Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2012, Vol. 29(2), nº 81, 113-117, ISSN: 1131-9321*

Soluciones de los problemas

F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

Solutions to problems

RE_009_EPSILON

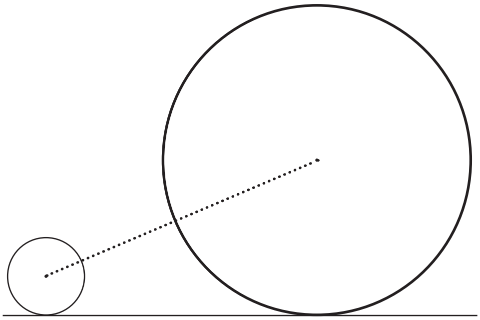
Sean dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2, y radios R_1 y R_2, respectivamente ($R_1<R_2$). Sea r una tangente exterior común a ambas circunferencias y p el valor de la distancia entre los centros.

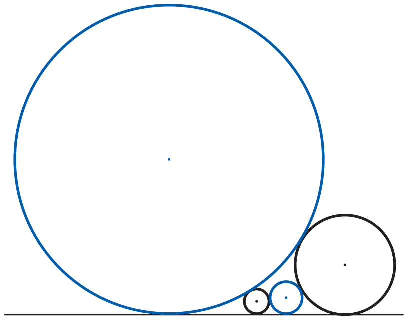
a) Determine el valor de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias que, siendo tangentes exteriores a ambas circunferencias, lo sea también a la recta r.

b) Si ambas circunferencias son ahora tangentes ($p = R_1 + R_2$), deduzca en este caso, el valor de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias tangentes.

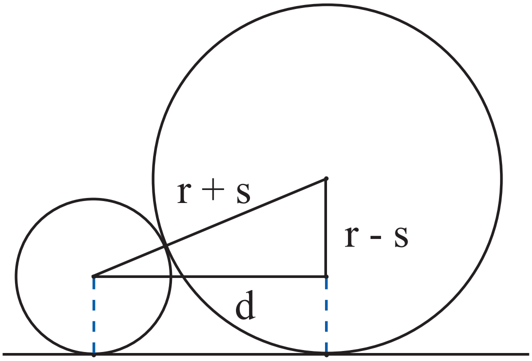
c) Indique cómo realizaría la construcción de ambas circunferencias.

d) Pruebe que la relación $\frac{1}{\sqrt{R_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{r_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ es condición necesaria y suficiente para que las dos circunferencias solución del problema sean también tangentes entre sí. Verifica esta situación para el caso de que $R_1 = \frac{1}{6} R_2$ y halla el valor de p correspondiente.





a) Se adivina que, si dos circunferencias son tangentes exteriores entre sí y sus radios son, respectivamente r y s, entonces



$d^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2; d = 2\sqrt{r.s}$

En el caso que nos ocupa, tenemos por un lado que:

$d_1 = 2\sqrt{R_1.r}$, respecto de la circunferencia de radio R_1

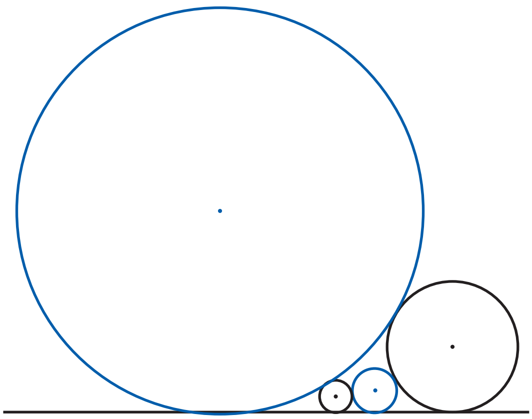
$d_2 = 2\sqrt{R_2.r}$, respecto de la circunferencia de radio R_2

(1)

En las circunferencias dadas, se verifica:

$$d^2 = p^2 - (R_1 - R_2)^2; \; d = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2} \qquad (2)$$

Relacionando ambos hechos (1) y (2), por un lado, tenemos que:



- En el caso de la circunferencia de menor radio, r_1: $d_1 + d_2 = d$
- En el caso de la circunferencia de mayor radio, r_2: $d_1 - d_2 = d$

En definitiva:

- En el caso de r_1:

$$2\sqrt{R_1.r_1} + 2\sqrt{R_2.r_1} = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}$$
$$r_1 = \frac{p^2 - (R_1 - R_2)^2}{4(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}$$

- En el caso de r_2:

$$2\sqrt{R_1.r_2} - 2\sqrt{R_2.r_2} = \sqrt{p^2 - (R_1 - R_2)^2}$$
$$r_2 = \frac{p^2 - (R_1 - R_2)^2}{4(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}$$

Para posicionar dichas circunferencias, ya una vez conocidos sus radios, r_1 y r_2, usamos las relaciones $d_1 = 2\sqrt{R_1.r_1}$ y $d_2 = 2\sqrt{R_1.r_2}$, respectivamente.

b) Si ambas circunferencias son ahora tangentes ($p = R_1 + R_2$), deduzca en este caso, el valor de los radios r_1 y r_2 de las circunferencias tangentes.

En este caso particular,

En el caso de r_1: $r_1 = \dfrac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})^2}$

En el caso de r_2: $r_2 = \dfrac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2})^2}$

c) Su construcción geométrica.

