El razonamiento matemático frente al uso de fórmulas en la resolución de problemas matemáticos en secundaria

María Díaz Mondéjar
Consejería de Desarrollo y Formación Profesional de la Junta de Andalucía,
mariaadiaaz127@gmail.com

Resumen: *Este estudio examina las preferencias entre el uso de fórmulas y el razonamiento analítico y relacional en la resolución de problemas matemáticos por parte de estudiantes de Educación Secundaria. Se diseñó una prueba compuesta por cinco problemas que podían resolverse mediante distintos enfoques: fórmulas vs. razonamiento. Participaron 48 estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El objetivo fue evaluar si los estudiantes que comienzan la educación secundaria recurren más al uso de fórmulas o al razonamiento analítico y relacional para resolver problemas matemáticos. Los resultados indican que existe un predominio del uso de fórmulas o procedimientos mecánicos sobre el razonamiento matemático analítico y relacional. Se concluye que es fundamental priorizar el desarrollo del razonamiento matemático sobre la simple aplicación de fórmulas, ya que este desarrolla la comprensión matemática y fomenta una aprendizaje significativo y transferible a diversas situaciones.*

Palabras clave: *razonamiento, aprendizaje, estrategias, educación, resolución, pensamiento.*

Mathematical reasoning versus the use of formulas in solving mathematical problems in secondary school.

Abstract: *This study examines preferences between the use of formulas and analytical and relational reasoning in solving mathematical problems among secondary school students. A test consisting of five problems that could be solved using different approaches—formulas versus reasoning—was designed. A total of 48 second-year students of Compulsory Secondary Education participated in the study. The aim was to evaluate whether students at the beginning of secondary education rely more on the use of formulas or on analytical and relational reasoning to solve mathematical problems. The results indicate a predominance of the use of formulas or mechanical procedures over analytical and relational mathematical reasoning. It is concluded that prioritizing the development of mathematical reasoning over the mere application of formulas is essential, as it enhances mathematical understanding and fosters meaningful learning that is transferable to diverse situations.*

Keywords: *reasoning, learning, strategies, education, problem-solving, thinking.*

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día, los profesionales de la enseñanza se enfrentan a una creciente desmotivación y falta de compromiso por parte de sus alumnos, una situación que repercute negativamente también en los docentes. Esta problemática adquiere una dimensión particular en matemáticas, no solo por

su naturaleza abstracta, sino por la forma en que se enseña. En muchos casos, el planteamiento pedagógico favorece la memorización de fórmulas por encima del desarrollo del razonamiento lógico, lo que puede dificultar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos (Araya Ramírez, 2014; Castañón de la Iglesia, 2024; Urquizo Alcívar y Campana Concha, 2017). Además, diversos estudios han advertido que ciertos enfoques instruccionales, centrados en la enseñanza de procedimientos algorítmicos, tienden a desplazar el desarrollo del razonamiento matemático (analítico y relacional) en el aula de matemáticas. Esta tendencia puede afectar a la consecución de una comprensión y a la capacidad de transferencia del conocimiento matemático (Boaler, 2016; Castro et al., 2010; Godino et al., 2012).

Frente a este panorama, diversos estudios han señalado un cambio en el planteamiento de la enseñanza de las matemáticas, donde la repetición mecánica de fórmulas ha desplazado parcialmente el desarrollo del razonamiento matemático (Barcia Muentes et al., 2019). Sin embargo, la baja tasa de rendimiento actual, que inicialmente fue motivo de preocupación, parece estar normalizándose, llevando a cuestionarse qué queda del razonamiento en matemáticas de los escolares en la secundaria (Castañón de la Iglesia, 2024). Este declive en el razonamiento matemático ha sido reemplazado, en muchos casos, por la mecánica repetición de fórmulas, una tendencia que ha empobrecido la capacidad de los estudiantes para enfrentar problemas desde una perspectiva lógica y crítica (González Astudillo y Sierra Vázquez, 2004). La adopción de enfoques instruccionales más procedimentales puede limitar las oportunidades para promover el pensamiento crítico y la argumentación en el aula (Godino et al., 2012), lo que perpetúa un ciclo de baja exigencia.

Motivar a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas es una tarea que presenta dificultades específicas, particularmente cuando se busca fomentar el razonamiento matemático. Diversos estudios han señalado que el uso reiterado de algoritmos sin comprensión conceptual puede derivar en actitudes de desinterés y rechazo hacia la asignatura (Urquizo Alcívar y Campana Concha, 2017).

Esta práctica metodológica, centrada en la repetición mecánica de procedimientos, no solo limita el desarrollo del razonamiento matemático, sino que desplaza el foco desde la comprensión hacia la memorización (Boaler, 2015; Skemp, 1976). Como consecuencia, el estudiante tiende a desvincularse del significado de los objetos matemáticos y de las relaciones que los estructuran, debilitando así su capacidad de razonamiento (Godino y Batanero, 1994; Schoenfeld, 1992). En este contexto, el papel del docente se ve comprometido, ya que debe contrarrestar una cultura escolar en la que se privilegia la rapidez en la respuesta por encima de la reflexión fundamentada (National Council of Techers of Mathematics (NCTM), 2003). La evidencia sugiere que cuando el aprendizaje se reduce a la ejecución de técnicas sin justificación, el razonamiento matemático se empobrece y disminuye el compromiso del estudiante con la disciplina (Harel y Sowder, 1998; Hiebert y Grouws, 2007; National Research Council, 2001).

Si bien esta situación es general en la enseñanza, es particularmente aguda en el ámbito de las matemáticas. El profesorado de matemáticas identifica, con frecuencia, mayores dificultades para mantener la motivación y el rendimiento de sus alumnos en comparación con otras áreas (Ruiz Merino, 2019). Basta con revisar las actas finales de calificaciones en cualquier centro educativo, tanto en el contexto de primaria como de secundaria, para constatar los bajos resultados y el elevado número de suspensos en matemáticas. Este hecho no es nuevo; las matemáticas han sido históricamente percibidas como una asignatura ardua y difícil, que genera terror y desasosiego, y, en muchos casos, rechazo entre los estudiantes y sus familias (Dowker, 2016). Sin embargo, la situación se ha visto agravada en tiempos recientes debido a la preferencia por

enfoques que priorizan la aplicación mecánica de fórmulas sobre el desarrollo del razonamiento matemático, entendido este como la capacidad de establecer relaciones, justificar procedimientos y generalizar resultados (Castro et al., 2010). Este tipo de prácticas, aunque útiles para ciertos cálculos, no fomentan el desarrollo de habilidades cognitivas superiores como la argumentación, la modelización o la transferencia (Godino et al., 2012).

