las Matemáticas?

XV CEAM
Baeza, 2014

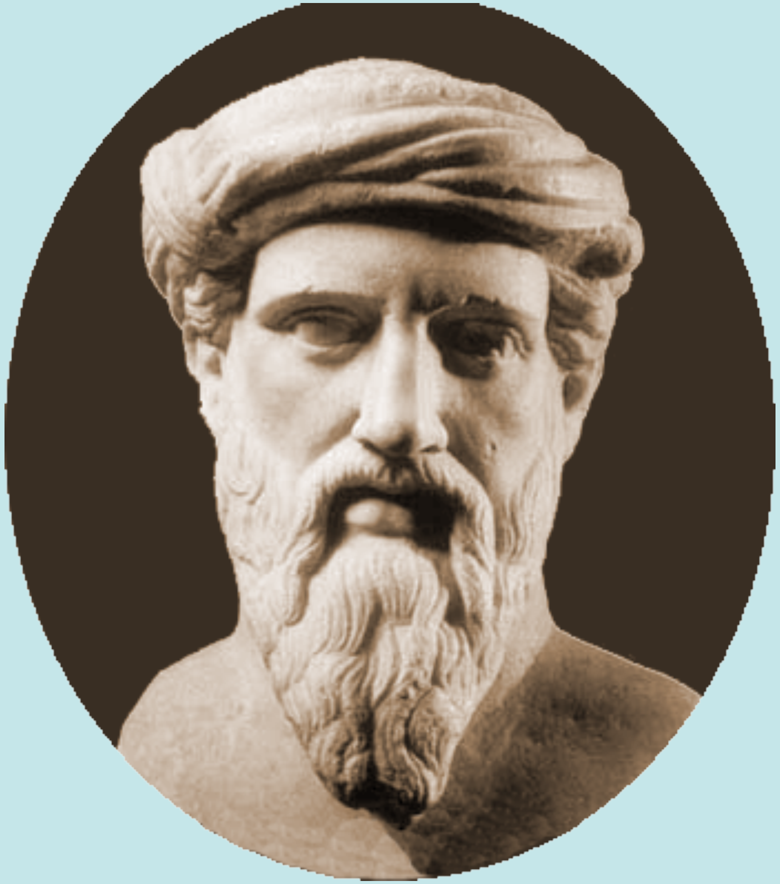
La palabra Matemáticas proviene del término griego Mathema, que significa “*conocimiento*”.

Los pitagóricos dividieron esta ciencia en cuatro secciones: Aritmética, Geometría, Astronomía y Música, que constituían la esencia del conocimiento.

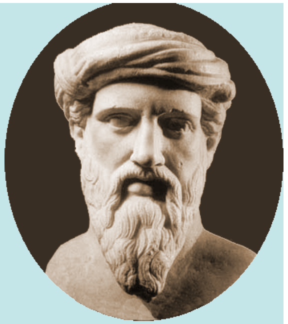
Las 7 artes liberales

- *Quatrivium* (Saberes exactos)
  - *Geometría*
  - *Aritmética*
  - *Música*
  - *Astronomía*
- *Trivium* (Saberes humanos)
  - *Gramática*
  - *Dialéctica*
  - *Retórica*

XV CEAM
Baeza, 2014



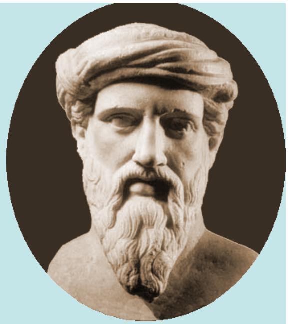
XV CEAM
Baeza, 2014



Monocordio

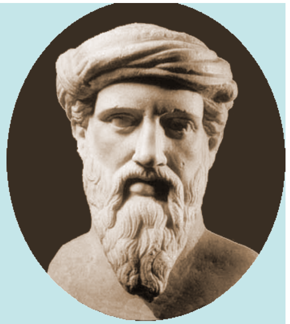
Monocordio (Museo Nacional Germánico de Nuremberg)

XV CEAM
Baeza, 2014



El fenómeno físico que se esconde tras la armonía es que tras pulsar una cuerda, no solo se produce una onda del largo de la cuerda, sino que se forman además dos ondas de la mitad de la longitud, tres ondas de un tercio de la longitud inicial y así sucesivamente. Cada vibración secundaria, conocida como *armónico*, es más aguda y suave que el sonido de la fundamental. Aunque estos armónicos parecen pasar desapercibidos, son los responsables de la diferencia de sonido entre los diferentes instrumentos musicales.

