Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2014, Vol. 31(1), nº 86, 113-128

El álgebra elemental en las Escuelas Normales Superiores a finales del siglo XIX

Vicente Meavilla Seguí
meavilla@unizar.es
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Antonio M. Oller-Marcén
oller@unizar.es
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar

Resumen: *Los contenidos de álgebra elemental estuvieron presentes en los programas de enseñanza de las Escuelas Normales Superiores y en los programas para las oposiciones a las Escuelas del Grado Superior durante la segunda mitad del siglo XIX. En este artículo analizaremos un manual consagrado a la enseñanza del álgebra elemental, el Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898), escrito por Enrique Molina Borrego. Este análisis nos servirá para tratar de conocer el nivel de los conocimientos algebraicos exigidos a los maestros de primera enseñanza superior en dicha época.*
Palabras clave: *Álgebra elemental, Formación del profesorado, Escuelas Normales Superiores, Siglo XIX, Enrique Molina Borrego.*

The elementary algebra in Higher Normal Schools in the late nineteenth century

Abstract: *Elementary algebraic contents were present in the syllabus of the Escuelas Normales Superiores and of the civil service examinations to become an elementary or middle school teacher during the second half of the XIX century. In this paper we analyze a textbook devoted to the teaching of elementary Algebra, the Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898), written by Enrique Molina Borrego. This analysis will be useful in order to known the level of the algebraic knowledge of teachers by that time.*
Keywords: *Elementary algebra, Teacher training, Escuelas Normales Superiores, XIX Century, Enrique Molina Borrego.*

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente el currículo de Educación Primaria en España se organiza en torno a cuatro bloques dedicados respectivamente a la Aritmética, a la medida de magnitudes, a la Geometría y al tratamiento del azar. En correspondencia con estos bloques de contenidos, los planes de estudio de los Grados de Maestro de Educación Primaria[1] no dedican tiempo a la formación algebraica de los futuros maestros. Lo mismo sucede en el caso de la Educación Infantil.

Sin embargo, durante la última parte del siglo XIX la situación era diferente. Ya desde 1847, año en que se dio a las Escuelas Normales la consideración de Escuelas profesionales (Melcón, 1992, p. 108), encontramos referencia al Álgebra en sus planes de estudios.

En este trabajo pretendemos analizar la formación algebraica de los maestros de primera enseñanza superior durante esa época. Para ello, puesto que "*los libros de texto determinan la enseñanza en la práctica más que los decretos de los diferentes gobiernos*" (Schubring, 1987), nos centraremos en analizar en detalle un manual que consideramos paradigmático dada la formación y los puestos académicos ocupados por su autor: El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* de Enrique Molina Borrego.

Fruto de dicho análisis, realizado siguiendo ideas de Picado, Rico y Gómez (2013), seremos capaces de determinar los conocimientos algebraicos que se esperaban de los maestros en esa época.

2. EL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA Y LAS OPOSICIONES DE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX.

Comenzaremos el trabajo con la revisión de algunos textos legales de la época, que también muestra la evolución en el tratamiento de dicha materia dentro de los planes de estudios:

- En el Real Decreto de 30 de marzo de 1849 se incluye unas "Nociones de Álgebra" entre las materias que se han de dar durante los tres años que duren los estudios. Más en concreto, tanto la Circular del 4 de octubre de 1849, como la del 18 de septiembre de 1850 determinan que dicha materia debe impartirse en el segundo curso.
- En la Real Orden del 24 de septiembre de 1853 estas "Nociones de álgebra" se trasladan al tercer curso del plan de estudios.
- La Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857 (Ley Moyano) distinguía entre los títulos de Maestro de primera enseñanza elemental y superior (consistiendo el segundo en una ampliación del primero). El Álgebra se reservaba para los Maestros de enseñanza superior. De hecho, el Real Decreto de 20 de septiembre de 1858 establecía entre las asignaturas que debían superarse para optar al título de Maestro de primera enseñanza superior una titulada "Complemento de Aritmética y nociones de Álgebra".

1. Los autores han consultado los planes de estudios de las universidades de Zaragoza, Valladolid, Granada y Autónoma de Barcelona. Dado el actual proceso de convergencia europea no cabe esperar diferencias en el resto de universidades españolas.