Algunos estudios longitudinales han evidenciado una evolución en los enfoques de enseñanza de las matemáticas, con un aumento del uso de estrategias algorítmicas y una menor presencia del razonamiento matemático analítico y relacional en el aula (Ruiz Merino, 2019; Sosa Guerrero et al., 2015). Esta transformación ha generado preocupación entre el profesorado y la comunidad educativa sobre el impacto en la comprensión profunda del alumnado. En el presente, las dificultades en la enseñanza de las matemáticas no solo derivan de la complejidad de la disciplina, sino también del contexto educativo en el que se desarrolla. Factores emocionales, cognitivos y socioculturales han sido identificados como elementos que inciden en la forma en que el alumnado se aproxima al aprendizaje matemático, dificultando en muchos casos el desarrollo del razonamiento y la profundización en la comprensión (Araya Ramírez, 2014; Urquizo Alcívar y Campana Concha, 2017). En el centro del debate actual sobre el aprendizaje matemático se encuentra la tensión entre el uso mecánico de fórmulas y el desarrollo de un razonamiento matemático más avanzado que ha reducido la capacidad crítica de los alumnos, lo que contribuye a la percepción de un nivel académico menor y a una menor exigencia por parte del profesorado.

Como consecuencia, se observa una tendencia a aceptar formas de aprendizaje matemático centradas en la aplicación de procedimientos sin comprensión, lo que puede empobrecer el desarrollo del razonamiento matemático y limitar el acceso del alumnado a una comprensión auténtica de la matemática escolar (Teófilo de Sousa et al., 2023). Esta dinámica ha derivado, en muchos casos, en una aceptación implícita de estándares cognitivos más bajos en cuanto al razonamiento y la comprensión conceptual.

2. PECULIARIDADES DE LA MATEMÁTICA

La dificultad que presentan las matemáticas para un amplio sector de estudiantes puede explicarse en gran medida por su carácter abstracto, el cual dificulta su vinculación con experiencias cotidianas. Según Van Hiele (1959), los estudiantes tienden a aprender procedimientos matemáticos sin comprender sus fundamentos ni establecer relaciones con contextos concretos, lo que limita la transferencia del conocimiento a situaciones novedosas. Esta abstracción contribuye a que los contenidos matemáticos sean percibidos como complejos y poco relevantes, lo cual impacta negativamente en la motivación y el interés por la disciplina, tal como evidencian investigaciones sobre la percepción de relevancia en el aprendizaje matemático (Brown y Macrae, 2005; Göller, 2020). Adicionalmente, estudios en el ámbito de la educación en ciencias muestran que, aunque los estudiantes ejecutan algoritmos de forma correcta, frecuentemente carecen de comprensión conceptual, lo que restringe su capacidad de razonamiento matemático al enfrentarse a problemas no rutinarios (Brahmia et al., 2016).

En otro hilo de argumentación, las matemáticas poseen un carácter sistemático y riguroso fundamentado en axiomas y una estructura lógica inquebrantable, característica que ha sido ampliamente destacada en la literatura filosófica y educativa (Hersh, 1997; Kline, 1972). Este nivel de exigencia, si bien garantiza la coherencia y precisión del conocimiento matemático, puede generar en numerosos estudiantes una sensación de despersonalización, debido a la escasa posibilidad de expresión subjetiva dentro de la disciplina. En particular, aquellos alumnos con

una orientación más emotiva o que buscan establecer una conexión afectiva con el aprendizaje tienden a experimentar frustración y ansiedad frente a esta falta de flexibilidad emocional (Ashcraft, 2002; Hadfield y McNeil, 2012). Por lo tanto, este rigor objetivo contrasta fuertemente con áreas del conocimiento, como la literatura o las artes, donde la interpretación personal juega un papel preponderante, intensificando así la percepción de distancia entre el estudiante y las matemáticas (Boaler, 2016).

Una de las características más notables de las matemáticas es su organización estructural, que contrasta de manera drástica con otras disciplinas como la historia, las ciencias naturales o la literatura, en las que los distintos capítulos de conocimiento pueden estar conectados de forma más laxa o incluso ser independientes entre sí. En matemáticas, sin embargo, un error compromete de manera significativa el desarrollo posterior del razonamiento, ya que el conocimiento matemático se construye de manera secuencial y encadenada. Es precisamente esta característica la que genera una de las mayores dificultades para los especialistas en didáctica de las matemáticas, y que a menudo se refleja en el comentario recurrente que se escucha al intentar justificar el fracaso en esta disciplina: "es que no tiene base". Aunque en muchos casos es cierto que los estudiantes presentan carencias importantes en las bases, también es necesario reconocer que estas deficiencias no siempre pueden atribuirse a los antecesores. En muchas ocasiones, la falta de comprensión surge del olvido, de una insuficiente integración de los conocimientos previos o, simplemente, de la manera en que estos fueron adquiridos en su momento.

No obstante, cabe destacar que, a pesar de las dificultades, existe una característica de las matemáticas que las convierte en una disciplina especialmente gratificante para aquellos estudiantes que logran dominarla. Para estos alumnos, la resolución de un problema no es simplemente un ejercicio académico, sino una fuente significativa de satisfacción personal. Según Ryan y Deci (2000), la motivación intrínseca, que incluye la sensación de competencia y autoeficacia, es fundamental para que los estudiantes experimenten placer y compromiso al aprender matemáticas. Schoenfeld (1985) enfatiza que el éxito en la resolución de problemas genera un sentido de logro y confianza que estimula la disposición para enfrentar nuevos retos. De manera similar, Eccles y Wigfield (2002) y Wigfield y Cambria (2010) señalan que los estudiantes con buen desempeño tienden a percibir las matemáticas como un desafío estimulante, lo que fortalece su persistencia y motivación para continuar aprendiendo (Schunk y DiBenedetto, 2020).

