Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2016, Vol. 33 (1), nº 92, 89-98*

Rincón "Sapere Aude"…

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

La actividad matemática se encuentra en el corazón de toda enseñanza de las ciencias, en general, y en la de las matemáticas, en particular. Es a la vez un instrumento de motivación de los alumnos, un medio de contextualizar los conceptos estudiados y de hacer la conexión con otras materias escolares, y concebida por diferentes estatus: enseñantes, pedagogos, autores de manuales escolares e investigadores en didáctica de las matemáticas. Se dirige a un público variado y puede ser entendida de varias formas.

La investigación en educación matemática ha centrado, desde hace tiempo, su atención en el diseño de actividades basado en la Resolución de Problemas (RdP) concernientes a situaciones reales con el convencimiento de obtener una mayor garantía del aprendizaje matemático por parte de nuestros estudiantes.

Con esta nueva sección se quiere poner de manifiesto como la vida real, y no tan real, nos ofrece bellos ejemplos de reflexión para que el matemático pueda realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado. Con el estudio de casos queremos conseguir motivar al profesorado de los diferentes niveles la necesidad de afrontar una enseñanza problematizada y modelizada de las matemáticas. Se propondrán como ejercicios o actividades de clase aquellas que sean verdaderos problemas o situaciones problemáticas en las que haremos un estudio de las estrategias y alternativas para su resolución. Además en cada número se plantearán varios ejercicios para que el lector interesado pueda utilizarlos como recurso didáctico en el aula cuyas soluciones aparecerán en el siguiente número al de su publicación. Una situación problemática atractiva para el alumno puede ser más valiosa que una docena de ejercicios formales o problemas rutinarios. Los referentes que iremos exponiendo en cada número servirán para la motivación para el profesorado, y por ende al alumno, y la funcionalidad y utilidad del contenido matemático. Presentaremos varias situaciones que corresponden a diferentes niveles de enseñanza, y se deja al lector la opción de usarlo en el nivel que estime oportuno pero siempre con la filosofía de base del gran matemático Félix Klein: *enseñar matemáticas elementales desde el punto de vista superior*. Hay muchos dominios matemáticos, en cuanto a RdP se refiere, casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras. Muchos de estos dominios pueden ser planificados de manera que puedan transformarse en potentes generadores de importantes competencias, no sólo matemáticas, sino de carácter transversal: teoría de números, teoría de grafos y optimización, teoría del caos, topología, tratamiento de la Información, teoría de códigos y criptografía , modelos matématicos fractales**,** …

¡De esta manera, pretendemos hacer realidad en el alumno el ***Sapere Aude*** (atrévete a saber) en Matemáticas!

Como no podía ser de otra manera comencemos con explicar que significa ***Sapere Aude.*** Es una expresión del latín, que indica «atrévete a saber»; también suele interpretarse como «ten el valor de usar tu propia razón». Su divulgación se debe a Immanuel Kant, en su ensayo *¿Qué es la Ilustración?*, aunque parece que su uso original se da en la Epístola II de Horacio del *Epistularum liber primus*:

Dimidium facti qui coepit habet: sapere aude (Quien ha comenzado, sólo ha hecho la mitad: atrévete a saber).

La frase fue acuñada por Horacio en el siglo I a. C., y fue encontrada en una carta a su amigo Lolius. Tiene muchas traducciones pero, en el contexto de la carta (en la cual habla sobre los múltiples mecanismos que Ulises, en su regreso de Troya, usó para superar todas las pruebas con que se enfrentó) se puede entender como «tener el valor de usar tu habilidad para pensar». Otros la traducen como «atreverse a pensar».

Con esta sección pretendemos, humildemente, realizar una actividad tan importante, como la de introducirnos en el campo de la resolución de problemas (RdP) a toda persona, desde el convencimiento: ¿debe usar su valor, su conocimiento cómo lo usaba el héroe mitológico Ulises?

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

La Geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, consiste, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, realizar modelos, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.

Situación 1

Teorema de Ptolomeo y Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es abordado y se presenta por primera vez en las clases de 2º de ESO, y se aplica según la necesidad, en clases de ciclos superiores. Es entonces necesario que los métodos desarrollados para justificar este teorema se inscriban en el cuadro de las competencias que deban ser asimiladas por los alumnos de estas clases.