En correspondencia con su presencia en los planes de estudios, el Álgebra también hacía aparición en los programas para las oposiciones a las Escuelas del Grado Superior. Así, en la Real Orden de 12 de noviembre de 1894, que establecía dichos programas, se proponían los diecinueve temas siguientes:

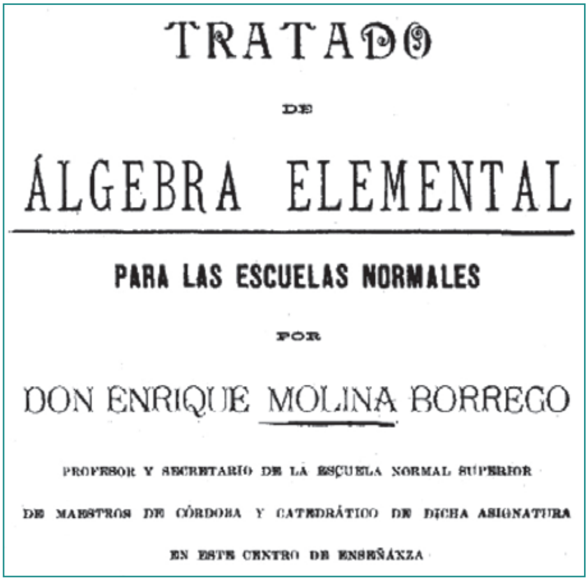
- 62. ¿Cuál es el objeto del Álgebra y en qué se diferencia de la Aritmética? Signos del lenguaje algebraico: su utilidad. Expresión algebraica monomio y polinomio. Ejemplos.
- 63. Coeficiente y exponente. Qué son términos semejantes y cómo se simplifican. Fórmula algebraica. Valor numérico de una expresión literal. Ejemplos.
- 64. En qué consisten las operaciones algebraicas. Cómo se suman las cantidades literales. Cómo se hace la sustracción algebraica. Ejemplos.
- 65. Origen de las cantidades negativas. Modo de interpretar semejantes expresiones. Convertir la adición en sustracción y viceversa. Ejemplos.
- 66. Objeto de la multiplicación algebraica. Regla para el signo del producto. Cómo se multiplican dos potencias de una misma cantidad. Multiplicar un monomio por otro. Ejemplos.
- 67. Cómo se multiplica un polinomio por un monomio. Separar el factor que sea común a varios términos de un polinomio. Cómo se multiplica un polinomio por otro.
- 68. Cuál es el cuadrado de un binomio. Ídem del cubo. Cuál es el producto de la suma de dos números por su diferencia. Ejemplos.
- 69. Cuál es el objeto de la división algebraica. Regla para el signo del cociente. Cómo se dividen dos potencias de una misma cantidad. Dividir un monomio por otro. Ejemplos.
- 70. Cómo se divide un polinomio por un monomio. Ordenar los términos de un polinomio. Dividir un polinomio por otro. Correspondencia entre la división algebraica y la aritmética. Ejemplos.
- 71. Qué se entiende por fracción literal. El valor de una fracción literal no altera si se multiplican o dividen sus dos términos por una misma cantidad literal. Demostración y ejemplos.
- 72. Simplificación de una fracción literal. Cómo se convierten varias fracciones literales a un denominador común. Sumar cantidades fraccionarias.
- 73. Sustracción de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y modo de resolverlos.
- 74. Multiplicación de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y manera de resolverlos.
- 75. División de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y modo de resolverlos.
- 76. Qué se entiende por ecuación. Ecuaciones de primer grado. Trasposición de términos en una ecuación. Cómo se quitan los denominadores. Ejemplos.
- 77. Cómo se resuelve una ecuación de primer grado con una incógnita. Un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas. Métodos de eliminación. Ejemplos.

- 78. Cómo se forma el cuadrado de un monomio. Ídem de un binomio. Extraer la raíz cuadrada de un monomio. La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de sus factores. Ejemplos.
- 79. Progresión. Progresión aritmética y geométrica. Término general de una progresión aritmética. Suma de los términos de una progresión aritmética. Ejemplos.
- 80. Progresión. Progresión geométrica. Término general de una progresión geométrica. Suma de los términos de una progresión geométrica. Ejemplos.

3. EL TRATADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAL PARA LAS ESCUELAS NORMALES

El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* (Molina, 1898a) fue escrito por Enrique Molina Borrego. De este autor sólo sabemos que fue profesor y secretario de la Escuela Normal Superior de maestros de Córdoba y catedrático de la asignatura de Álgebra en ese centro de enseñanza, tal como se detalla en la portada de su obra. Además de su «Tratado de Álgebra», Molina también escribió un *Tratado de Aritmética para las Escuelas Normales* (Molina, 1898b).