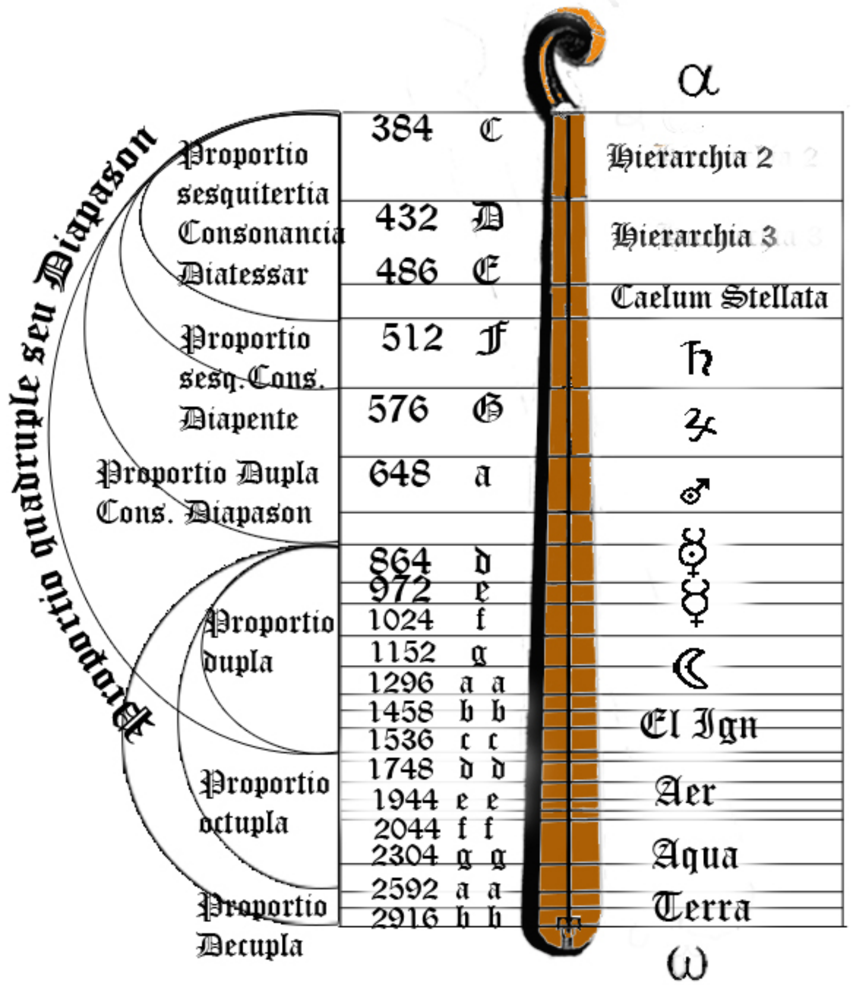
XV CEAM
Baeza, 2014

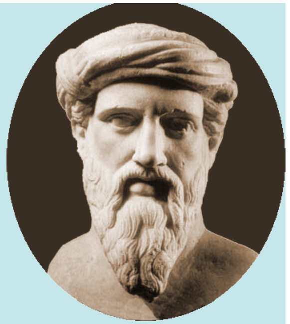


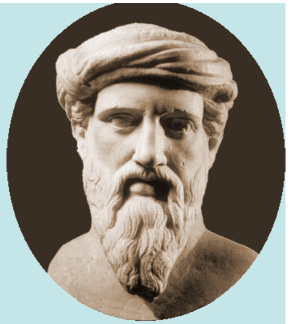
Pitágoras creó una escala musical uniendo sus innatas aptitudes musicales con sus conocimientos matemáticos.

Comprobó que cuerdas con longitudes de razones 1/2 (la mitad), 2/3 (dos tercios) y 3/4 (tres cuartas partes) producían sonidos muy agradables. Aunque Pitágoras no lo sabía, esto se produce porque comparten muchos de sus armónicos.

XV CEAM
Baeza, 2014

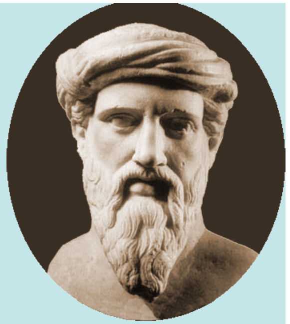






A pesar de que Pitágoras llamó a estas razones diapasón, diapente y diatesarón, hoy en día las conocemos como **octava, quinta y cuarta**.

XV CEAM
Baeza, 2014



Si partimos de un DO, estas relaciones nos darán las notas señaladas en rojo:

