Soluciones recibidas

PROBLEMA; 006_EPSILON

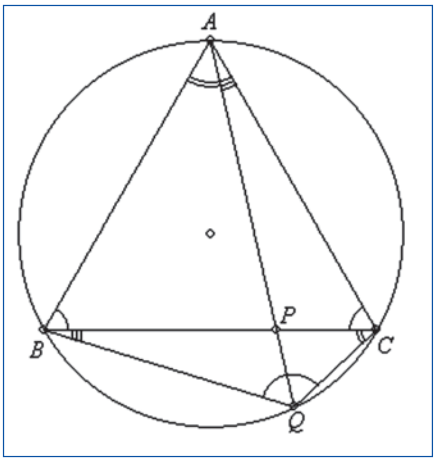
a) Una recta trazada desde el vértice A de un triángulo equilátero ABC corta al lado opuesto BC en un punto P y a la circunferencia circunscrita en el punto Q. Prueba que se verifica la igualdad

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{BQ} + \frac{1}{CQ}.$$

b) Con la notación del apartado anterior, prueba que las siguientes sumas son constantes y halla el valor de las mismas:

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = K_1; \quad AQ^4 + BQ^4 + CQ^4 = K_2.$$

Solución de Francisco Javier García Capitán, profesor de Matemáticas en el I.E.S. Álvarez Cubero de Priego de Córdoba (http://garciacapitan.99on.com).



Llamando $a = BC = CA = AB$ y usando los triángulos semejantes $PBQ \sim PAC$ y $PCQ \sim PAB$ tenemos $\frac{PQ}{BQ} + \frac{PQ}{CQ} = \frac{PC}{AC} + \frac{PB}{AB} = \frac{BP+PC}{a} = \frac{a}{a} = 1$, que justifica el apartado a).

Para responder al apartado *b*), llamamos $x = AQ$, $y = BQ$, $z = CQ$.

Aplicando el teorema del coseno al triángulo QBC, tenemos que

$$BC^2 = BQ^2 + CQ^2 - 2\cdot BQ\cdot CQ\cdot\cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = y^2 + z^2 + yz.$$

Por otro lado, el teorema de Ptolomeo, aplicando al cuadrilátero inscrito $ABQC$,

$$BC\cdot AQ = AB\cdot CQ + AC\cdot BQ \Rightarrow x = AQ = BQ + CQ = y + z.$$

Entonces,

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (y+z)^2 + y^2 + z^2 = 2\left(y^2 + z^2 + yz\right) = 2a^2,$$

resultando que $K_1 = 2a^2$. De la misma forma,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \\ &= \left(2a^2\right)^2 - 2\left((y+z)^2(y^2+z^2) + y^2z^2\right) \\ &= 4a^4 - 2\left(y^2 + z^2 + yz\right)^2 \\ &= 4a^4 - 2\left(a^2\right)^2 = 2a^4 \Rightarrow K_2 = 2a^4. \end{aligned}$$