Esta dimensión creativa y de superación personal es, en muchos sentidos, lo que transforma la experiencia matemática en algo profundamente estimulante y gratificante para quienes logran conectarse con su lógica interna. Para ellos, la matemática no es una amenaza, ni un límite paralizante, sino un reto intelectual que están dispuestos a afrontar y superar.

3. RAZONAMIENTO

“El razonamiento matemático implica la capacidad de pensar lógicamente acerca de las relaciones entre conceptos y situaciones, analizar y justificar conclusiones, y construir y evaluar argumentos matemáticos” (NCTM, 2000, p. 29). Sin embargo, el hecho de que las matemáticas se basen en principios claros y estructurados no explica, por sí solo, por qué un número significativo de alumnos experimenta dificultades persistentes en su aprendizaje (Urquizo Alcívar y Campana Concha, 2017). Si el razonamiento matemático depende de habilidades que cualquier persona puede desarrollar con una orientación adecuada, entonces el problema no radica únicamente en

la naturaleza de las matemáticas, sino en cómo se enseña y cómo se afronta su aprendizaje en el contexto escolar.

Más allá de memorizar procedimientos o aplicar fórmulas, el razonamiento matemático exige comprensión profunda, flexibilidad cognitiva y la capacidad de construir significado. Cuando la enseñanza se centra exclusivamente en la repetición mecánica de operaciones, sin promover la reflexión ni la conexión entre ideas, el alumno pierde la oportunidad de desarrollar pensamiento matemático analítico y relacional. Por ello, más que presentar el razonamiento matemático como una definición abstracta, es necesario entenderlo como una herramienta cognitiva fundamental que permite resolver problemas, justificar soluciones y tomar decisiones fundamentadas.

De este modo, el foco debe desplazarse desde la simple transmisión de contenidos hacia la construcción de experiencias de aprendizaje significativo en las que el alumnado pueda explorar, conjeturar, equivocarse, argumentar y verificar. En definitiva, el verdadero reto no es explicar qué es el razonamiento matemático, sino crear las condiciones educativas que lo hagan posible en el aula, promoviendo prácticas didácticas que favorezcan el análisis, establecer relaciones, la comunicación matemática y el pensamiento crítico. Solo desde este enfoque se logrará que las matemáticas dejen de ser percibidas como un conocimiento inaccesible y pasen a entenderse como una forma de pensar al alcance de todos.

Parece sorprendente que no todos los alumnos puedan seguir un razonamiento matemático en una clase, y no solo eso, sino que los que pueden seguirlo, la mayoría, lo hace con mucha dificultad. Esto puede ser ampliamente constatado por cualquier docente de matemáticas. No se pretende recurrir a aprenderse de memoria todo un largo razonamiento, sino simplemente de ir entendiéndolo al ofrecérselo paso a paso. Es más, existen alumnos que razonarían bien ante un determinado problema que se les pudiese presentar en la vida, y, sin embargo, son incapaces de seguir demostraciones matemáticas que implican mantener una secuencia lógica extensa, aunque los razonamientos parciales sean asequibles. Esta dificultad puede deberse a la sobrecarga cognitiva al tratar de mantener activa la estructura global del argumento (Barcia Muentes et al., 2019).

En una demostración matemática, la memoria y la capacidad de estructurar secuencias lógicas trabajan conjuntamente. Aunque no se trate solo de memorizar pasos, el seguimiento de un razonamiento extenso requiere recordar premisas, teoremas y conexiones intermedias. Algunos estudiantes, particularmente aquellos con una gran habilidad para detectar patrones y estructuras, pueden reconocer el orden lógico de una demostración de forma intuitiva, lo que les permite reconstruirla sin memorizarla paso a paso. No obstante, este tipo de razonamiento no es generalizable a todo el alumnado y depende también de factores como la experiencia previa, la familiaridad con el contenido y el entrenamiento en argumentación formal (Teófilo de Sousa et al., 2023).

Una característica que suele distinguir a los estudiantes con buen desempeño en matemáticas es su capacidad para reconocer el orden lógico que subyace en una demostración o en una estructura matemática. Esta intuición, entendida como la habilidad para anticipar las relaciones entre ideas o pasos lógicos, es fundamental para el desarrollo del razonamiento matemático, ya que ayuda a construir argumentos claros y a comprender profundamente los conceptos (Teófilo de Sousa et al., 2023). La intuición matemática funciona como una especie de “sexto sentido” que permite identificar patrones y conexiones antes de formalizarlos, facilitando así el pensamiento riguroso. Sin embargo, esta capacidad no actúa de forma aislada; también depende de otros factores importantes, como la memoria de trabajo, que permite manejar varias ideas a la vez; la

motivación, que impulsa el esfuerzo constante; y la experiencia previa, que aporta el conocimiento necesario para analizar, relacionar y aplicar nuevas ideas.

Otros alumnos tienen esa "intuición" en un grado menor; sin embargo, están dotados de una memoria poco frecuente y de una gran capacidad de atención. Se aprenden elementos de la demostración uno a uno, y su notable capacidad memorística les permite unirlos, incluso sin disponer plenamente de esa "intuición" del orden matemático. Este perfil les permite comprender y, en ocasiones, aplicar conocimientos matemáticos, aunque suelen mostrar más dificultades para generar soluciones originales o desarrollar ideas propias, especialmente en tareas prácticas. Se considera que las diferencias entre estos perfiles pueden allanarse por medio del desarrollo de la capacidad de análisis y el pensamiento relacional, propios del razonamiento matemático. Este tipo de diferencias ha sido descrito en estudios sobre estilos cognitivos y razonamiento matemático (Barcia Muentes et al., 2019).

Dentro de los grupos del alumnado según esa "intuición" matemática, se encuentra un tercer grupo: aquellos que la poseen en un grado notable. Desgraciadamente, la presencia de estos alumnos en las aulas suele ser muy escasa. Estos estudiantes no solo no presentan dificultades de comprensión matemática, aunque su memoria no sea especialmente destacada, sino que además muestran una notable capacidad para analizar, abstraer relaciones, detectar patrones y formular conjeturas de forma espontánea. Según Krutetskii (1976), este perfil corresponde a alumnos con talento matemático, caracterizados por emplear estrategias basadas en la comprensión estructural del problema (análisis y relaciones entre los objetos matemáticos involucrados) antes que en la repetición mecánica o la aplicación rutinaria de fórmulas.