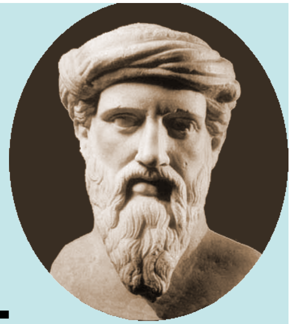
DO – RE – MI – FA – SOL – LA – SI - DO

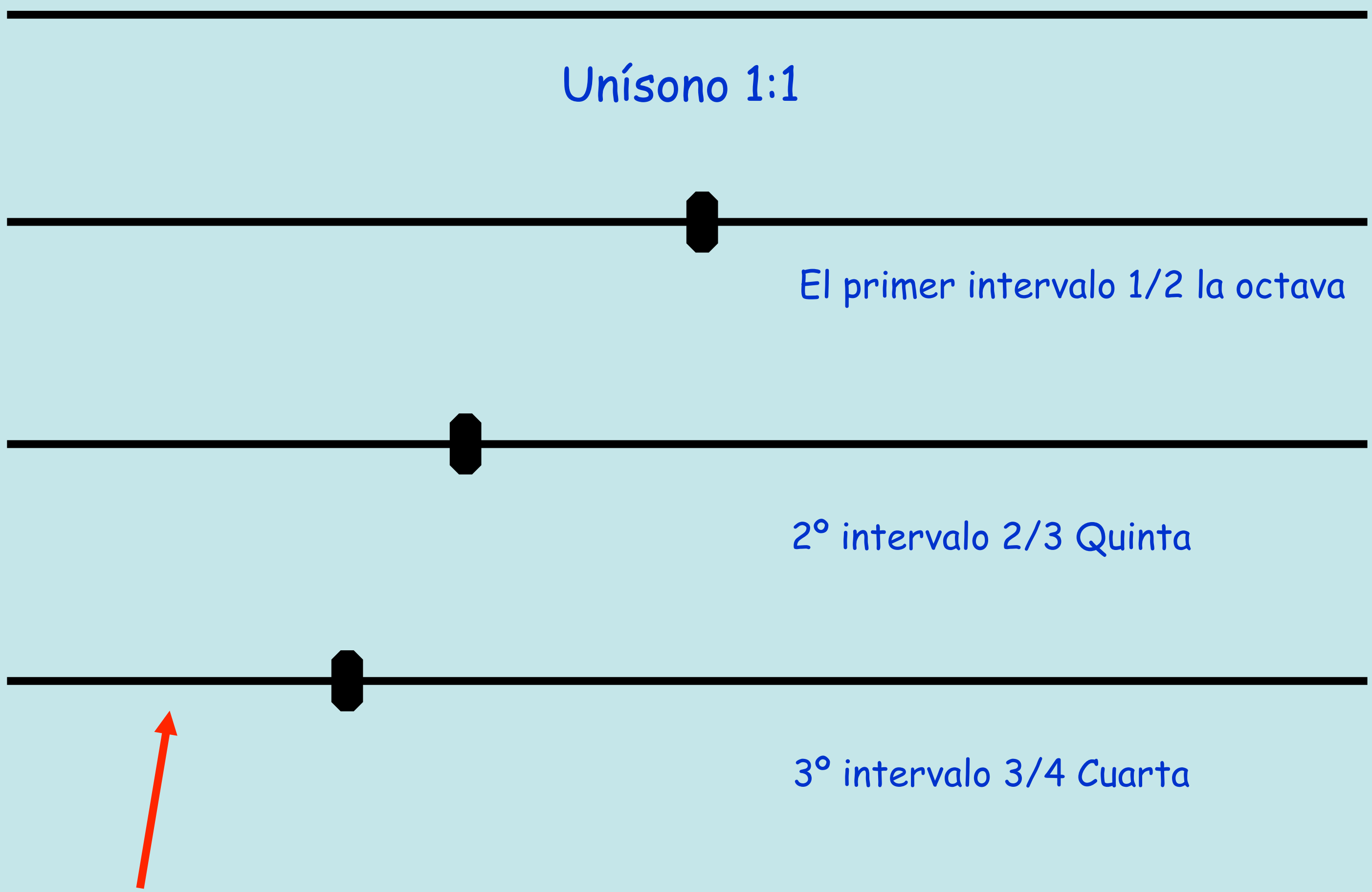
Cuarta 3/4

Quinta 2/3

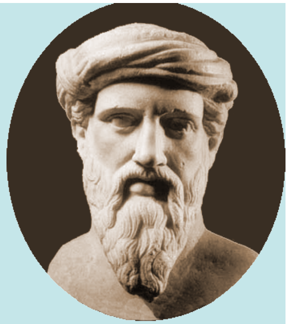
Octava 1/2

XV CEAM
Baeza, 2014





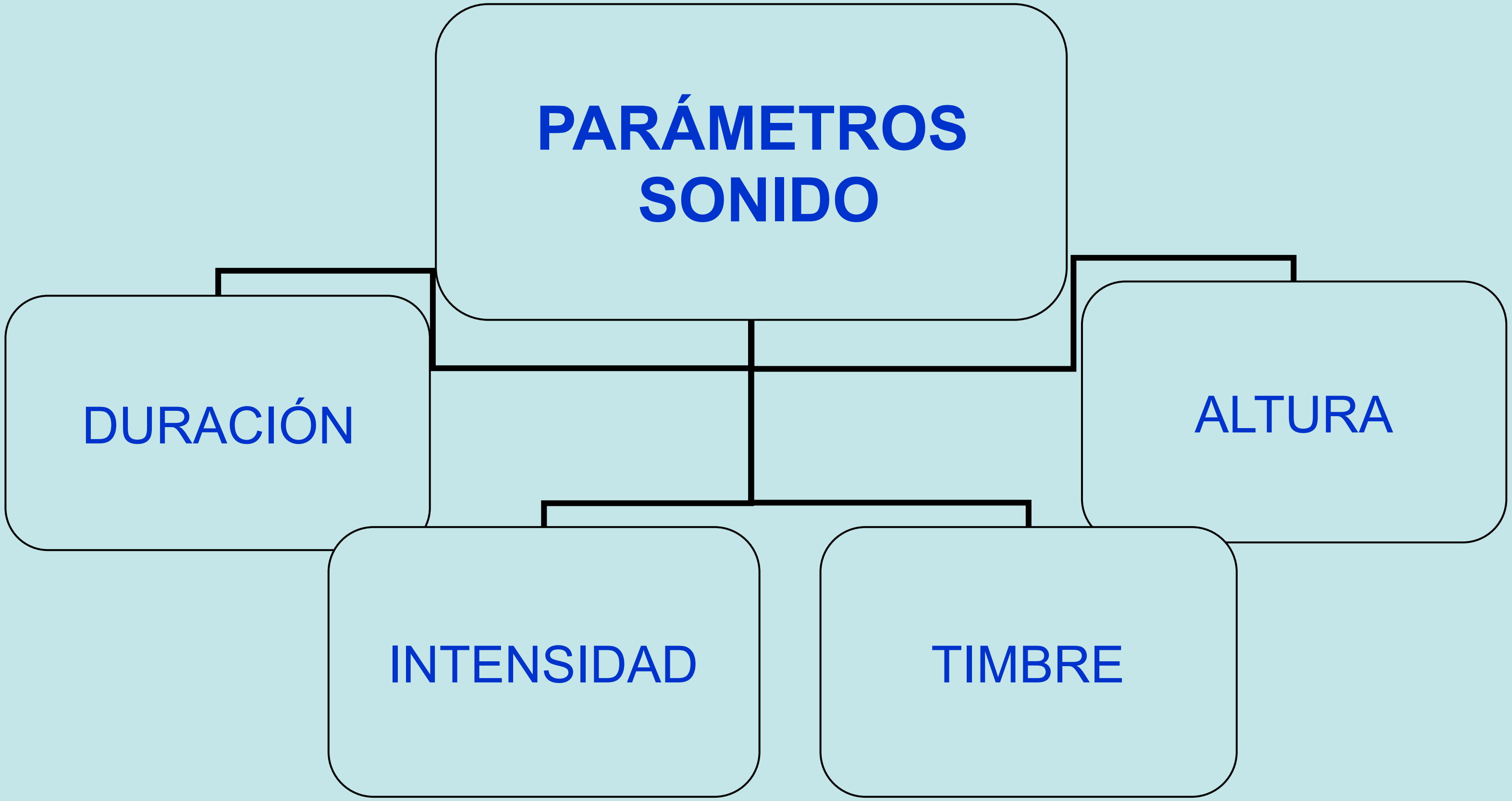
¿Qué nota obtendríamos si en la cuerda de arriba sonase un DO y tocásemos aquí?



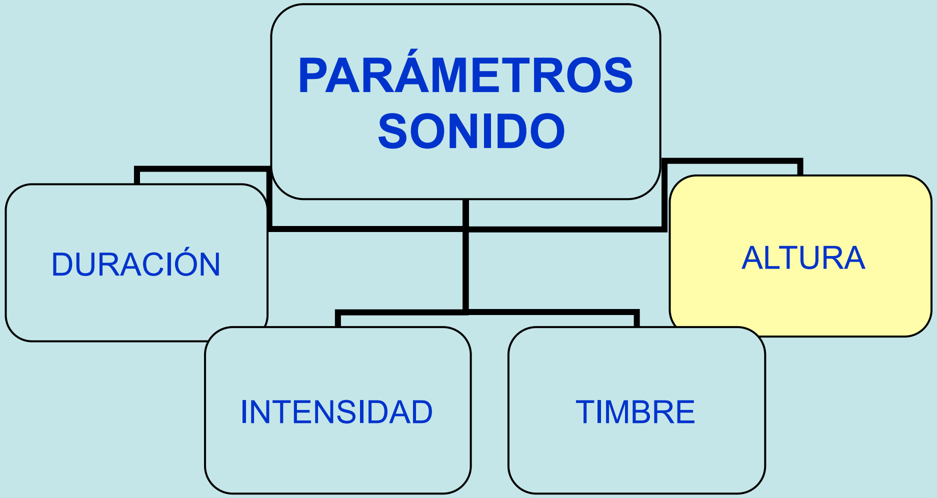
Pitágoras tuvo una maravillosa revelación fruto de los experimentos con su monocordio:

Existía una conexión entre la belleza de los sonidos y los números. Los mundos físicos y emocional podían ser descritos con números.