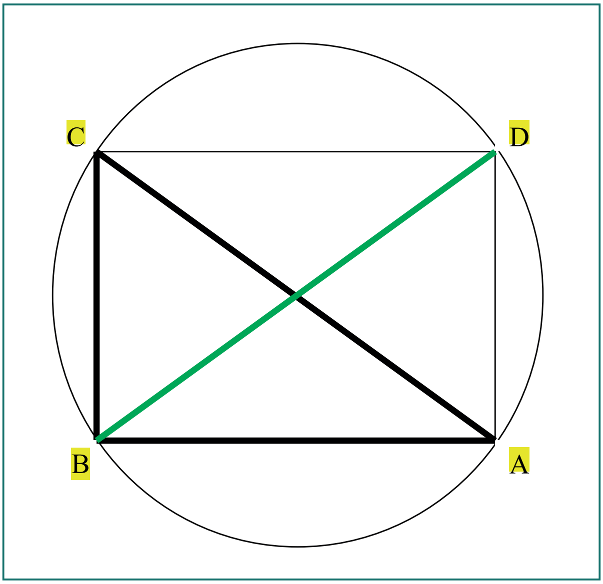

Figura 1. Teorema de Ptolomeo y Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de *Magíster matheseos*. Algunos autores proponen hasta más de mil demostraciones. Otros autores, como el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927 *The Pythagorean Proposition*. En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas o puzzles**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores. Estas demostraciones pueden ser directamente explotadas en clase de 2º de ESO puesto que las competencias-saber descomponer las superficies, su recombinación, cálculo de áreas, etc.- puestas en evidencia para demostrar el teorema son supuestamente adquiridas por los alumnos en las clases. Existen otras demostraciones utilizando métodos que excede el cuadro de competencias de estas clases (salvo las clases de bachillerato, qué tampoco). La demostración que propongo es un ejemplo de lo que se afirma. Con seguridad que existe ya esta demostración pero la bibliografía que he consultado hasta el momento no he encontrado ninguna referencia. A pesar de su importancia, no puede ser explotada en estas clases puesto que tenemos que hacer uso del Teorema de Ptolomeo (¡desgraciadamente muy poco conocido en los diferentes niveles de nuestro sistema educativo!) que sobrepasa el cuadro de saberes ya encontrados por los alumnos de este nivel. Presentamos una demostración del teorema de Pitágoras rápida y sencilla.

Consideremos un rectángulo ABCD inscrito en un círculo

Aplicando el teorema de Ptolomeo al rectángulo ABCD: *En un cuadrilátero convexo inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos,* se tiene:

$$AC.\ BD = AB.CD + AD.BC$$

Las propiedades del rectángulo utilizadas en nuestro caso: AD=BC, AB=CD, y como las diagonales son iguales AC=BD nos lleva a la siguiente relación que es el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

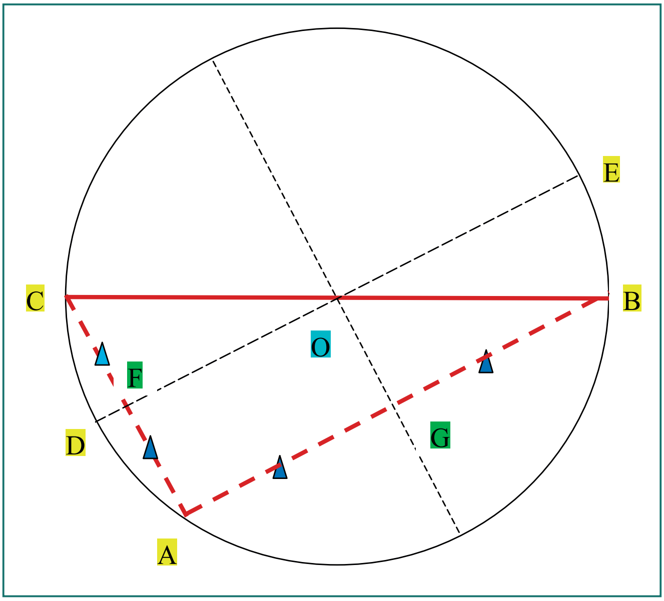

Figura 2. Teorema de las cuerdas secantes y Pitágoras.

$$AC.\ AC = AB.AB + BC.BC \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Concluimos diciendo que el ***sapere aude*** aquí nos permitiría una explotación en clase que nos parece necesaria en los ideas innovadoras que utilizan competencias y conocimientos realmente adquiridos por lo alumnos a la finalización de los estudios anteriores. A nuestro juicio debemos proponer ideas originales para demostrar de otra manera que ciertos resultados son extremadamente formadores desde un punto de vista científico.

Situación 2

Teorema de las cuerdas secantes y el teorema de Pitágoras

Esta es una demostración reciente de (A. Wajnberg de la Universidad Libre de Bruxelas). Consideremos un círculo circunscrito al triángulo rectángulo ABC donde el radio ***R*** es igual a la mitad de la hipotenusa

$$R = \frac{h}{2}$$

En la figura, DE es el diámetro perpendicular al lado AC, y F y G son respectivamente los puntos medios de los catetos AC y AB.

En virtud del teorema de de las cuerdas secantes: *Cuando dos cuerdas se cortan en un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una de ellas es igual al producto de los segmentos de la otra*, se tiene que

$$AF.\ FC = DF.FE = (DO-FO).(FO+OE) \Rightarrow (b/2).(b/2) = (a/2-c/2)(c/2+a/2) \Rightarrow$$

$$b^2/4 = (a/2)^2 - (c/2)^2 = a^2/4 - c^2/4 \Rightarrow a^2/4 = b^2/4 + c^2/4 \Rightarrow$$

$$a^2/4 = (b^2+c^2)/4$$

Se deduce que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

NOTA: Estas demostraciones pueden ser directamente explotadas en clase de 2º de ESO puesto que las competencias-saber descomponer las superficies, su recombinación, cálculo de áreas, etc.- puestas en evidencia para demostrar el teorema son supuestamente adquiridas por los alumnos en las clases. Existen muchas otras demostraciones utilizando métodos que excede el cuadro de competencias de estas clases (¡salvo las clases de bachillerato, qué tampoco!).

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

Fuera del campo de la Física, en Matemáticas algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que ya no varían en sucesivas iteraciones. Esto permite presentar dichos procesos como efectos de pseudomentalismo con números. Así como **un agujero negro** es un cuerpo con una gravedad tan fuerte que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz, también existen números que atraen a otros al efectuar ciertas operaciones. Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación**.**

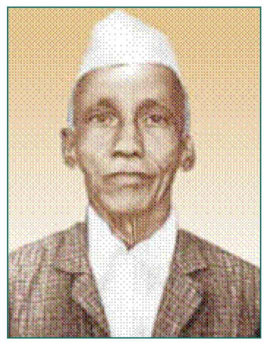

Figura 3. Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905– 1986) (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kaprekar.html).

Situación 3

Agujero negro numérico: el número curioso 6174

El número **6174** es conocido como la **Constante de Kaprekar** en honor de su descubridor el matemático indio Kaprekar.

Nació en Dahanu, cerca de Bombay. **Se interesó por los números siendo muy peque**ño. Desde 1930 hasta su jubilación en 1962, trabajó como profesor de escuela en Devlali, India. Kaprekar descubrió muchas propiedades interesantes en la **teoría recreativa de números**

Consideremos el número 6174, reordenemos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, coloquémoslo en orden decreciente. Reordenémoslo también para construimos el menor número posible y restemos.

Obtenemos así:

7641-1467=6174 que es el número con el que empezamos.

Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos,

9954-4599=5355

Hasta aquí no parece que haya sucedido nada interesante. Hagamos lo mismo con la diferencia 5355

5553-3555=1998.

Nada especial. Seguimos con 1998:

9981-1899=8082
8820-0288=8532
8532-2358=6174.

¡Otra vez el dichoso número!

Con respecto a este problema, surgen las siguientes preguntas:

¿Siempre será así? ¿Habrá restricciones al problema?

Las respuestas a estos dos interrogantes las comenzará a vislumbrar el estudiante al notar que esto siempre ocurre, con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales.

A medida que el estudiante se introduzca en la resolución del problema, pueden surgir interrogantes como el siguiente: si ello siempre ocurre, ***¿cuál es el número máximo de restas necesarias para obtener el número 6174?***

Dado cualquier entero de cuatro dígitos, ¿se puede saber cuántos pasos son necesarios para obtener el 6174?