En cualquiera de los casos, en que esa "intuición" se tenga en mayor o menor medida, consideramos que fomentar el desarrollo de un razonamiento matemático en el que el alumnado realiza un análisis reconociendo los diferentes elementos matemáticos involucrados en un problema y estableciendo relaciones entre estos, ayuda a resolverlo de manera comprensiva y con ello su posible transferencia en la resolución de otros problemas (Ruiz Merino, 2019; Skemp, 1976; Wigfield y Cambria, 2010). En el caso de este artículo se proponen una serie de problemas en las que, básicamente, al aplicar un razonamiento matemático analítico y relacional, se obtiene una resolución que va más allá del uso de fórmulas y de procedimientos mecánicos y memorísticos.

3.1. Creación

Por su parte, La creación en matemáticas no consiste únicamente en generar nuevas combinaciones entre entes matemáticos conocidos, sino en identificar aquellas que resulten significativas y útiles en un determinado contexto. Este proceso creativo implica no solo la innovación, sino también un juicio crítico que permite discernir qué ideas aportan valor real a la resolución de problemas o al avance del conocimiento matemático (Silver, 1997). En efecto, la creatividad matemática es una interacción compleja entre intuición, exploración y validación rigurosa, donde la pertinencia y la utilidad contextual son claves para que dichas combinaciones sean consideradas valiosas (Ernest, 1998). Así, la creatividad en matemáticas se entiende no solo como una producción novedosa, sino como una producción significativa que responde a las necesidades del entorno y del problema planteado. En este proceso, no todas las ideas conducen a una solución válida o generalizable, pero incluso las combinaciones que finalmente se descartan forman parte del camino creativo. En el ámbito escolar, cada vez que un estudiante resuelve un problema por sí mismo, movilizando sus propias estrategias, se produce también una forma de

creación personal que contribuye al desarrollo del razonamiento matemático (Castro et al., 2010; Teófilo de Sousa et al., 2023).

La creación matemática no consiste en generar el mayor número posible de combinaciones aplicando reglas, ya que muchas de ellas podrían carecer de significado. La misión del creador es identificar aquellas que aporten valor dentro de un contexto determinado y avanzar desde ellas.

La matemática ha de ser para el alumno una construcción personal vivida que le cree un sistema de pensamiento coherente. Es decir, la misión del profesor no es limitarse a dar clases magistrales para que el alumno las escuche atentamente y aprenda lo que está ya hecho. Es el alumno el que debe llevar la iniciativa, debe ir descubriendo la matemática por sí mismo, desde dentro, aunque, eso sí, guiado y dirigido en todo momento por el docente. Este proceso también puede verse enriquecido mediante la interacción con sus compañeros, donde el contraste de ideas y enfoques favorece la comprensión compartida. De esta forma, el alumno va poniendo en marcha su máquina crítica e irá potenciando esa "intuición" característica del buen matemático.

Por supuesto, esta labor del maestro no es nada fácil, máxime cuando no todos los maestros de matemáticas son matemáticos, y para algunos de ellos la matemática carece de interés personal, incluso sintiéndose en ocasiones inseguros.

Por último, hay veces que se producen razonamientos muy curiosos, aunque no siempre acertados, por parte de los alumnos, que sorprenden, bien porque no era ahí donde se trataba de llegar, bien porque a muchos maestros no se le hubiese ocurrido en ese preciso instante. En muchos casos, estos razonamientos surgen como alternativas informales frente al uso convencional de fórmulas, por lo que son ejemplos dignos de análisis para comprender cómo el alumnado aborda la resolución de problemas desde perspectivas no estandarizadas. Se pueden comentar algunos ejemplos:

El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado. Dados dos números reales distintos a y b, se verifica siempre que $a < b$ ó $a > b$. Sin embargo, si se quiere saber por ejemplo cuál es el número real siguiente al tres, es decir, un número m tal que no haya otro número real comprendido entre el tres y el m, algunos dirían que ese número m podría ser el 3,1. No obstante, es evidente que hay otros números reales comprendidos entre tres y 3.1, como el 3.01 o el 3.001, y así sucesivamente. Alguien podría indicar, siguiendo este razonamiento, y en lenguaje vulgar, que es el "tres coma infinitos ceros y al final un uno", aunque en realidad, si después de la coma empezamos a colocar infinitos ceros, nunca llegaríamos a poner el uno. Este singular razonamiento indica un gran ingenio y una notable capacidad para explorar conceptos, aunque resulte equívoco. Este ejemplo pone de manifiesto cómo algunos alumnos desarrollan razonamientos matemáticos avanzados por sí mismos, en lugar de aplicar fórmulas aprendidas, lo que permite analizar de forma interesante cómo se construyen comprensiones parciales o alternativas en ausencia de herramientas formales.

Otro ejemplo, directamente relacionado con la problemática que se estudia, muestra cómo el uso innecesario de fórmulas puede complicar la resolución de un problema sencillo que podría abordarse mediante razonamiento matemático básico. Se ha estudiado el tema de la combinatoria con todo lo que conlleva sobre combinaciones, permutaciones, variaciones, con o sin repetición. A continuación, se plantea el siguiente sencillo problema: ¿cuántas parejas mixtas de baile se pueden formar con 14 chicos y 10 chicas? Enseguida y sin pensarlo más de dos veces se plantea si son variaciones o combinaciones, llegando a la conclusión de que se trata de estas últimas. Hay quien calcula las combinaciones de todos ellos, es decir 24, tomados en grupos de dos, lo que resulta:

$$\binom{24}{2} = \frac{24 \times 23}{2} = 276.$$

Pero es evidente, que en esas 276 combinaciones hay tanto parejas de sólo chicos como de sólo chicas, que habrá que restar, por lo que el resultado final de parejas mixtas que se pueden formar sería:

$$\binom{24}{2} - \binom{14}{2} - \binom{10}{2} = 276 - 91 - 45 = 140.$$

El razonamiento es correcto, aunque se ha complicado innecesariamente un problema en el que como cada chico puede bailar con 10 chicas, entonces 14 chicos podrían hacerlo con: 14·10 = 140. Es decir, un simple producto con el que se llega a la misma solución sin necesidad de utilizar fórmulas de combinatoria.