PARÁMETROS QUE INTERVIENEN EN EL SONIDO



XV CEAM
Baeza, 2014

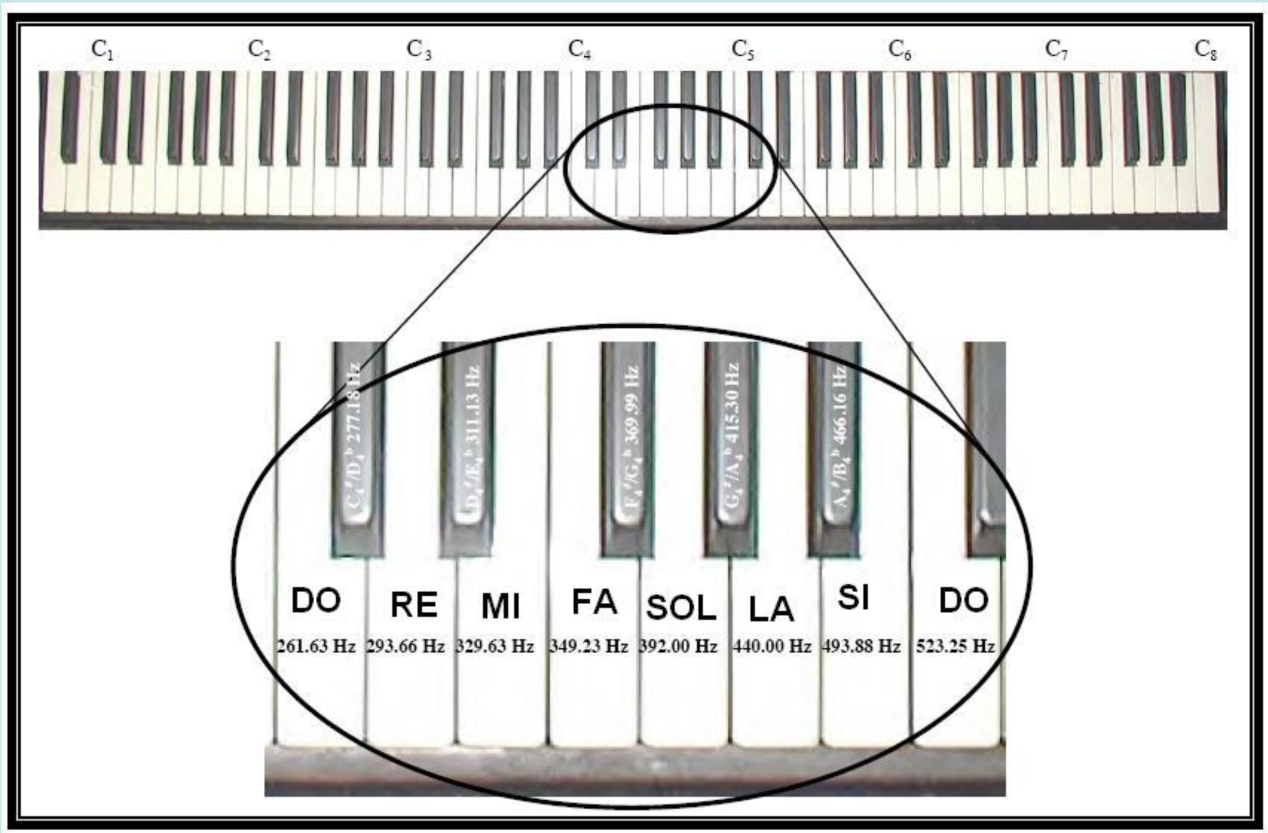


Los sonidos musicales vienen definidos por procesos físicos que pueden ser descritos mediante un modelo matemático. Una característica básica de los sonidos es su ALTURA o FRECUENCIA, que es medida en Hertzios (Hz).

La frecuencia se puede definir como el número de vibraciones u oscilaciones que se producen en un segundo, y viene medida en hertzios. Cuantas más vibraciones, tanto más agudo será el sonido.

En Música, las frecuencias absolutas no son tan importantes como lo son las relaciones que tienen las distintas frecuencias entre sí.

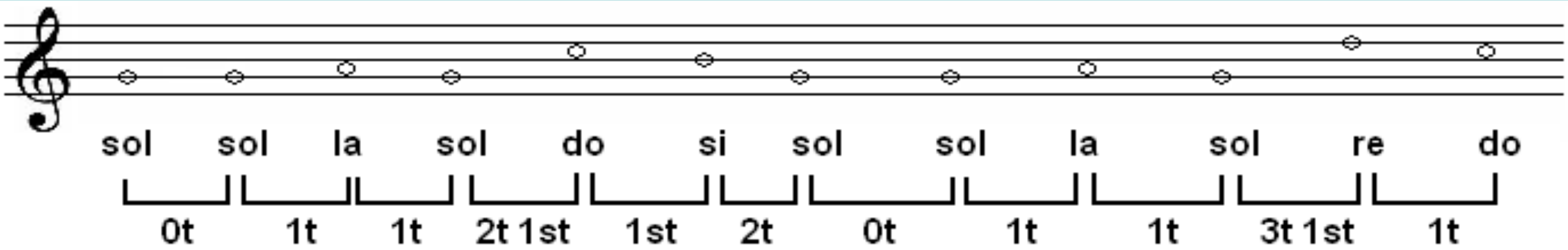
Una melodía se puede tocar con notas más agudas o graves, en diferentes octavas, sin que por ello deje de sonar igual, tan sólo cambiaría la altura manteniéndose el nombre de las notas.