Dada la formación académica del autor y su título de catedrático de Álgebra, estimamos que el antedicho manual puede ser una herramienta válida para establecer el nivel de conocimientos de carácter algebraico exigido a los maestros de primera enseñanza superior.


TRATADO

DE

ÁLGEBRA ELEMENTAL

PARA LAS ESCUELAS NORMALES

POR

DON ENRIQUE MOLINA BORREGO

PROFESOR Y SECRETARIO DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR
DE MAESTROS DE CÓRDOBA Y CATEDRÁTICO DE DICHA ASIGNATURA
EN ESTE CENTRO DE ENSEÑANZA

Figura 1. Detalle de la portada del Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898)

3.1. La estructura del libro

El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* ocupa ciento cinco páginas, no contiene prólogo y sus contenidos se organizan según las treinta y cinco secciones siguientes, tal como se detalla en el índice de la obra:

- 1. Nociones preliminares.
- 2. Adición de las cantidades algebraicas
- 3. Sustracción de las cantidades algebraicas
- 4. Multiplicación de las cantidades algebraicas.
- 5. Consecuencias de la multiplicación de polinomios.
- 6. División de las cantidades algebraicas.
- 7. Consecuencias de la división de polinomios.
- 8. De las fracciones algebraicas.
- 9. Cálculo de las cantidades con exponente negativo.
- 10. Interpretación de las expresiones a/0 y 0/0.
- 11. Ecuaciones de primer grado.
- 12. Resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- 13. Discusión de los valores de la incógnita en una ecuación de primer grado.
- 14. Problemas de primer grado con una incógnita
- 14. Eliminación de incógnitas.
- 16. Resolución de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.
- 17. Discusión de los valores de las incógnitas de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.
- 18. Problemas de primer grado con dos o más incógnitas.
- 19. Resolución de un cierto número de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas.
- 20. Resolución de varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas.
- 21. Potencias de los monomios.
- 22. Raíces de los monomios.
- 23. Coordinaciones.
- 24. Permutaciones.
- 24. Combinaciones.
- 26. Binomio de Newton.
- 27. Potencias de los polinomios.
- 28. Raíz cuadrada de los polinomios.
- 29. Raíz cúbica de los polinomios.
- 30. Cálculo de los radicales algebraicos.
- 31. Cálculo de las cantidades que tienen exponentes fraccionarios.
- 32. Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado.
- 33. Ecuaciones de segundo grado.
- 34. Discusión de la ecuación general de segundo grado con una incógnita.
- 35. Problemas de segundo grado con una incógnita.

3.2. El contenido del manual

Picado, Rico y Gómez (2013) consideran que los contenidos de un libro de texto se pueden caracterizar desde tres categorías: generalidades, contenido matemático y didáctica.

Estos autores establecen diversas unidades de análisis para cada una de las antedichas categorías. Así, los aspectos históricos, los conocimientos previos, etc., sirven como unidades de análisis para la categoría «generalidades»; los conceptos, procedimientos, representaciones y contextos pueden organizar la categoría «contenido matemático»; por último, la categoría «didáctica» se puede analizar desde los objetivos, tareas, materiales, etc.

En lo que sigue utilizaremos una adaptación de las técnicas anteriores para la caracterización de los contenidos del «Tratado de Álgebra elemental».

3.2.1. El contenido matemático

Para analizar el contenido matemático de la obra objeto de estudio nos centraremos en los aspectos siguientes: Notaciones, conceptos, procedimientos, resultados y representaciones.

Notaciones

Un aspecto muy a tener en cuenta en las Matemáticas en general y en el Álgebra en particular es el uso de distintas notaciones y convenciones por parte del autor. Vamos a señalar las principales peculiaridades de este texto.

- A la hora de construir expresiones algebraicas, el autor utiliza las primeras letras minúsculas del alfabeto para representar los datos o coeficientes y las últimas para designar las incógnitas. Esta práctica es la más habitual aún hoy en día. Por otro lado, los signos para las operaciones o la igualdad que se utilizan son los mismos que los de la Aritmética salvo los dos símbolos de ambigüedad: y .
- En lo que concierne a los paréntesis, Molina Borrego también utiliza barras verticales[2], especialmente en aquellos casos en que se deben agrupar términos semejantes (véase la figura siguiente).

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{matrix}a\\+b\\+c\\+d\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{matrix}\right|x+abcd$$

Figura 2. Desarrollo del producto de cuatro binomios (p.67)

2. Un simbolismo similar ya fue utilizado por René Descartes en su Geometría (1637).

- En la sección 32 (*Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado*) no se utiliza un símbolo específico para la unidad imaginaria[3].

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

Figura 3. Adición de números complejos (p. 90)

- En el estudio de las combinaciones y permutaciones ordinarias no se utilizan los *números combinatorios*[4] o *coeficientes binomiales* ni el símbolo *factorial*[5].

Conceptos

A lo largo del manual, cuando se introducen conceptos, se utiliza un lenguaje verbal claro y ajustado al público al que va dirigido: los futuros maestros de primera enseñanza superior. En general, las definiciones se acompañan de ejemplos aclaratorios.

Para corroborar esta afirmación, sirvan los ejemplos siguientes:

- "Se llama expresión algebraica al conjunto de letras, o números y letras ligadas por los signos de las operaciones ordinarias, como por ejemplo, $a^2 b$ es una expresión algebraica, y la cantidad $2ab^2 + 12a^2b - ab^3$, es otra expresión algebraica" (p. 6).
- "Multiplicar una cantidad algebraica por otra es hallar una tercera cantidad que sea respecto de una de ellas en valor y signo lo que la otra es de la unidad positiva. La primera se llama multiplicando, la segunda multiplicador y la tercera producto" (p. 11).
- "A la reunión de dos cantidades unidas por el signo igual se da el nombre de igualdad. La cantidad colocada a la izquierda del signo recibe el nombre de primer miembro, y la que está a la derecha segundo miembro. Se llama identidad a la reunión de dos cantidades iguales unidas por el signo igual, y que sólo se diferencian en la forma, como 6 x 2 x 3 = 4 x 9. Se da el nombre de ecuación a la igualdad que contiene una o varias incógnitas, como $24x + \frac{x}{6} - 2 = 36$" (p. 29).

- "Se llaman combinaciones o productos diferentes a todos los diferentes grupos que se pueden formar con un número determinado de objetos tomándolos 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4. . . n a n, de modo tal que un mismo objeto sólo entre una vez en cada grupo y que dos cualesquiera de ellos difieran, a lo menos, en uno de los objetos de que están formados" (p. 63).

---

3. El símbolo *i* para la unidad imaginaria fue introducido por Leonhard Euler en su *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet* (1794).

4. El símbolo $\binom{m}{n}$ para el número de combinaciones ordinarias de *m* elementos tomados de *n* en *n* fue introducido en 1827 por Andreas von Ettingshausen (Meavilla, 2012).

5. El símbolo '!' para representar el factorial fue introducido por Christian Kramp en 1808 (Meavilla, 2012).

- "Llamamos módulo de una expresión imaginaria de la forma a + b $\sqrt{-1}$, a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las cantidades reales a y b; por tanto el módulo de la expresión anterior será $\sqrt{a^2 + b^2}$" (p. 91).

Procedimientos

Dado el carácter eminentemente práctico de la obra, los contenidos algebraicos procedimentales son más numerosos que los conceptuales. Los procedimientos que se describen y ejemplifican a lo largo del texto se refieren principalmente a: operaciones con expresiones algebraicas, potencias de exponente entero y fraccionario, resolución y discusión de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, operaciones con radicales y operaciones con números complejos.

Las demostraciones que acompañan a algunos de ellos tienen el rigor que puede exigirse en un texto dedicado a la formación de maestros y dota al «Tratado de Álgebra» de un nivel superior al de algunos textos contemporáneos en los que las pruebas se sustituyen por comprobaciones.

A modo de ejemplo, presentamos la demostración del contenido procedimental concerniente a la resolución de una ecuación de segundo grado incompleta (pp. 93 – 94).

Sea ahora la ecuación incompleta

$$ax^2 - bx = 0.$$

Dividiendo ambos miembros por a, tendremos

$$x^2 \frac{b}{a} x = 0$$

y separando el factor común x, resulta

$$x\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Para que este producto sea 0 es necesario que por lo menos sea 0 uno de los factores; luego $x = 0$ es una solución.

Si convenimos que el otro factor $x - \frac{b}{a}$ sea igual á 0, tendremos la ecuación

$$x - \frac{b}{a} = 0$$

Pasando el término conocido al segundo miembro, resulta que

$$x = \frac{b}{a}$$

De lo demostrado anteriormente, resulta que *la incógnita de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 - bx = 0$, tiene dos valores: uno de ellos es 0 y el otro es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario partido por el coeficiente del primer término.*

Figura 4. Procedimiento para la resolución de una ecuación de 2º grado incompleta