4. MÉTODO

4.1. Tipo de investigación y participantes

Este estudio se enmarca en un diseño exploratorio-descriptivo, ya que su propósito es indagar en cómo los estudiantes de secundaria enfrentan la resolución de problemas matemáticos, comparando el uso del razonamiento matemático analítico y relacional con la aplicación de fórmulas. Según Hernández Sampieri et al. (2014) este tipo de estudios es apropiado cuando se busca examinar fenómenos poco estudiados o comprender conductas sin intervenir en ellas directamente.

Para ello, se aplicó una prueba compuesta por seis problemas matemáticos abiertos, diseñados para permitir una doble vía de resolución: mediante el uso de fórmulas o mediante razonamiento analítico y relacional. El objetivo fue determinar qué enfoque prefería cada estudiante y valorar el grado de comprensión matemática que demostraban.

La muestra estuvo constituida por 48 estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), todos ellos pertenecientes al mismo centro educativo. La selección fue no probabilística por conveniencia, y todos los participantes recibieron instrucción regular en matemáticas. La participación fue voluntaria, con el consentimiento informado del alumnado y sus familias.

4.2. Instrumentos y procedimiento

Para llevar a cabo el estudio se diseñó un instrumento compuesto por cinco problemas matemáticos clásicos, seleccionados con el objetivo de permitir su resolución mediante fórmulas o a través del razonamiento analítico y relacional. Los problemas planteados abordaban contenidos básicos de aritmética, álgebra, fracciones, proporcionalidad y geometría. Cada uno fue redactado de forma que no impusiera un único método de solución, promoviendo la posibilidad de optar por enfoques diferentes.

La aplicación de la prueba se realizó de forma individual y presencial, sin el uso de materiales de apoyo. Previamente, se explicó al alumnado que podían resolver cada problema como consideraran más adecuado, sin recibir ninguna orientación adicional por parte del profesorado.

El procedimiento consistió en:

- Aplicación del instrumento en el horario habitual de clase.
- Recolección de las respuestas escritas.

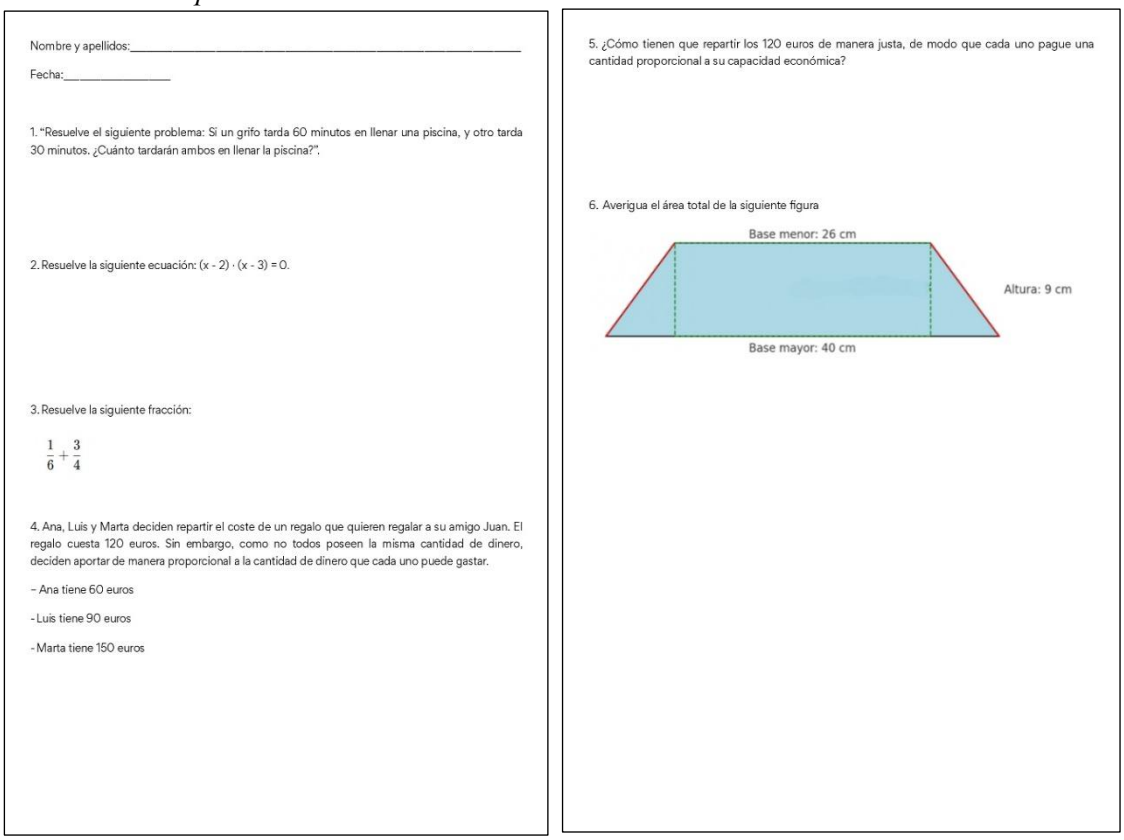
- Identificación del enfoque utilizado (razonamiento analítico y/o relacional o fórmula) en cada solución.
- Análisis de las estrategias aplicadas por los estudiantes.

4.2.1. Instrumento

Se diseñó una prueba con seis problemas matemáticos clásicos donde los alumnos podrían optar por aplicar fórmulas o utilizar el razonamiento analítico y/o relacional para encontrar la solución. Lo seis problemas aparecen presentados a continuación en la Figura 1.

Figura 1.

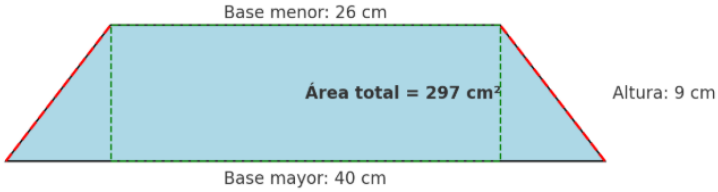
Prueba con seis problemas matemáticos.



Con el fin de ilustrar las posibles estrategias utilizadas por el estudiantado en la resolución de la pregunta 6 del instrumento, se presenta a continuación un ejemplo gráfico. La resolución de esta tarea puede abordarse mediante dos enfoques habituales: por un lado, la aplicación mecánica de la fórmula del área del trapecio, que, si bien es correcta, tiende a emplearse de forma algorítmica sin una comprensión profunda de su significado; y por otro lado, la descomposición geométrica del trapecio en figuras más simples, estrategia que favorece un razonamiento más analítico y visual del problema. La Figura 2 se incorpora únicamente a modo de ejemplo explicativo y no representa la respuesta de ningún participante concreto, sino que tiene una finalidad ilustrativa dentro del análisis didáctico de la tarea.