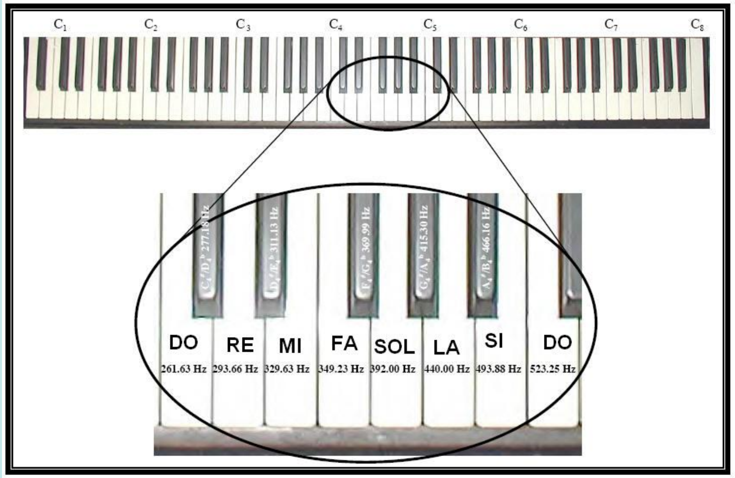
El patrón de tonos y semitonos ha de mantenerse inalterable para que suene la misma melodía partiendo de cualquier nota.

Pero también podríamos tocar la misma melodía cambiando completamente de notas, solo manteniendo la relación entre ellas.

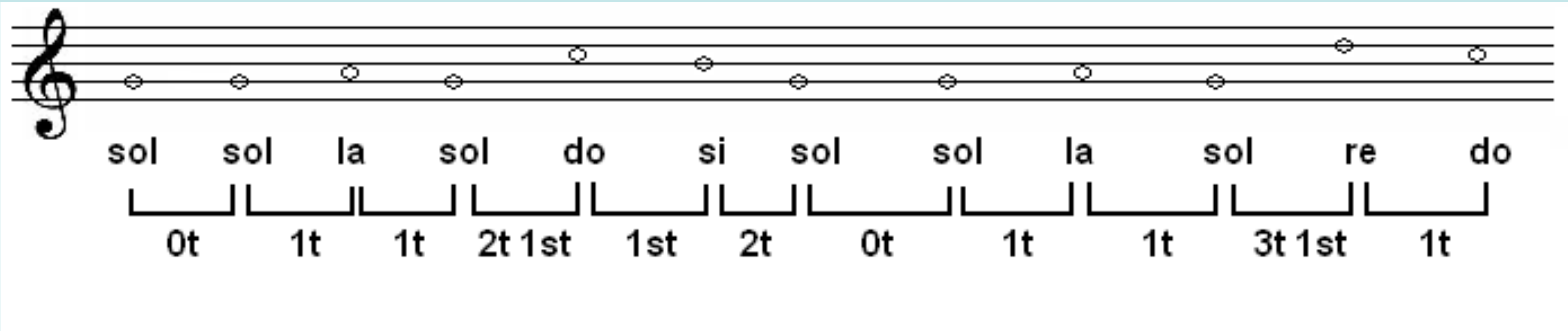
Veamos esto con un ejemplo:

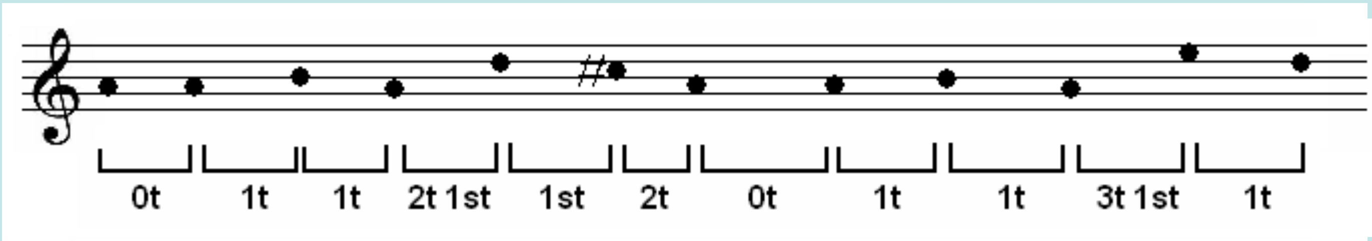


XV CEAM
Baeza, 2014

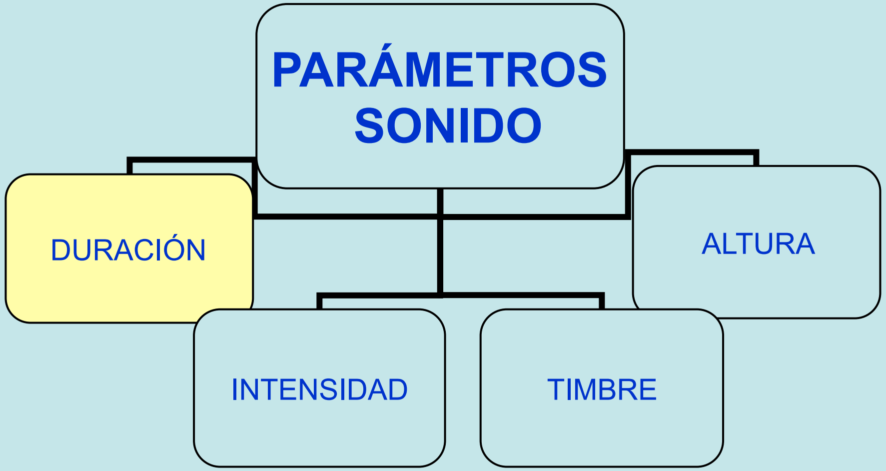


Probemos a tocar "cumpleaños feliz" empezando por LA.





XV CEAM
Baeza, 2014



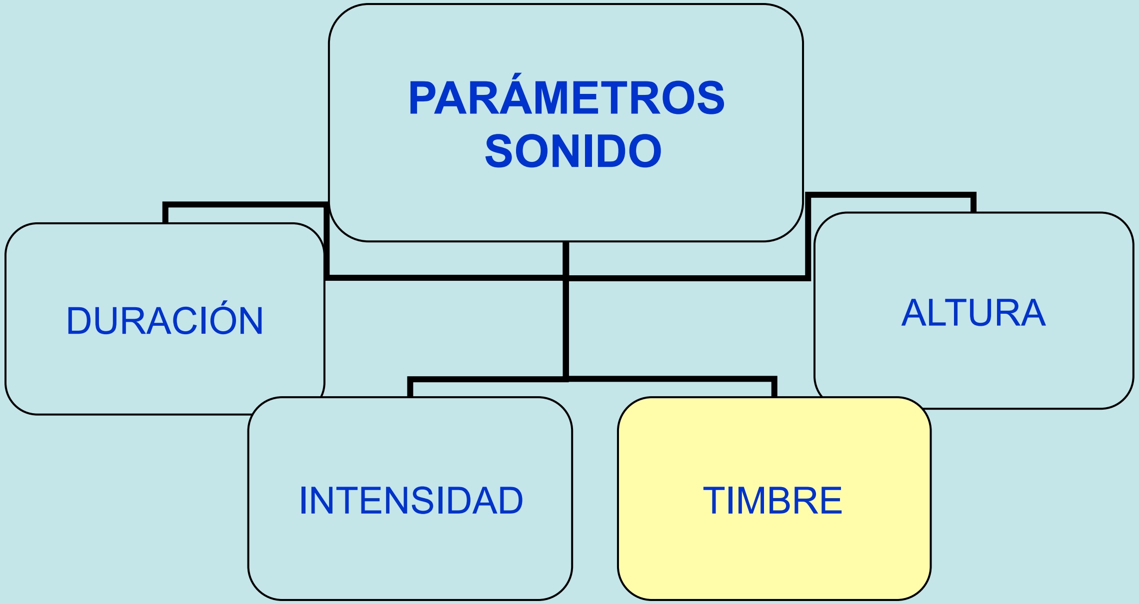
La DURACIÓN es el parámetro que nos permite diferenciar lo largo o corto que es un sonido.

