

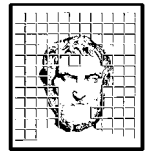
Números y calculadoras

Sesión 7

2007-08



ESTALMAT-Andalucía



SAEM THALES

Material recopilado por:

Encarnación Amaro Parrado

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Las calculadoras que utilizaremos en esta sesión son por gentileza de

CASIO

Granada, 24 de noviembre de 2007



Conocer la calculadora

CASIO fx-82ES

Antes de comenzar a resolver las distintas actividades de esta sesión dedicada a números y calculadora es conveniente conocer el funcionamiento de la máquina que vamos a utilizar.

De forma breve, resumiremos las teclas que necesitáis conocer para afrontar la resolución de las actividades que os proponemos.

Las teclas de la calculadora

Las teclas de la calculadora tienen una, dos o tres funciones denominadas función principal que aparece sobre la tecla, función secundaria que aparece de color amarillo y función alfabética que está representada en rojo.

A estas funciones se accede de la forma siguiente:

Teclas	Acción	Ejemplo
Función principal	Pulsar directamente	
Segunda función	+ Tecla	para obtener $(\sqrt{\quad})$
Función alfabética	+ Tecla	para obtener B

Para obtener el resultado de una operación es necesario pulsar

Operaciones básicas

- Suma
- Resta
- Producto
- Cociente
- Cuadrado de un número
- Cubo de un número
- Potencia de un número
- Raíz n-ésima
- Raíz Cuadrada
- Raíz cúbica
- Signo para números negativos.
- Coma para números decimales
- Para obtener (π)



Expresiones con paréntesis

Hay que cerrar tantos paréntesis como se hayan abierto.

Por ejemplo, para calcular $3 - [2 - (1 + 5)]$ habría que pulsar las teclas siguientes:

- -

Operaciones con fracciones

Permite escribir una fracción.

Permite convertir una fracción en número decimal y al contrario.

Para editar expresiones

Borra el carácter que se encuentra a la izquierda del cursor.

INS Activa el modo inserción.

Borra la pantalla.

Desplaza el cursor a la línea superior.

Desplaza el cursor a la línea inferior.

Desplaza el cursor una posición a la izquierda.

Desplaza el cursor una posición a la derecha.

Representa el valor del último resultado obtenido.

Apaga la calculadora.



Actividades para practicar con la calculadora

Actividad 1

Aunque suponemos que en más de una ocasión, los números te habrán creado quebraderos de cabeza, te proponemos la realización de algunas operaciones matemáticas, con ayuda de una calculadora, para determinar ciertas curiosidades y propiedades de algo tan necesario y sobre todo, tan presente en nuestra sociedad, como son los números.

- Comenzamos realizando operaciones con el número 37, multiplicándolo por los múltiplos de 3:

$$3 \times 37 = 111$$

$$6 \times 37 = 222$$

$$9 \times 37 = 333$$

Es fácil deducir qué ocurre al multiplicarlo por 12, 15, 18, 21, 24 y 27.
Si seguimos multiplicando, obtendremos:

$$30 \times 37 = 1110$$

$$33 \times 37 = 1221$$

$$36 \times 37 = 1332$$

¿Sabrías cuales serían los siguientes resultados?

¿Eres capaz de encontrar la razón por la que se obtienen las secuencias anteriores?

- Algo similar ocurre con otro número como es el número 3367 cuando se multiplica por los múltiplos de 33.



ESTALMAT-Andalucía

- Continuamos realizando nuevas operaciones, en este caso serán simples restas. Efectúa:

$$9 - 1$$

$$98 - 21$$

$$987 - 321$$

$$9876 - 4321$$

- Conociendo los resultados anteriores, deduce los resultados que obtendrás al continuar la secuencia:

$$98765 - 54321$$

$$987654 - 654321$$

$$9876543 - 7654321$$

$$98765432 - 87654321$$

$$987654321 - 987654321$$

Al menos el último resultado es fácil de obtener.