Figura 2.

Figura geométrica compleja.



Uso de fórmula para el cálculo del área del trapecio: el alumno, si la conoce, utilizaría el producto de la semisuma de los valores de las bases por el valor de la altura, es decir, $(40 + 26) : 2 \times 9 = 297 cm^2$.

Razonando puede dividir el alumno la figura en un rectángulo de dimensiones $26 \times 9 = 234\ cm^2$ y dos triángulos de catetos 7 y 9 cm, o bien, juntar los triángulos formando un rectángulo de dimensiones $7 \times 9 = 63\ cm^2$. Luego área total: $234 + 63 = 297\ cm^2$. Lo cual implica un razonamiento matemático en el que se descompone la figura para aplicar fórmulas generalmente más conocidas.

4.2.2. Procedimiento

Se recogieron tanto las respuestas correctas como incorrectas, así como el método empleado en cada caso (uso de fórmulas o razonamiento analítico y relacional).

Finalmente, se compararon los resultados obtenidos en el grupo, evaluando posibles diferencias en el enfoque utilizado. También se analizaron los patrones de uso de las fórmulas y su relación con el desempeño general en la prueba, análisis que se presenta detalladamente en el apartado de resultados.

4.3. Variables medidas

Las principales variables medidas fueron:

- Método de resolución: si se usaron fórmulas o, por el contrario, el razonamiento analítico y relacional para resolver los problemas.
- Precisión de las respuestas: si las respuestas eran correctas o incorrectas.
- Comprensión del problema: evaluación cualitativa basada en las explicaciones de los alumnos sobre cómo resolvieron los problemas. Algunos ejemplos representativos de este análisis se describen en el apartado de resultados.

5. RESULTADOS

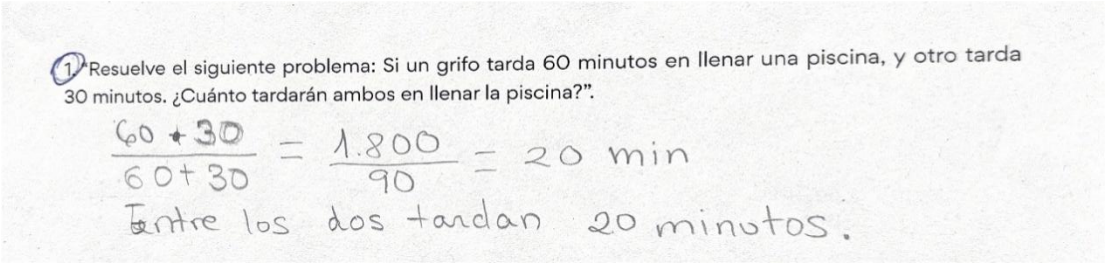
A continuación, se presenta la Tabla 1, en la que se organizan los resultados obtenidos por el grupo en función de las diferentes *variables* analizadas. Dicha tabla permite observar la relación entre el uso del *razonamiento analítico y relacional* y la *aplicación de fórmulas*, valorando el comportamiento de cada variable en los distintos problemas planteados.

Tabla 1.
Resultados del uso del razonamiento analítico y relacional vs la aplicación de fórmulas en los diferentes problemas planteados.

Problema	Razonamiento analítico y/o relacional	Aplicación de fórmulas	Ejercicio no contestado o no resuelto
1	10 (20,8%)	35 (72,9%)	3 (6,2%)
2	16 (33,3%)	32 (66,6%)	-
3	22 (45,8%)	24 (50%)	2 (4,1%)
4	18 (37,5%)	29 (60,4%)	1 (2%)
5	11 (22,9%)	34 (70,8%)	3 (6,2%)

En relación con el primer problema, los discentes de 2º ESO, en su mayoría, 35 de los alumnos (72,9%), optaron por aplicar la fórmula de la media armónica, posiblemente sin comprender completamente el razonamiento detrás de ella. Esta afirmación se basa en el análisis cualitativo de las justificaciones escritas por los estudiantes en sus resoluciones. En particular, aunque 35 alumnos utilizaron correctamente la fórmula $\frac{ab}{a+b}$ para obtener el resultado numérico correcto del problema del llenado conjunto de la piscina, en sus explicaciones no evidenciaron una interpretación del problema en términos de tasas de llenado o razonamiento proporcional, limitándose a enunciar la fórmula y sustituir los valores numéricos sin más argumentación. Esto puede verse en la Figura 3 donde se presenta un ejemplo de resolución de este problema por parte de un estudiante."

Figura 3.
Ejercicio resuelto por un alumno.



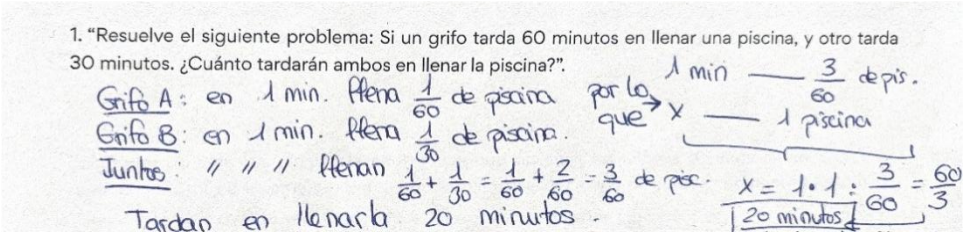
Desde un enfoque didáctico, comprender este tipo de problema implica reconocer que se trata de una situación de trabajo simultáneo, donde las tasas individuales de llenado (por parte de cada grifo) deben sumarse para obtener una tasa conjunta, y que luego es necesario calcular el tiempo total como el inverso de esa tasa total. Este razonamiento puede expresarse como:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \Rightarrow t = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30}} = 20 \text{ minutos}$$

En la Figura 4 se presenta otro ejemplo de un estudiante resolviendo el ejercicio sin el uso de fórmulas.

Figura 4.

Ejemplo de ejercicio resuelto por un alumno.



En la resolución del problema propuesto —determinar el tiempo necesario para llenar una piscina utilizando dos grifos con caudales diferentes— se observaron dos enfoques contrastantes. El primer estudiante aplicó directamente la expresión algebraica $t = \frac{ab}{a+b}$, que corresponde a un caso particular del cálculo de tasas de trabajo conjunto. Sin embargo, el uso de este procedimiento sugiere, según la falta de argumentaciones por parte de los estudiantes, una resolución de carácter mecánico, en la que el estudiante sustituye valores numéricos sin establecer una relación explícita entre el modelo matemático y el fenómeno descrito. Esta actuación ilustra lo que Skemp (1976) denomina *aprendizaje instrumental*: un conocimiento basado en reglas o fórmulas, eficaz para problemas rutinarios pero carente de comprensión profunda.

En contraste, el segundo estudiante abordó el problema manteniendo en todo momento un razonamiento proporcional. Inicialmente identificó que cada grifo llena respectivamente $\frac{1}{60}$y $\frac{1}{30}$de la piscina por minuto, lo que representa un análisis proporcional de las tasas de llenado. Posteriormente sumó ambas tasas para obtener la tasa conjunta $\frac{3}{60}$y, en coherencia con este enfoque, continuó utilizando el razonamiento proporcional al aplicar una regla de tres para determinar el tiempo total de llenado (20 minutos). Este procedimiento evidencia un razonamiento consistente basado en relaciones proporcionales y no en la aplicación mecánica de técnicas, lo que se aproxima a lo que Skemp (1976) denomina comprensión relacional, es decir, aquella en la que el estudiante comprende el porqué del procedimiento y puede justificar su resolución.

Desde la perspectiva de Polya (1945), este segundo enfoque se alinea con las etapas de comprensión y planificación de la resolución de problemas, ya que el alumno analiza la situación, construye un modelo matemático coherente y verifica la validez de su resultado. Asimismo, siguiendo a Ausubel (1968), este tipo de razonamiento promueve un *aprendizaje significativo*, al establecer conexiones sustantivas entre conceptos previos (proporcionalidad, tasas, inverso de una magnitud) y el nuevo problema.

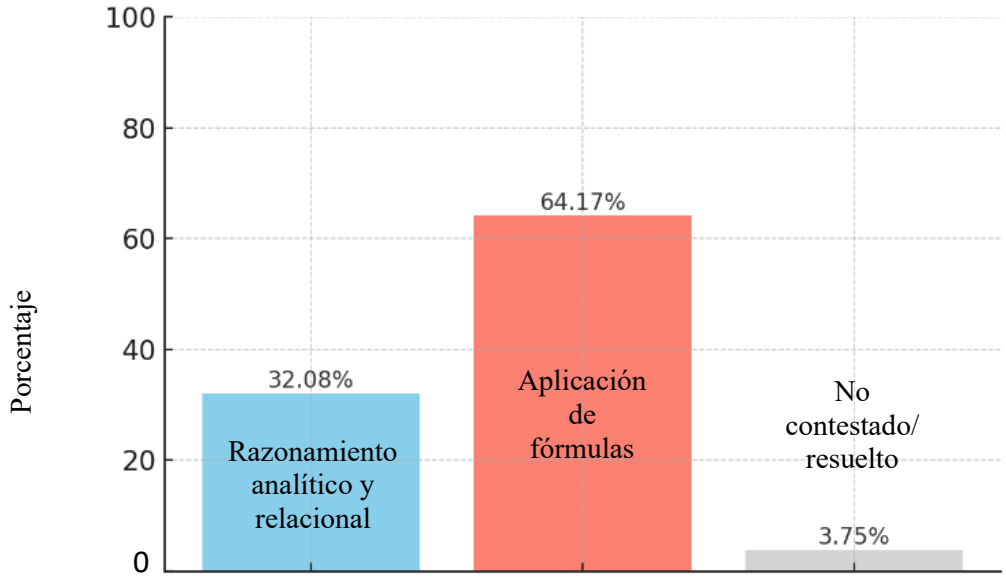
La comparación entre ambos enfoques pone de relieve cómo el uso exclusivo de fórmulas puede enmascarar una comprensión deficiente, mientras que la interpretación de magnitudes y relaciones fomenta un aprendizaje flexible y transferible. Por ello, resulta pedagógicamente relevante promover estrategias didácticas que favorezcan la construcción conceptual y la reflexión, antes que la aplicación indiscriminada de algoritmos (Hiebert y Grouws, 2007; Star, 2005).

Con respecto a los problemas algebraicos, en el caso de la ecuación (x - 2) · (x - 3) = 0; 32 estudiantes (66,6%) de secundaria resolvieron el problema, sin ser la forma esperada u óptima, haciendo el producto y luego aplicando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado, mientras que 16 alumnos (33,3%) resolvieron el problema utilizando el razonamiento básico sobre productos nulos.

En cuanto a los problemas de fracciones y proporciones, dentro de esta misma línea de análisis, aun cuando el razonamiento matemático analítico y relacional apareció con cierta frecuencia en las resoluciones, predominó una tendencia a privilegiar el uso procedimental de fórmulas frente a procesos de análisis y comprensión, evidenciando un enfoque más instrumental que relacional del conocimiento matemático (Skemp, 1976). Por ejemplo, en los problemas de fracciones, los cuales son muy comunes y frecuentemente estudiados en la escuela, por lo que se esperaba mayor flexibilidad y la manifestación de diversas resoluciones, solo 22 de 48 (45,8%) alumnos resolvieron las preguntas utilizando representaciones gráficas y comparaciones visuales. Respecto al problema de geometría, los resultados fueron más contundentes, puesto que solo el 22,92% de los discentes optó por usar un razonamiento matemático analítico y relacional (división de la figura compleja en figuras más simples, de áreas comúnmente conocidas) al obtener el área de la figura, mostrada en la Figura 2. La mayoría utilizó la fórmula del trapecio isósceles para obtener el área.

Estos resultados se resumen en la Figura 5**,** lo que permite comparar las tendencias entre los discentes del nivel educativo analizado.

Figura 5.
Promedio de uso de razonamiento lógico vs aplicación de fórmulas.



6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación sugieren la conveniencia de seguir profundizando en el desarrollo del razonamiento matemático del alumnado, con el fin de analizar en mayor detalle su relación con el uso de fórmulas y rutinas mecánicas. No obstante, los datos obtenidos permiten afirmar que se ha manifestado el predominio del empleo de la estrategia basada en el uso de fórmulas en la resolución de problemas. Tal y como se ha podido observar en la resolución de los diferentes problemas de la prueba aplicada (por ejemplo, el problema de los grifos), algunos estudiantes optaron por aplicar la fórmula de la media armónica, aun cuando no tenían una comprensión adecuada de su uso, a pesar de que el problema podía resolverse mediante un razonamiento matemático como el mostrado en la Figura 4 (antes presentada). Este tipo de

comportamiento ha sido documentado en estudios previos, donde se alerta sobre la presencia de estrategias algorítmicas aplicadas sin comprensión profunda (Hiebert y Grouws, 2007; Star, 2005).

Estos resultados conducen a reconocer que el estudiantado, en lugar de desarrollar una capacidad analítica, a menudo recurren a la memorización de fórmulas, lo que puede resultar útil en la resolución de problemas estructurados o escolares con enunciados cerrados, como los planteados en este estudio. Sin embargo, esta estrategia no necesariamente implica una comprensión conceptual profunda ni favorece la transferencia de conocimientos a contextos más complejos o abiertos (Barcia Muentes et al., 2019). Este patrón se ha observado repetidamente en el grupo de estudiantes de secundaria que participaron en este estudio, quienes, de acuerdo con su trayectoria educativa, deberían haber fortalecido su razonamiento matemático analítico y relacional. Sin embargo, se observa una tendencia hacia la automatización de procesos que, si bien puede conducir a respuestas correctas, no favorece un aprendizaje significativo ni un desarrollo apropiado de la competencia matemática.

Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de revisar las prácticas de enseñanza en esta etapa educativa y promover metodologías que favorezcan la argumentación, la exploración de distintas estrategias de resolución y el desarrollo del razonamiento matemático, analítico y relacional, en lugar de la simple reproducción de algoritmos. Reforzar un enfoque que favorezca la comprensión y el análisis en la resolución de problemas matemáticos podría contribuir a un aprendizaje más significativo y transferible a contextos diversos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view.* Holt, Rinehart and Winston.

Araya Ramírez, N. (2014). Las habilidades del pensamiento y el aprendizaje significativo en matemática de escolares de quinto grado en Costa Rica. *Actualidades investigativas en educación, 14*(2), 66-95. https://doi.org/10.15517/aie.v14i2.14744

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181–185. https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196

Barcia Muentes, A. N., Morales Lucas, D. B., Cedeño Barcia, L. A., Cevallos Macías, J. L. y Fernández Quiroz, M. C. (2019). Diseño de una propuesta metodológica para perfeccionar el razonamiento lógico-matemático en los estudiantes. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo), 4*(3), 14-31. https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1689

Boaler, J. (2015). *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts*. YouCubed, Stanford University.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Brahmia, S., Boudreaux, A., Kuo, V. y Pollock, S. (2016). Students' difficulties with sense-making in algebra-based physics. *Physical Review Physics Education Research, 12*(2), 020124. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020124

Brown, T. y Macrae, S. (2005). Student perceptions of the relevance of mathematics: A review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(6), 669–681. https://doi.org/10.1080/00207390500230656

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno, 54*(1), 55-67. https://digibug.ugr.es/handle/10481/26079

Castañón de la Iglesia, N. (2024). *Estudio de la práctica docente de la argumentación y razonamiento matemático en 3.º de Educación Secundaria Obligatoria* [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Valladolid]. UVaDOC. https://uvadoc.uva.es/handle/10324/74185.

Dowker, A. (2016). *Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? Frontiers in Psychology*, 7, 508. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Eccles, J. S. y Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology, 53*(1), 109–132. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153

Ernest, P. (1998). *The philosophy of mathematics education*. Routledge.

Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P. y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*, 483-512. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Göller, S. (2020). Students' perception of relevance and their motivation to learn mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 105*(1), 35–57. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09970-3

González Astudillo, M. T., y Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 22*(3), 389–408.

Hadfield, O. y McNeil, N. M. (2012). Impact of math anxiety on working memory and academic performance. *Journal of Experimental Psychology: General, 141*(3), 439–445. https://doi.org/10.1037/a0026292

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234–283). American Mathematical Society.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford University Press.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). Planteamiento cuantitativo del problema. *Metodología de la Investigación*, 34-43.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. y Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Information Age Publishing.

Kline, M. (1972). *Mathematics: The loss of certainty*. Oxford University Press.

Krutetskii, V. A. (1976). In J. Kilpatrick y I. Wirszup. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Reston: NCTM.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/3609122

Ruiz Merino, A. 2019). *Aplicación de un programa de razonamiento matemático para mejorar el rendimiento escolar en el área de matemática en los estudiantes del primer grado de educación secundaria de la IE 146 UGEL 05 SJL* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional Mayor de San Marcos). https://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/20.500.12672/23878

Ryan, R. M. y Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 54–67. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1020

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.

Schunk, D. H. y DiBenedetto, M. K. (2020). Motivation and social-emotional learning: Theory, research, and practice. *Contemporary Educational Psychology, 60*, 101835. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101835

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/BF02571703

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, (77), 20–26. https://doi.org/10.1007/BF00311065

Sosa Guerrero, L., Flores Medrano, E. y Carrillo Yáñez, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 33*(2), 173–189. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411. https://doi.org/10.2307/30034943

Teófilo de Sousa, R., Alves, F. R. V. Y Araújo Souza, M. J. (2023). Categorías del Razonamiento Intuitivo y Teoría de las Situaciones Didácticas: una perspectiva sobre la intuición y el razonamiento matemático. *Revista de estudios y experiencias en educación, 22*(49), 284-302.

Urquizo Alcívar, A.M. y Abelardo Campana, C. (2017). Programa de estrategias didácticas cognitivas para el desarrollo del razonamiento matemático. Una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Revista boletín redipe, 6*(4), 99-111. https://doi.org/10.36260/rbr.v6i4.415

Van Hiele, P. M. (1959). *The development of geometric thought* (Doctoral dissertation, University of Utrecht).

Wigfield, A. y Cambria, J. (2010). Students' achievement values, goal orientations, and interest: Definitions, development, and relations to achievement outcomes. *Developmental Review, 30*(1), 1–35. https://doi.org/10.1016/j.dr.2009.12.001