Se expresa mediante las figuras y silencios musicales.

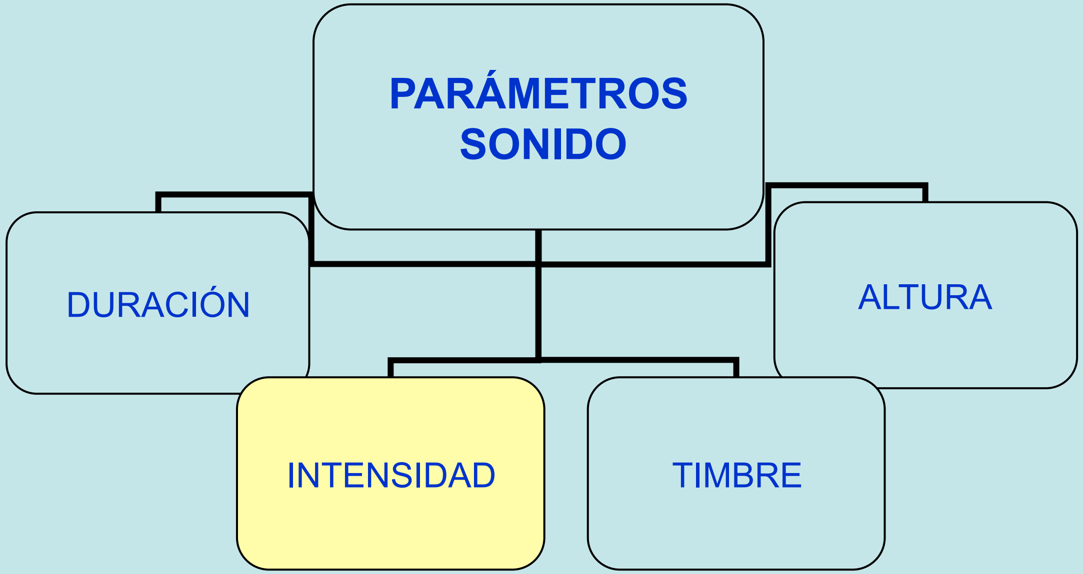
XV CEAM
Baeza, 2014

Figura	Nombre	Valor
	Redonda	4
	Blanca	2
	Negra	1
	Corchea	1/2
	Semicorchea	1/4
	Fusa	1/8
	Semifusa	1/16

XV CEAM
Baeza, 2014



El TIMBRE es la cualidad que nos permite diferenciar un instrumento, un ruido, una voz, de otros.



La INTENSIDAD viene medida en decibelios (db), que es un submúltiplo del belio (nombre que homenajea al Dr. Alexander Graham Bell).

La escala adoptada para medir la intensidad es logarítmica, lo cual quiere decir que un salto de +1 belio (10 decibelios) supone que la intensidad del sonido se ha multiplicado por 10.

XV CEAM
Baeza, 2014

Biblioteca → 20 db

Ruido casero → 30 db

Calle poco concurrida → 40 db

Calle con tráfico → 60 db

Fábrica → 90 db

Avión despegando → 120 db

XV CEAM
Baeza, 2014

Función que muestra la equivalencia entre intensidad (x) y decibelios (10Logx)

10 Log X	X
100	10000000000
90	1000000000
80	100000000
70	10000000
60	1000000
50	100000
40	10000
30	1000
20	100
10	10
0	1
-10	0.1
-20	0.01
-30	0.001
-40	0.0001
-50	0.00001
-60	0.000001
-70	0.0000001
-80	0.00000001
-90	0.000000001
-100	0.0000000001

XV CEAM
Baeza, 2014

Biblioteca → 20 db

Calle poco concurrida → 40 db

Entre una biblioteca y una calle poco concurrida, la diferencia es de 20 db.

¿Supone esto que el ruido de la calle es el doble que el de la biblioteca?

¡No, es 100 veces mayor!

20 db = 2 belios

¿Qué relación hay entonces entre el ruido de una casa y el sonido que produce un avión al despegar?

Ruido casero → 30 db

Avión despegando → 120 db

CONSTRUCCIÓN DE LA ESCALA MUSICAL

En Música, al igual que en Matemáticas, ha sido necesario unificar criterios, y para ello se ha establecido una nota estándar en función de su frecuencia.

La nota estándar es LA y viene definida por una frecuencia de 440 hz

Los experimentos de Pitágoras llevaron a un método de afinación con intervalos de razón de enteros. A esta afinación se la conoció como escala diatónica pitagórica, y fue la que se utilizó durante mucho tiempo en el mundo occidental.

XV CEAM
Baeza, 2014

Las ideas de quinta y de octava han sido históricamente claves a la hora de construir la actual escala musical. Una octava verifica la relación 2:1 , mientras que una quinta verifica la relación 3:2.

Si 440 hz se corresponde con un LA, entonces 220 hz y 880 hz también son LA, aunque en octavas diferentes.

SIMULACIÓN DE LA ESCALA PITAGÓRICA

Vamos a obtener todas las notas musicales, partiendo de la frecuencia 349,23 hz (FA), utilizando el método de las quintas.

Nos quedaremos con las frecuencias comprendidas en el intervalo 250 y 500 hz. Si se salen de este, bastará dividir entre 2 y obtener la frecuencia equivalente en dicha octava.