Las respuestas a estos interrogantes las dan las siguientes afirmaciones, que se demostrarán a continuación.

- 1. Siempre es posible llegar al 6174.
- 2. El número máximo de pasos es siete.
- 3. El número de pasos está determinado por la relación entre los dígitos y no por la forma de ellos.

Todos los números de cuatro cifras, ordenadas de mayor a menor, se van a agrupar en algunas de las formas siguientes:

9-9, 9-8,…,9-0;
8-8, 8-7,....,8-0;
7-7, 7-6,…,7-0;
6-6, 6-5,…,6-0;
5-5, 5-4,…,5-0
4-4, 4-3,…,4-0;
3-3,3-2,…,3-0;
2-2,2-1, 2-0;
1-1,1-0.

En estas agrupaciones, el número 6872 es de la forma 4-1, donde 4 es la diferencia entre 6 y 2; 1 es la diferencia entre 8 y 7.

El número 8651 es de la forma 7- 1, donde 7 es la diferencia entre 8 y 1; 1 es la diferencia entre 6 y 5.

En general, un entero ***pqrs*** es de la forma ***x-y***, si se cumple que

$$p-s=x,\ q-r=y$$

ordenados sus dígitos de mayor a menor.

Se demostrará enseguida la siguiente afirmación: Todo número ***pqrs*** conduce al 6174 en un sólo paso si y sólo si es de la forma 6 -2.

En efecto, sea ***pqrs*** ese número. Si es de la forma 6 - 2, entonces se cumple:

$$p-s=6;\ s=p-6$$
$$q-r=2\ ;r=q-2$$

Escribiéndolo en potencias de 10 de mayor a menor y luego de menor a mayor y restando, y sustituyendo se tiene:

$\boldsymbol{pqrs-srqp} = 1000p+100q+10r+s-(1000s+100r+10q+p)=$
$1000p+100q+10(q-2)+(p-6)-[1000(p-6)+100(q-2)+10q+p]=$
$10^3p+10^2q+10(q-2)+(p-6)-[10^3(p-6)+10^2(q-2)+10q+p]=$
$10^3p+10^2q+10q-20+p-6-[10^3p-6.10^3+10^2q-2.10^2+10q+p]=$
$10^3p+10^2q+10q-20+p-6-10^3p+6.10^3-10^2q+2.10^2-10q-p=$
$6.10^3+2.10^2-20-6=6.10^3+174=\mathbf{6.10^3+1.10^2+7.10+4}$
que corresponde a la escritura en base 10 del número 6174.

De otra parte, sea ***pqrs*** con ***p≥q≥r≥s*** tal que

$$pqrs-srqp=6174$$

Necesariamente, ***p≥s*** , porque si ***p=s*** los cuatro dígitos serían iguales.

Como ***p>s,*** y ***s-p=4***, necesariamente se debe cumplir que ***p-s=6.***

Necesariamente, ***q>r*** porque si ***q=r*** como se está "llevando 1", luego ***r-q* = *9.*** Esto no es posible.

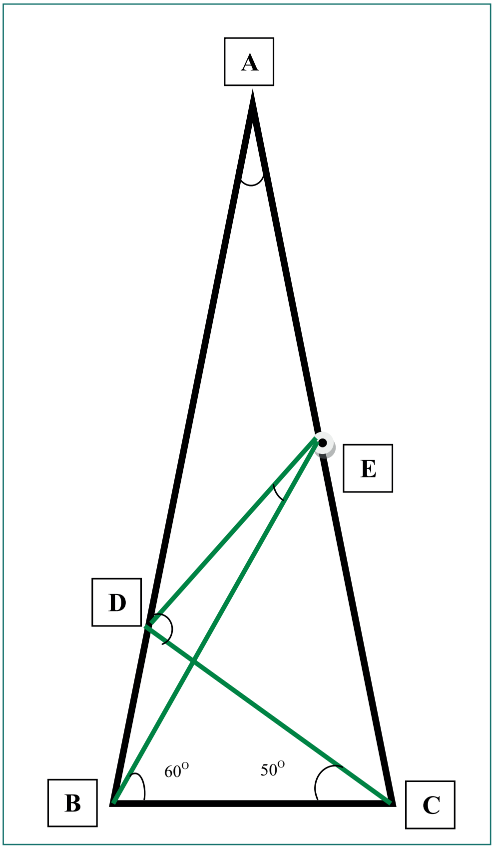

Fig. 4. Triángulo isósceles.

Luego como ***r-q=7*** y se está "llevando 1" se sigue que ***q-r=2.***

De las condiciones

p-s=6
q-r=2

Se concluye que el número es de la forma 6 - 2. Números de esta forma son 8532; 9863; 6420…

A pesar de que el número de pasos necesarios para obtener el 6174 depende de la relación entre los dígitos, es bueno aclarar que a partir del primer paso se obtiene un número completamente determinado.

Así dos números de la forma 4-2, como son 9865 y 7753, dan como resultado después del primer paso, el número 4176.

Dos números de la forma 8-4, como son 8400 y 9621, dan como resultado, después del primer paso, el número 8352.

Después de resuelto este interesante problema, siguen otras preguntas como las siguientes:

¿Qué ocurre si el entero es de 2,3, 5, 6 ó cualquier otra cantidad de dígitos?

Es decir, en estos otros casos ¿qué entero juega el papel que cumple 6174?

¿Ocurre lo mismo si el número se escribe en cualquier otra base diferente de la base 10?

Con estas cuestiones en el aire se puede trabajar dando lugar a nuevos e interesantes problemas de aritmética.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1

La enseñanza de la geometría en primaria y secundaria nos pone frecuentemente ante una situación paradójica: permite el enunciado de problemas elementales, fácilmente comprensible, pero la solución, aunque utilizando sólo las herramientas de su nivel, resulta muy difícil de encontrar.

Épsilon, 2016, Vol. 33 (1), nº 92, 89-98, ISSN: 2340-714X

De Geometría elemental, un ejercicio muy abierto

Sea ABC un triángulo isósceles con ángulo Â=20º. Se traza el segmento BE y CD con ángulos de 60º y 50º, respectivamente en la base BC, según aparece en la figura. Calcular los ángulos en CDE y DEB, según aparece la figura

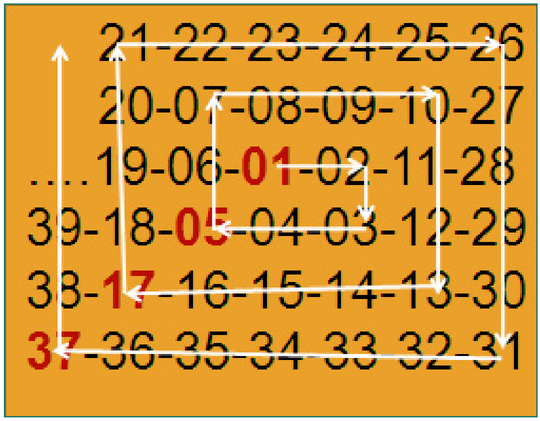

Figura 5. Distribución de habitaciones en el Hotel de la Meca.

Propuesta 2

En general, cualquier situación que pueda ser problematizada o modelizada matemáticamente lleva asociada actividades susceptibles de descomponerse en términos de algoritmos. Es decir, tomar conciencia del aspecto algorítmico de ciertas actividades dónde el control no pasa por el significado, si no por la corrección de su desarrollo.

De decisión del uso de algoritmos: Hotel en la Meca

Actualmente se construye el hotel Abraj Kudai, en Manafia, zona central de La Meca, en Arabia Saudita, el cual será el más grande del mundo y requerirá de un inversión de 3.6 mil millones, el cual se prevé será inaugurado para el año 2017. El gran podio de 45 pisos de altura y 10.000 habitaciones, estilo fortaleza, será coronado por 12 torres de 10 pisos. También contará con 70 restaurantes, cuatro helipuertos, una estación de autobuses, patios de comida, un centro comercial y un centro de convenciones y estacionamientos.

Las habitaciones se enumeran en forma de caracol 1,2,3,4,5,6, 7,……..,10000. A partir del algoritmo anexo construido en forma caracol infinito se trata de:

a) *Encontrar la fórmula recurrente que permita conocer todos los números de las habitaciones situadas sobre la diagonal dónde figuran los números escritos en fondo rojo.*

b) *¿Son todos primos los números que aparecen en la diagonal?*

NOTA: La respuesta pueden enviarla a:la dirección electrónica: sapereaudethales@gmail.com