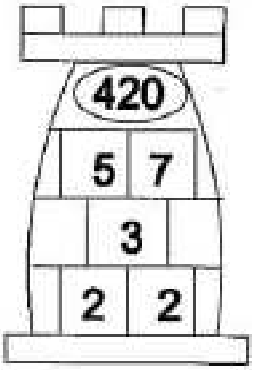
Divisibilidad y primos

Números primos y compuestos

Entre los números naturales podemos distinguir números primeros y compuestos. Un número es *compuesto* si es igual al producto de dos números naturales más pequeños, por ejemplo, $6 = 2 \cdot 3$. En caso contrario, y si el número no es igual a 1, se le llama *primo*. El número 1 no es ni primo ni compuesto.

Los números primeros son como los "ladrillos", que puedes utilizar para construir todos los números naturales. ¿Cómo se puede hacer esto? Consideremos el número 420. Es ciertamente compuesto. Puede ser representado, por ejemplo, como $42 \cdot 10$. Pero cada uno de los números 42 y 10 es compuesto, también. De hecho, $42 = 6 \cdot 7$, y $10 = 2 \cdot 5$. Puesto que $6 = 2 \cdot 3$, tenemos $420 = 42 \cdot 10 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (ver la figura). Esta es la "descomposición completa"de nuestro número (su representación como producto de números primos).



Está claro que podemos factorizar cualquier número natural mayor que 1 de la misma forma. Basta descomponer los números que tenemos en pares de números más pequeños mientras podamos (y si uno de los factores no se puede representar como tal producto, entonces es un factor primo).

¿Pero qué ocurre si intentamos factorizar el número 420 de una forma distinta? Por ejemplo, podemos comenzar con $420 = 15 \cdot 28$. Puede sorprenderte que terminemos siempre con la misma representación (los productos que se diferencian solamente en el orden de sus factores son considerados idénticos, habitualmente ponemos los factores en orden creciente).

Esto puede parecer evidente, pero no es fácil de probar. Se llama el **Teorema Fundamental de la Aritmética**: cualquier número natural distinto de 1 puede ser representado de forma única como producto de números primos en orden creciente.

Intentemos resolver una primera tanda de problemas fáciles:

Sabiendo que el número 1536 se descompone como $1536 = 2^9 \cdot 3$, contestar razonadamente a lo siguiente:

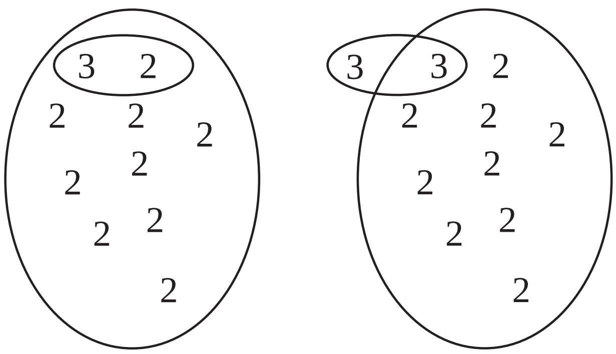
1. ¿Es 1536 divisible por 2?

2. ¿Es 1536 divisible por 5?

3. ¿Es 1536 divisible por 4?

4. ¿Es 1536 divisible por 9?

5. ¿Es 1536 divisible por 6?



Avancemos un poco más:

6. ¿Es verdad que si un número natural es divisible por 4 y por 3, entonces él debe ser divisible por $4 \cdot 3 = 12$?

7. ¿Es verdad que si un número natural es divisible por 4 y por 6, entonces debe ser divisible por $4 \cdot 6 = 24$?

8. El número A no es divisible por 3. ¿Es posible que el número $2A$ sea divisible por 3?

9. El número A es par. ¿Es verdad que $3A$ debe ser divisible por 6?

10. El número $5A$ es divisible por 3. ¿Es verdad que A debe ser divisible por 3?

11. El número $15A$ es divisible por 6. ¿Es verdad que A debe ser divisible por 6?

Dos números naturales se llaman *relativamente primos*, o *coprimos*, si no tienen divisores comunes mayores que 1.

Por ejemplo, dos números primos distintos son, por supuesto, relativamente primos. También, el número 1 es relativamente primo con cualquier otro número natural.

Usando un razonamiento similar al usado en los ejercicios 6 y 10, podemos probar los dos siguientes hechos.

a) Si un cierto número natural es divisible por dos números relativamente primos p y q, entonces es divisible por su producto pq.

b) Si el número pA es divisible por q, siendo p y q relativamente primos, entonces A es divisible por q también.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Dados dos números naturales x e y, se llama *máximo común divisor* de x e y y se denota por $mcd(x, y)$ al mayor de entre los divisores comunes de x e y.

Así, por ejemplo para 40 y 60, tenemos:
Los divisores de 40 son: $40, 20, 10, 8, 5, 1$.
Los divisores de 60 son: $60, 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.
Los divisores comunes de 40 y 60 son, por tanto: $20, 10, 5, 1$ y el mayor de ellos es 20, es decir $mcd(40, 60) = 20$.

De igual forma, el mínimo común múltiplo de x e y es el menor número natural que es divisible ambos y se denota por $mcm(x, y)$.
Por ejemplo, $mcm(40, 60) = 120$.

12. Dados los números $A = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$ y $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$ determinar $mcd(A, B)$.

13. Dados los números $A = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$ y $B = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$ determinar $mcm(A, B)$.

Problemas

Problema 1. Dados dos números primos distintos p y q, encontrar el número de divisores distintos del número
a)pq;
b) p^2q;
c) p^2q^2;
d)p^nq^m.