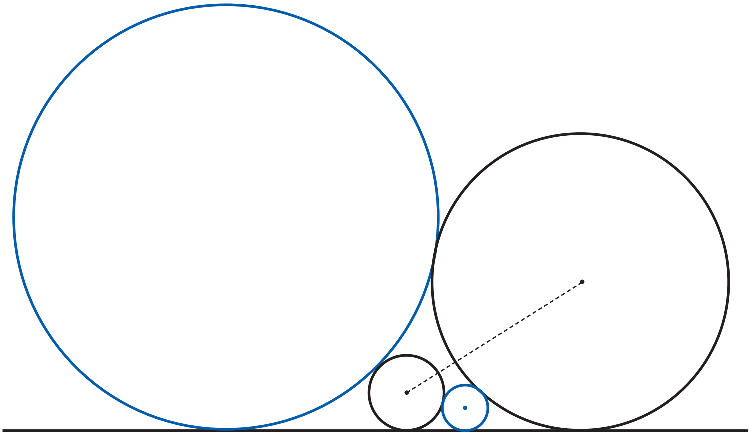
Los radios se obtendrían como cuarta proporcional y las distancias como medias proporcionales. Veámoslo:

En el caso de r_1: $\dfrac{r_1}{p-(R_1-R_2)} = \dfrac{p+(R_1-R_2)}{R_1+R_2+2\sqrt{R_1.R_2}}$

$d_1 = 2\sqrt{r_1.R_1}$

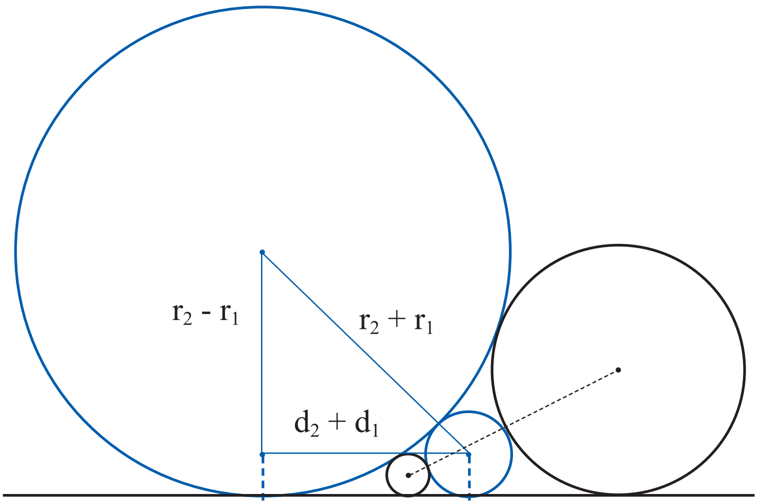
En el caso de r_2: $\dfrac{r_2}{p-(R_1-R_2)} = \dfrac{p+(R_1-R_2)}{R_1+R_2-2\sqrt{R_1.R_2}}$

$d_2 = 2\sqrt{r_2.R_1}$



d) Pruebe que la relación $\dfrac{1}{\sqrt{R_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ es condición necesaria y suficiente para que las dos circunferencias solución del problema sean también tangentes entre sí. Verifica esta situación para el caso de que y halla el valor de p correspondiente.

Si las circunferencias solución del apartado a) son tangentes entre sí, deberá darse la siguiente situación:



Consecuentemente se verificará:

$$\left(d_2+d_1\right)^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2 \rightarrow d_2+d_1=2\sqrt{r_1 r_2}$$

Ahora bien, $d_1=2\sqrt{R_1.r_1}$ y $d_2=2\sqrt{R_1.r_2}$.

Por tanto, se tendrá: $\sqrt{R_1.r_1}+\sqrt{R_1.r_2}=\sqrt{r_1 r_2} \rightarrow \sqrt{R_1.r_1}+\sqrt{R_1.r_2}=\sqrt{r_1 r_2} \rightarrow$

$$\sqrt{R_1}=\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad \text{(I)}$$

Buscaremos ahora la condición que deberá cumplir p, una vez conocidos los valores de R_1 y R_2. ($R_1<R_2$)

Para los valores antes obtenidos, desarrollamos la expresión (I)

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\frac{p^2-(R_1-R_2)^2}{4(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})^2} \\ r_2&=\frac{p^2-(R_1-R_2)^2}{4(\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2})^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}} \rightarrow \frac{2(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})+2(-\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})}{\sqrt{p^2-(R_1-R_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

$$\frac{4\sqrt{R_2}}{\sqrt{p^2-(R_1-R_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}} \rightarrow 4\sqrt{R_1 R_2}=\sqrt{p^2-(R_1-R_2)^2};$$

$$p^2=(R_1-R_2)^2+16R_1R_2 \rightarrow p=\sqrt{(R_1-R_2)^2+16R_1R_2}$$

$$\rightarrow \quad p=\sqrt{(R_1-R_2)^2+16R_1R_2}$$

Épsilon, 2012, Vol. 29(2), nº 81, 113-117, ISSN: 1131-9321

En el caso particular que nos ocupa, siendo $R_1 = \frac{1}{6}R_2$

$$p = \sqrt{(\frac{1}{6}R_2 - R_2)^2 + 16\frac{1}{6}R_2R_2} = \sqrt{(\frac{1}{6}R_2 - R_2)^2 + 16\frac{1}{6}R_2^{\,2}} = \sqrt{\frac{25+96}{36}}R_2 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{11}{6}R_2$$