Actividad 2

- Necesitarás una buena calculadora con muchos dígitos si no eres capaz de deducir los resultados de las siguientes operaciones:

$$1^2$$

$$11^2$$

$$111^2$$

$$1111^2$$

$$11111^2$$

- Repite las operaciones anteriores cambiando el 1 por un 9, e intenta adivinar el resultado.



Actividades con números y operaciones

Actividad 3

- Resta a tu año de nacimiento la suma de las cuatro cifras que lo componen. Obtendrás un número divisible por 9. ¿Por qué?

- Escribe un número de dos cifras que sean diferentes; cambia el orden de las cifras. Con los dos números anteriores, resta al mayor el menor. ¿Qué observas en el resultado obtenido?

- Escribe un número de tres cifras, de modo que no sean las tres iguales. Con las tres cifras anteriores formamos un nuevo número ordenándolas de mayor a menor y un nuevo número ordenándolas de menor a mayor. Restamos los dos números anteriores. Al resultado obtenido le damos la vuelta a las cifras y lo sumamos con el número anterior.
¿Cuál es el resultado?
¿Siempre ocurre lo mismo? Podrías averiguar por qué.



Actividades para investigar

- **El uno.** Al calcular $(1 + 2) : 3$ se obtiene como resultado 1. Coloca entre cada dos cifras las operaciones que necesites y los paréntesis para obtener siempre 1 como resultado

$$1\ 2\ 3\ 4 = 1$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 1$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 = 1$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 = 1$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 = 1$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 1$$

- **Un número especial.** Multiplica el número 12345679 por cualquier cifra y el resultado lo multiplicas por 9. ¿Qué ocurre?

- **Productos con las nueve cifras.** En los productos siguientes aparecen una sola vez cada una de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

$$138 \times 42 = 5796$$

$$483 \times 12 = 5796$$

$$198 \times 27 = 5346$$

$$297 \times 18 = 5346$$

¿Podrías encontrar otros productos en los que ocurra lo mismo?



Actividad 4

Encuentra multiplicaciones que cumplan estas condiciones:

- Las tres cifras del multiplicando son diferentes
- De la cifra del multiplicador no se sabe nada
- Las tres cifras del resultado del producto son iguales.

x		



Actividad 5

Un número natural se dice que es un cuadrado perfecto si es el resultado de elevar al cuadrado otro número natural, por ejemplo 4 por ser el cuadrado de 2, 9 por ser el cuadrado de 3.

- ¿El número 14^{15} es un cuadrado perfecto?, ¿por qué?
- Escribe todos los cuadrados perfectos entre 1 y 100
- Calcula a continuación cuántos números entre 1 y 100 son múltiplos de algún cuadrado perfecto.



Actividad 6

Como tuve la indiscreción de preguntar a mi amigo por la edad de su sobrina Elvira, él me respondió: “Multiplica el n° de sus brazos por el de sus piernas y luego por el n° primo de sus adoradores y obtendrás la edad de mi sobrina, que resulta ser un n° *perfecto*, ya que ella es perfecta”

- Recordemos qué es un n° primo.
 - Continuamos calculando los *divisores* de un n° , proceso que puede hacerse sistemáticamente: Calcula todos los divisores de 28, de 60, de 180, de 392.
 - Un número natural se dice que es *perfecto* si es igual a la suma de sus divisores propios (Todos los divisores menos el propio número): Comprueba que 6 es *perfecto* y que 20 no lo es.
 - Si llamamos p al n° primo de sus adoradores, calcula los divisores propios de la edad de Elvira e imponle la condición de que dicha edad sea un n° *perfecto*.
-
- ¿Y si el n° de sus brazos se multiplica por 7 y por el n° de sus adoradores, ¿sería también “perfecta” la edad de mi sobrina?



Actividad 7

1. El cuadrado de $a0$ es a^200 : termina en dos ceros. Calcula los cuadrados de 15, 25, 35, 45, 55. ¿En qué terminan? ¿por qué ocurre?
2. Calcula mentalmente según la regla anterior los cuadrados de 65, 75, 85 ,95, 105, 195.
3. 1473 no puede ser un cuadrado perfecto. La terminación de un cuadrado debe ser una de las siguientes:
4. Calcula los cuadrados de 11, 21, 31, 41, 51. Todos acaban en 1. Da una regla que permita calcular el resto del cuadrado relacionándolos con los cuadrados de 10, 20, 30, ...
5. Las dos últimas cifras del cuadrado de un número que acaba en 1 deben de ser unas de las siguientes:



Actividad 9

- Calcula $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \dots$. ¿Cuál es la última cifra de 3^{26} ?

- Calcula $7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \dots$. ¿Cuáles son las dos últimas cifra de 7^{123} ?

- ¿Cuál es la última cifra del número resultante de de la siguiente operación:
 $17^{1983} + 11^{1983} - 7^{1983}$



Actividad 10

- Usa la calculadora para obtener $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

- Y ahora para obtener $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

- Con esa secuencia debes obtener con la mayor aproximación que te permita la calculadora el valor de :

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

(Los puntos suspensivos indican que se prosigue así indefinidamente)

- Calcula el valor de $\sqrt{2}$. Tu calculadora lo expresa con un número de cifras decimales que queremos ampliar. ¿Qué proceso tenemos que realizar para determinar las siguientes cifras decimales que la calculadora no nos ha dado?



Actividad 11

¿CÓMO AVERIGUAR SI UN CIERTO NÚMERO ES PRIMO?

Un procedimiento sencillo para averiguar si un número N es primo sería comprobar, realizando la división, que no es divisible por los números primos más pequeños que éste.

Realmente no es necesario probar con todos los números primos más pequeños que N , basta con probar los que sean más pequeños que la raíz cuadrada de N .

Además bastará con llegar a una división en la que el cociente sea menor o igual que el siguiente número primo por el que hay que dividir. Si esa división no es exacta, el número N resultará ser primo.

- Comprueba, utilizando el método de la división, si los siguientes números son primos, anotando en tu cuaderno los resultados:

239	1621	1999	2001
1067	2011	911	769
677	279	387	771

- Con el paso del tiempo hemos aprendido muchas cosas sobre los números primos. Pero sin embargo no se ha descubierto una fórmula que permita obtener todos los números primos desde 2 en adelante. Deberán continuarse los intentos para encontrar dicha fórmula. Una fórmula para obtener algunos números primos es:

$$P_n = n^2 - n + 41$$

P_n es un número primo si n toma valores desde 1 hasta 40: $P_1 = 41$, $P_2 = 43$, $P_3 = 47$.

- ✓ Calcula P_4 , P_5 , P_6 , ..., P_{40} con una calculadora.
- ✓ ¿Cuál es el valor de P_{41} ? ¿Es primo o compuesto? ¿Por qué?



Actividad 12

Un número especial

Frases en torno a π

- "En la circunferencia, el comienzo y el fin coinciden."
Heráclito (544-480 a. C.); filósofo griego
- "Inútil es la labor del que se fatiga intentando cuadrar el círculo."
Stiffel (1544)
- "La naturaleza se reduce a un número: π . Quien descubra el misterio de π , comprenderá el pensamiento de Dios..."
Isaac Newton
- "El rostro de π estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podía contemplarlo y continuar con vida. Pero unos ojos de penetrante mirada acechaban tras la máscara, inexorables, fríos y enigmáticos."
Bertrand Russell, *Nightmares of Eminent Persons (Pesadillas de personas ilustres)*

Curiosidades

- En 1983, Rajan Mahadevan fue capaz de recitar de memoria 31.811 decimales de π .
- Los pies de un elefante tienen forma circular. Multiplica el diámetro de su pie por 2π , y el resultado obtenido es la altura del elefante (de los pies a la espalda)
- Si quisiéramos escribir en línea recta los 200.000 millones de decimales de pi calculados por Kanada y Takahasi en 1999, el papel necesario tendría una longitud tal, que podría dar una vuelta a la circunferencia de la Tierra.
- Con sólo unos 40 decimales del número pi se podría calcular la longitud de una circunferencia que abaricara a todo el universo visible, con un error menor que el radio de un átomo de hidrógeno.