Problema 2. Probar que el producto de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por 6.
Pista. Hay por lo menos un número par, y por lo menos un número divisible por 3, entre cualesquiera tres números consecutivos.

Problema 3. Probar que el producto de cinco números naturales consecutivos cualquiera es
a) divisible por 30
b) divisible por 120.

Problema 4. Dado un número primo p, encontrar el número de números naturales que son
a) menores que p y relativamente primos con él
b) menores que p^2 y relativamente primos con él.

Problema 5. Encontrar el número natural más pequeño n tal que $n!$ es divisible por 990.

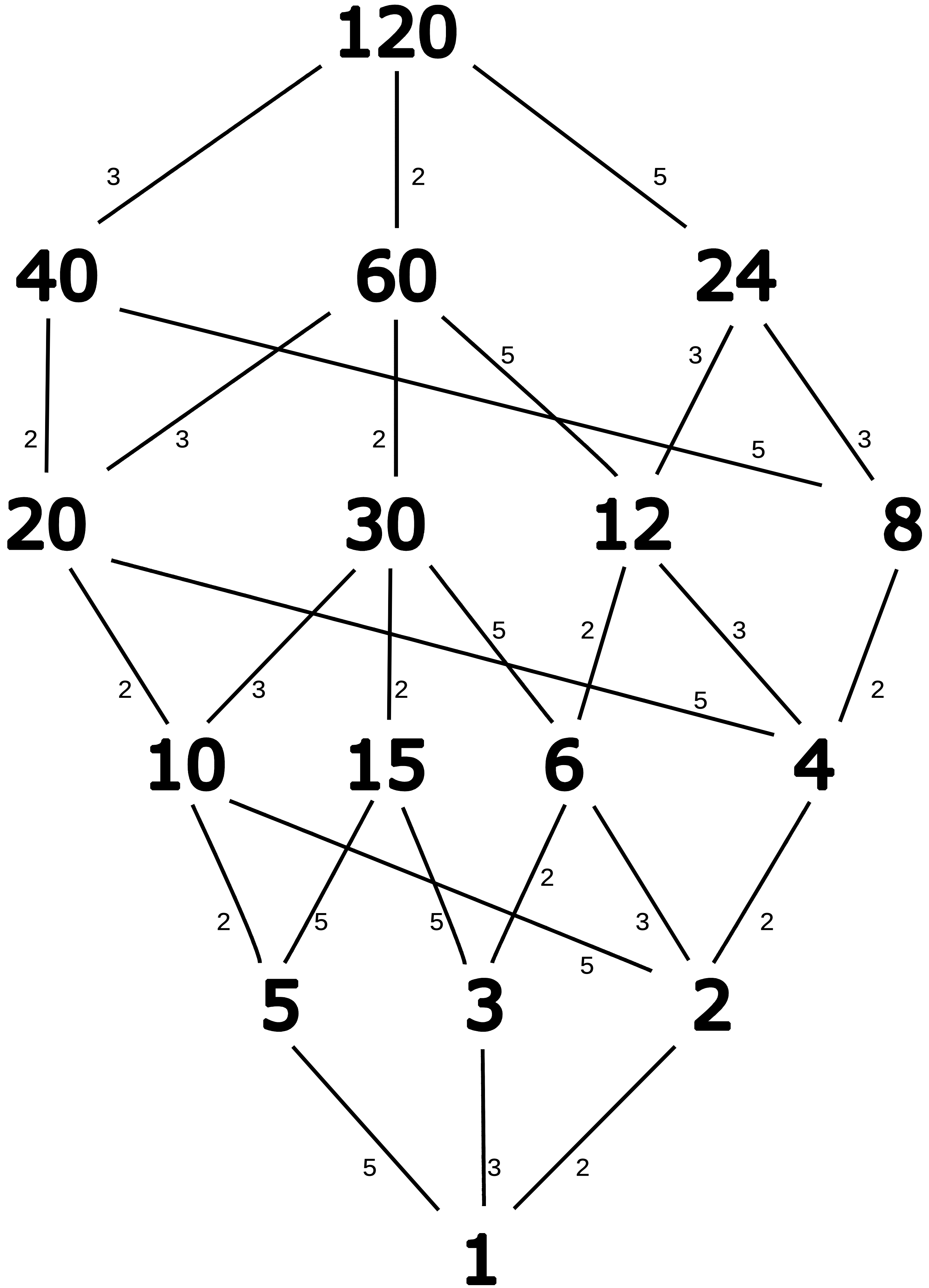
Problema 6. ¿Cuántos ceros aparecen al final de la representación decimal del número 100! ?

Problema 7. Para un cierto número n, ¿puede el número $n!$ tener exactamente cinco ceros en el final de su representación decimal?

Problema 8. Probar que si un número tiene un número impar de divisores, entonces es un cuadrado perfecto.

Problema 9. Antonio multiplicó dos números de dos dígitos en la pizarra. Entonces cambió todos los dígitos por letras (dígitos diferentes fueron cambiados a letras diferentes, y los dígitos iguales fueron cambiados a la misma letra). Él obtuvo $AB \cdot CD = EEFF$ Probar que Antonio se equivocó en alguna parte.

Problema 10. ¿Puede un número escrito con cien 0, cien 1, y cien 2 ser un cuadrado perfecto?
Pista. Este número es divisible por 3, pero no por 9.


120
3
2
5
40
60
24
5
3
2
3
2
5
3
20
30
12
8
5
2
3
2
3
2
5
2
10
15
6
4
2
2
5
5
3
2
5
5
3
2
5
3
2
1