XV CEAM
Baeza, 2014

Lím inf 250 – Lím sup 500

349,23 x 3/2 = 523,84

523,84 : 2 = 261,9

261,9 x 1,5 = 392,8

392,8 x 1,5 = 589,2

589,2 : 2 = 294,6

294,6 x 1,5 = 441,9

441,9 x 1,5 = 662,8

662,8 : 2 = 331,4

XV CEAM
Baeza, 2014

Lím inf 250 – Lím sup 500

331,4 x 1,5 = 497,1

497,1 x 1,5 = 745,65

745,65 : 2 = 372,8

372,8 x 1,5 = 559,2

559,2 : 2 = 279,6

279,6 x 1,5 = 419,4

Lím inf 250 – Lím sup 500

419,4 x 1,5 = 629,1

629,1 : 2 = 314,5

314,5 x 1,5 = 471,7

471,7 x 1,5 = 707,5

707,5 : 2 = 353,7

XV CEAM
Baeza, 2014

Lím inf 250 – Lím sup 500

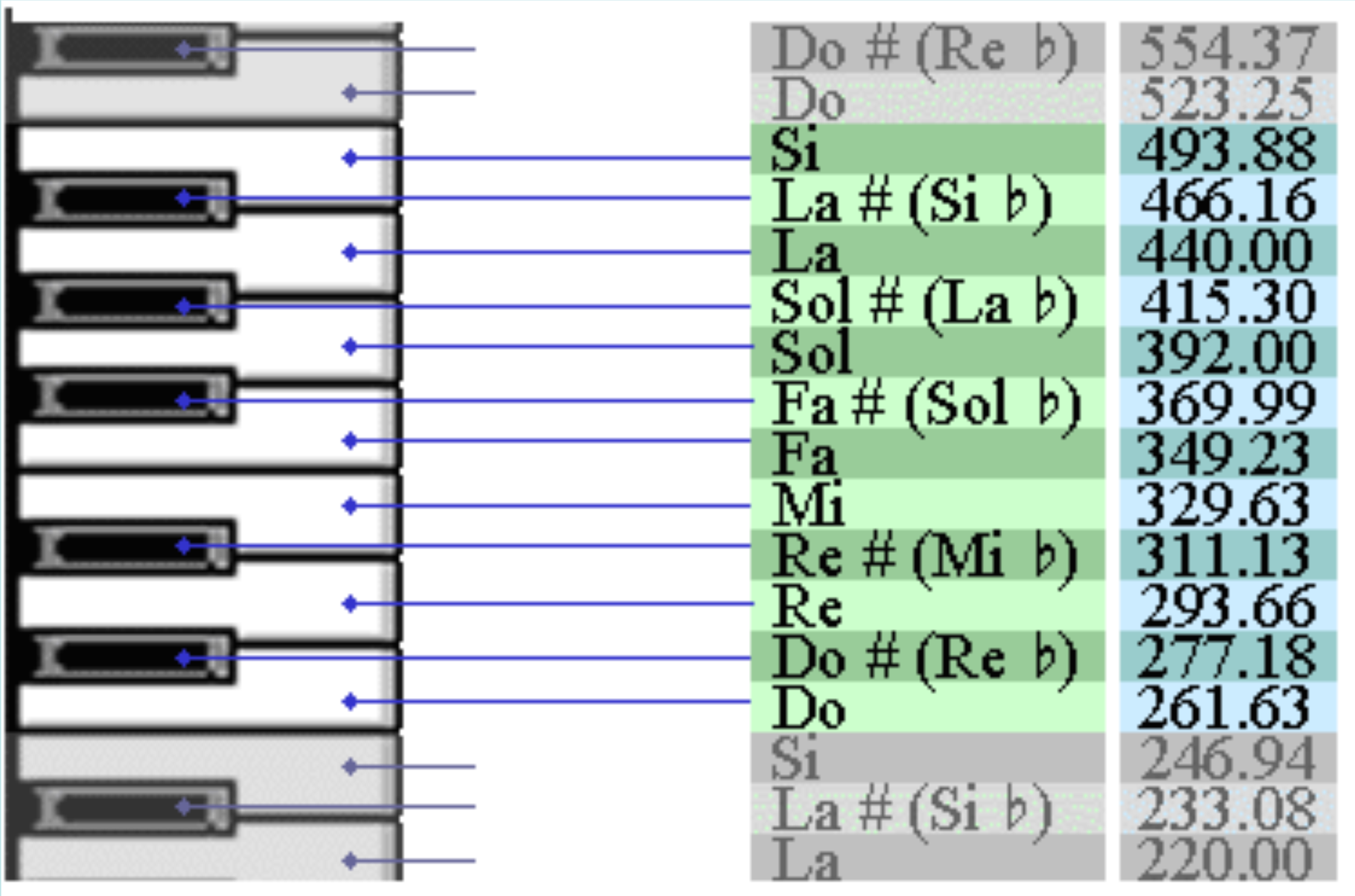
Observemos esta sucesión numérica de frecuencias:

349 – 261 – 392 – 294 – 441 – 331 – 497 – 372 – 279 – 419 – 314 – 471 - 353

Las ordenaremos de menor a mayor:

261-279-294-314-331-349/353-372-392-419-441-471-497

261-279-294-314-331-349-372-392-419-441-471-497



497
471
441
419
392
372

331
314
294
279
261

XV CEAM
Baeza, 2014

XV CEAM
Baeza, 2014

¿Por qué se produce este pequeño error?

Partiendo del FA original, hemos llegado, mediante el método de las quintas, a un FA situado exactamente 7 octavas por encima.

$$349{,}23 \times (1{,}5)^{12} = 45311$$

Si dividimos 45311 por 2^7 resulta 353,9 que es el "nuevo FA" que habíamos obtenido

Lo que ocurre es que 2^7 = 128 no es igual que $(3/2)^{12}$ =129,746

Dicho de otra forma, siete octavas no son exactamente lo mismo que doce quintas.