Poemas

Si en este poema cuentas las letras de cada palabra tendrás las primeras veinte cifras de π :

Soy y seré a todos definible,
mi nombre tengo que daros,
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

Esta otra frase nos da las diez primeras cifras decimales de π :

Con 1 hilo y 5 mariposas
se pueden hacer mil cosas.



Número Pi

El número Pi es digno de admiración
tres coma uno cuatro uno
todas sus cifras siguientes también son iniciales
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada seis cinco tres cinco
con un cálculo ocho nueve
con la imaginación siete nueve
o en broma tres dos tres, es decir, por comparación
cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas.
El cortejo de cifras que forman el número Pi
no se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
¡Oh qué corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
¡Qué frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí dos tres quince trescientos noventa
mi número de teléfono la talla de tu camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
número de habitantes sesenta y cinco décimos
la medida de la cadera dos dedos la charada y el código
en la que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el número Pi, éste no,
él es todavía un buen cinco
no es un ocho cualquiera
ni el último siete
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.

Wisława Szymborska
Premio Nobel de Literatura 1996



Algunos valores de π obtenidos antes de 1600

Matemático - Lugar	año	valor
La Biblia (Reyes-I-7-23)		3
Papiro de Ahmes (Egipto)	1650 a.C.	3,16
Tablilla de Susa (Babilonia)	1600 a.C.	3,125
Bandhayana (India)	500 a.C.	3,09
Arquímedes de Siracusa	(287-212 a.C)	entre 223/71 y 220/70
Liu Hui (China)	260	3,1416
Tsu Chung Chih	480	Entre : 3,145926 y 3,1415927
Al-Kashi (Persia)	1429	3,1415926535897932
Franciscus Vieta (Francia)	(1540-1603)	3,1415926536

Para conocer más sobre el número π

<http://ciencianet.com/pi.html>

http://estudiantes.uam.es/fernando.dominguez/cazapi_pi.htm

http://www.portalplanetasedna.com.ar/numero_pi.htm

<http://www.iescarrus.com/edumat/taller/numeropi/numeropi.htm>

<http://www.xtec.es/~bfiguera/curioso6.html>

<http://webs.adam.es/rlllorens/pihome.htm>

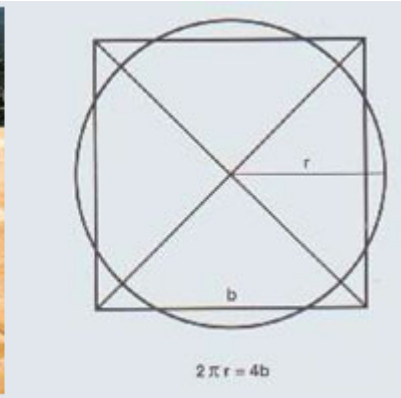
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/pi_historia/pi_hist.htm

<http://www.elmundo.es/elmundo/2006/10/05/ciencia/1160047374.html>





El perímetro de la base de la Gran Pirámide es el mismo que el de la circunferencia dada, tomando como radio la altura de ésta, o, lo que es lo mismo, dividiendo el perímetro de la base de la Gran Pirámide por el doble de la altura obtenemos el número Pi.



Las 1000 primeras cifras de π

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781
6406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231
7253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109
7566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664
8213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364
3678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919
5309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793
8183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702
7705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713
4275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892
3542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998
3729780499510597317328160963185950244594553469083026425223082533446850
3526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349
0428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927
876611195909216420199