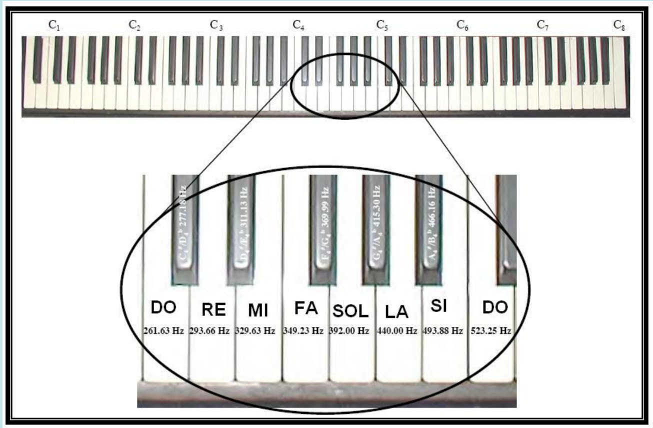
A este error, calculado como el cociente entre 129,75 y 128, se le conoce como <u>coma pitagórica</u>, y vale exactamente 1,013643

XV CEAM
Baeza, 2014

La solución a este problema ha sido motivo de discusión a lo largo de la historia. Se han dado distintas opciones o métodos encaminados a acortar cada una de las quintas de manera poco perceptible, pues si la **quinta** es una relación importante que han de verificar las notas, mucho más lo es el concepto de **octava**.

XV CEAM
Baeza, 2014

Para arreglar este error, en el siglo XVII se convino adoptar la siguiente solución, capaz de mantener el sistema clásico de octavas de doce notas.



Supongamos una octava completa, desde una nota cualquiera que denotaremos con su frecuencia a_1, hasta su octava superior a_{13}

Ha de verificarse que $a_{13} = 2a_1$

El organista alemán Andreas Werckmeister convino que la distancia existente entre cada uno de los semitonos fuese la misma, es decir, convino convertir

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{13}$$

en una progresión geométrica de razón r aún desconocida.

Con este nuevo método, podríamos calcular la frecuencia exacta de una nota sin más que utilizar esta razón.

Pero, ¿cómo se calcula?

Si tenemos una progresión geométrica, entonces $a_{13} = a_1 * r^{12}$

XV CEAM
Baeza, 2014

Luego,

$$\begin{cases} a_{13} = a_1 * r^{12} \\ a_{13} = 2a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2a_1 = a_1 * r^{12}$$

Como a_1 es distinto de cero, entonces podemos dividir, luego,

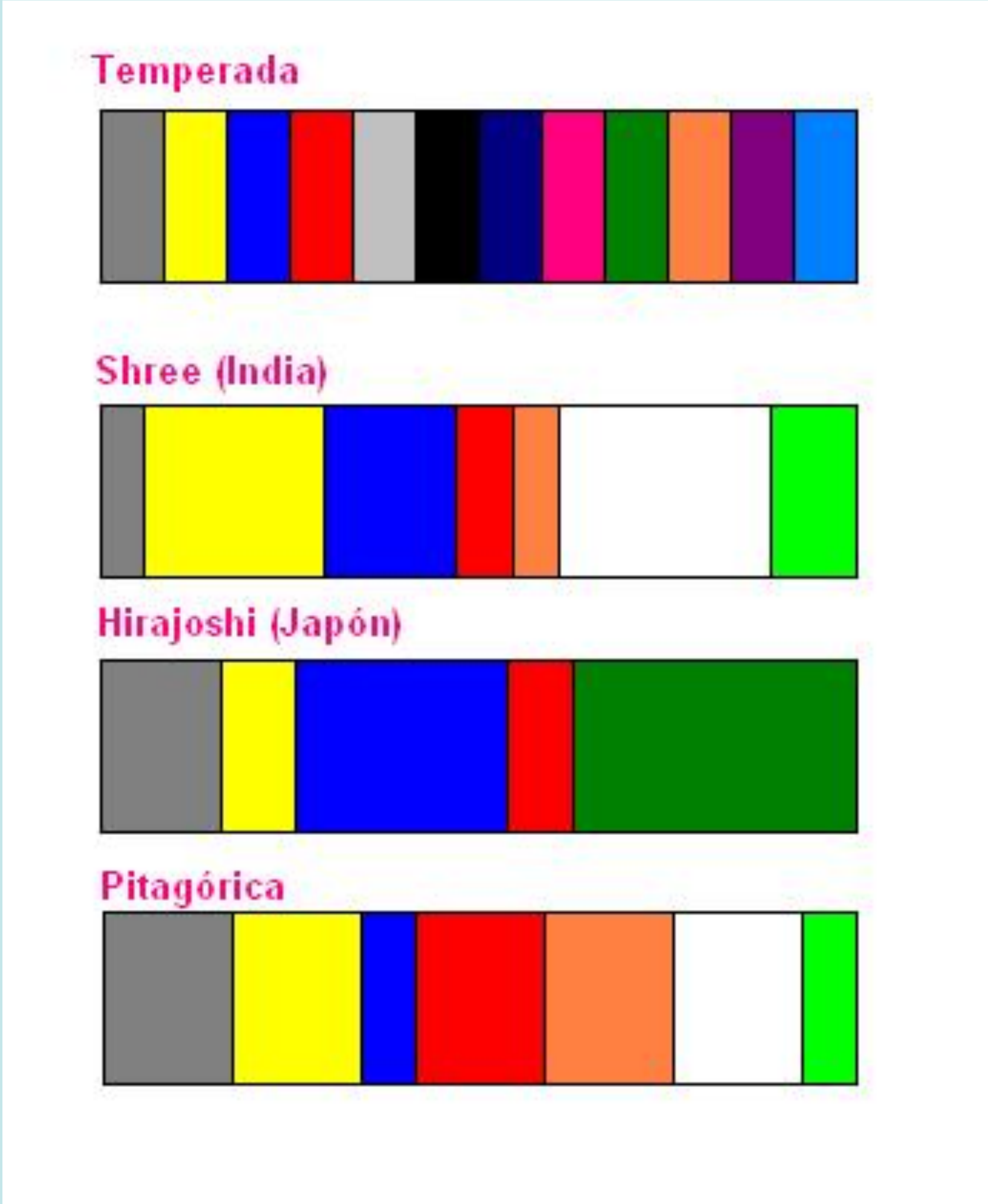
$$2 = r^{12}$$

Y con esto llegamos a que

$$r = \sqrt[12]{2}$$

A este sistema de afinación se le conoce con el nombre de TEMPERAMENTO IGUAL.

XV CEAM
Baeza, 2014



XV CEAM
Baeza, 2014

¿Existió primero la Música y se matematizó posteriormente o la Música, tal y como la conocemos, es una mera aplicación de las Matemáticas?

"LA MÚSICA ES LA MATEMÁTICA HECHA ARTE"

Eduardo Lechuga

XV CEAM
Baeza, 2014

SOCIEDAD ANDALUZA DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES