ESTALMAT-*Andalucía*

GRAFOS I

Antonio Luis Rodríguez López-Cañizares y Ceferino Ruiz Garrido

El alumno que siga esta lección aprenderá a resolver algunos tipos diferentes de problemas con el auxilio de los grafos. La Teoría de Grafos es una rama pujante de las Matemáticas. En lo que sigue aparecen descritos algunos conceptos básicos (grafo, nodo o vértice, arista, isomorfía, incidencia, adyacencia), algunos resultados elementales que son imprescindibles para avanzar en el conocimiento de esta importante teoría y ciertas notaciones K_n, $K_{m,n}$.

La Teoría de Grafos es la rama de las matemáticas que se ocupa de los grafos y de las aplicaciones de los mismos. Un grafo es un conjunto de vértices o *nodos* {1,2,3,4,...}, un conjunto de aristas {*a,b,c,d,...*} y una lista especificando para cada arista los dos vértices en los que incide, a los que se llama *extremos* de la arista.

Un ejemplo de grafo es el que se muestra en la siguiente figura:

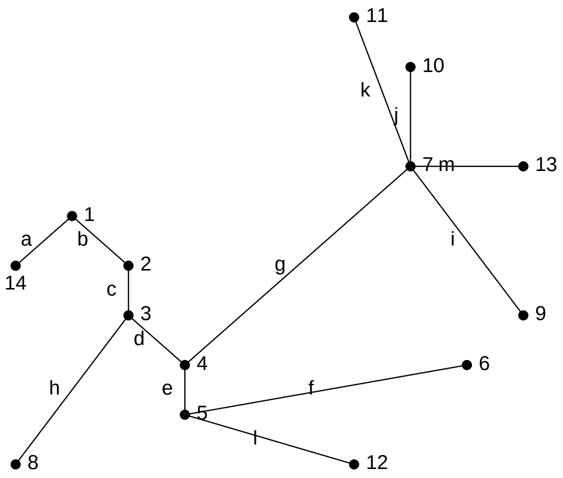

Figura 1: Grafo con 14 nodos y 13 aristas

Este grafo tiene catorce nodos: {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14} (se dice que su *orden* es 14) y trece aristas: {*a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m*} (se dice que su *tamaño* es 13). Las relaciones de incidencia se muestran bien en el gráfico así por ejemplo la arista *g* incide con los nodos 4 y 7. A los nodos que como el 4 y el 7 son extremos de la misma arista se les llama *vecinos*.

Una arista cuyos extremos coinciden se llama *bucle*.

Si las aristas del grafo están orientadas, éstas se llaman *arcos*; es decir, se distingue en cada arco el nodo origen y el nodo final. En tal caso el grafo se llama *digrafo* o grafo dirigido.

Un grafo que tiene valores asociados a los arcos o a los vértices o a ambos se llama *red*. (p.e., un mapa de carreteras con las distancias entre cada dos poblaciones; por eso se habla de la red de carreteras).

Problema de los puentes de Königsberg[1]:

Por la ciudad de Königsberg pasa el rio Pregel. En medio del río hay un islote que tiene dos puentes que dan a la ribera izquierda y dos a la derecha. Además ese islote comunica por otro puente con un segundo islote que a su vez tiene un puente a cada orilla del río. Existen en total 7 puentes ¿se puede realizar un paseo de forma que se pase por todos los puentes sólo una vez?

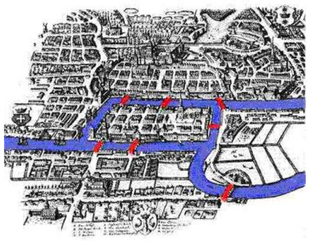

Figura 2: Los 7 puentes del río Pregel en Königsberg

Para la resolución de este problema, Leonard Euler tradujo el mapa de Königsberg en el siguiente grafo, identificando cada trozo de tierra firme de Königberg con un nodo de un grafo y cada puente que une dos trozos de tierra firme, con una arista que une los nodos correspondientes.

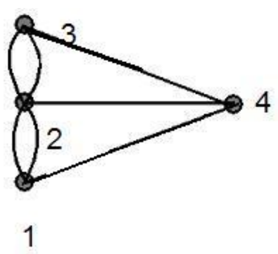

Figura 3: El grafo de los puentes sobre el río Pregel

El problema de los puentes de Königsberg se traduce en la siguiente pregunta: ¿Se puede recorrer el grafo de la figura anterior de forma que se pase por todas las aristas sólo una vez?

[1]Este problema tiene una gran importancia en la historia de las Matemáticas pues fue Euler quien, en 1736, lo resolvió y con ello inició una nueva e importante rama de las Matemáticas: la *Topología*.

No basta, a veces, para designar una arista con especificar los nodos extremos de la misma pues dos nodos específicos pueden ser incidentes con más de una arista (como es el caso de este grafo). Un grafo que tenga aristas distintas con los mismos extremos (es decir *aristas paralelas*) se llama *multigrafo*. Un grafo que no tenga ni bucles ni aristas paralelas (o múltiples) se llama *grafo simple*.

Un grafo, como el grafo del tetraedro (ver figura 4), en que cualquier nodo es vecino de cualquier otro se llama *completo*. Un grafo simple y completo de orden n se designa así: K_n.

Un grafo se llama *bipartito* si se pueden agrupar los nodos del mismo en dos conjuntos de forma que todas las aristas tengan un extremo en el primer subconjunto y el otro extremo en el segundo subconjunto. Un grafo bipartito es completo si cada nodo del primer subconjunto es vecino de cualquier nodo del segundo subconjunto. Si el primer subconjunto es de orden m y el segundo de orden n, el gráfico bipartito simple y completo se designa por $K_{m,n}$.

Un grafo es *planario* si se puede dibujar sobre el plano de forma que sus aristas no se corten. El grafo de los puentes del río Pregel es planario. Sin embargo el grafo de 3 casas que están unidas a 3 pozos,cada una de ellas, no lo es; es decir, las tuberías que conectan los pozos y las pozos se tienen que cruzar. Esto es lo mismo que decir que $K_{3,3}$ no es planario.

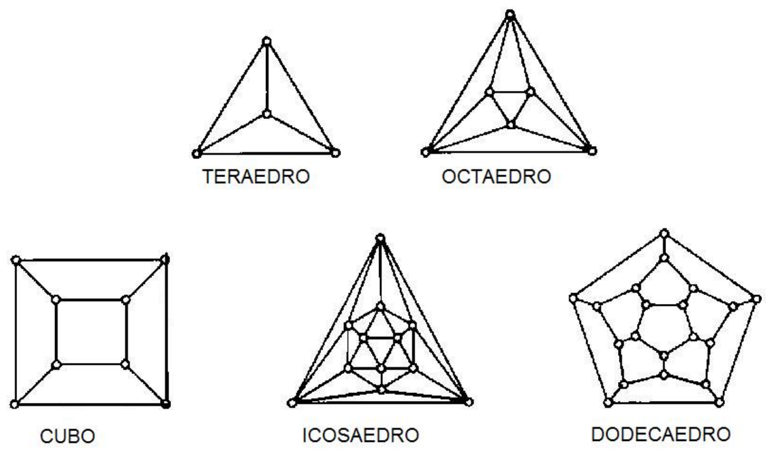

Figura 4: Grafos planarios de los poliedros platónicos

El número de aristas incidentes con un nodo es el *grado* del nodo. Los bucles cuenta como dos aristas. Los nodos pueden ser de grado par o impar. Un nodo de grado 0 es un nodo aislado. Un nodo de grado 1 recibe el nombre de *hoja*.

Una propiedad interesante sobre la suma de los grados de un grafo se debe a Euler y dice que

Propiedad 1: *La suma de los grados de los nodos de un grafo es el doble del número de aristas.*

De la propiedad anterior se sigue, de manera natural, la siguiente

Propiedad 2: *El número de nodos de grado impar de un grafo tiene que ser par.*

Lo que importa de un grafo, que se llama así porque puede ser representado por una gráfica, no es precisamente el aspecto de la gráfica. Dos gráficas aparentemente diferentes pueden representar el mismo grafo. Un ejemplo se muestra en los dos grafos siguientes:

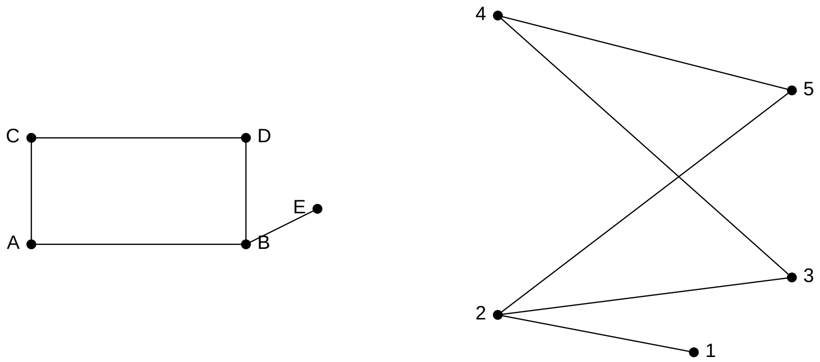

Figura 5: Grafos isomorfos

Los dos grafos de la figura 5 se dice que son *isomorfos* pues entre el conjunto de los vértices del grafo de la izquierda y el conjunto de los vértices del grafo de la derecha se puede establecer una *correspondencia uno a uno* , e igual se puede hacer con las aristas, de modo que si un vértice y una aristas son incidentes también lo son sus homólogos en esta correspondencia.

Un grafo muy conocido por los turistas que han visitado Londres[2] es el grafo que representa las líneas de metro. Mediante una representación plana se tiene un esquema claro y reconocible de como están dispuestas las estaciones y los cambios de línea. Una parte del mismo se muestra a continuación:

Figura 6: Plano del metro de Londres

[2]Su creador fue Henry C. Beck cuando era un delineante de 29 años y trabajaba de forma interina para el *London Underground Group*. Corría el año 1931 y el mapa fue rechazado en principio; y tras años de insistencia de su autor fue aceptado por los directivos de la compañía que permitieron la publicación de una pequeña tirada. Los directivos no se fiaban de la representación topológica que se desentendía de las distancias. El mapa fue un éxito y el público no necesito más explicaciones. Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Tube_map` .

Las distancias reales no se corresponden con las distancias en el plano, pero lo que cuenta al circular en un metro es más el número de estaciones y cambios de línea a realizar que la distancia real; y eso se reconoce muy bien.

Un concepto importante en la Teoría de grafos es el concepto de *cadena*[3]. Una cadena es una sucesión de aristas de un grafo de forma que cada arista tiene un nodo en común con la que le sigue y otro nodo con la que le precede. Si una cadena comienza y termina en el mismo nodo, se dice que es un *ciclo*.

Un grafo es *conexo* si se pueden unir dos nodos cualesquiera por medio de una cadena. Un grafo conexo que no tiene ciclos se llama un *árbol*.

Una cadena es *euleriana* si pasa por cada arista del grafo una sola vez. Un grafo conexo es *euleriano* si tiene un cadena euleriana que es un ciclo; a tales ciclos se les denomina *ciclos eulerianos*.

Una caracterización de los grafos eulerianos nos la da la siguiente

Propiedad 3: *Un grafo es euleriano si y solo si es conexo y cada vértice en el mismo tiene grado par.*

Un poco más general general es la siguiente

Propiedad 4: *Un grafo conexo contiene una cadena euleriana si y solo si todos los vértice del mismo tienen grado par, excepto a lo sumo dos de ellos.*

En este último caso, cuando solamente hay dos vértices de grado impar, todas las cadenas eulerianas que recorren el grafo han de comenzar en uno de esos vértices y terminar en el otro.

El grafo asociado por Euler al *Problema de los Puentes de Königsberg* no es euleriano, ni siquiera contiene una cadena euleriana, ya que tiene 4 vértices de grado impar. Lo cual resuelve negativamente la cuestión.

Una cadena es *hamiltoniana* si pasa una y sólo una vez por cada nodo del grafo. Un grafo es *hamiltoniano* si existe en él un ciclo que sea una cadena hamiltoniana. A tales ciclos se les llama *ciclos hamiltonianos*.

Un grafo hamiltoniano es necesariamente un grafo conexo.

A diferencia de los grafos eulerianos, no existen caracterizaciones útiles para los grafos hamiltonianos. La tarea de averiguar si un grafo es o no hamiltoniano se complica enormemente cuando crece el tamaño del mismo. Se dice que tal problema es computacionalmente difícil ya que no se disponen de reglas o *algoritmos* que se puedan emplear con escaso gasto de tiempo y de espacio en el ordenador.

[3] En inglés *walk*

Relación de Problemas de Grafos

1. En un minitablero de ajedrez de 3 filas y 3 columnas se encuentran situados dos caballos blancos en las dos esquinas superiores y dos negros en las inferiores. Con los movimientos propios del caballo en ajedrez ¿es posible resituarlos de forma que haya dos negros en una diagonal y dos blancos en la otra diagonal?

2. En un tablero de 4 por 4 se han eliminado las 4 esquinas quedando solo 12 casillas disponibles ¿es posible que un caballo recorra todas las casillas sin pasar dos veces por la misma casilla terminando en la misma casilla en que empezó?

3. Un país tiene 9 ciudades con los nombres : 1,2,3,...9. De una ciudad se puede ir a otra por avión si al formar el número de dos dígitos uniendo el nombre de la primera ciudad y la segunda resulta ser un múltiplo de 3. Hacer el grafo de las rutas aéreas disponibles. ¿Se puede ir de la ciudad 1 a la 9? ¿y a la inversa?

4. En un cierto reino hay 100 ciudades y 4 caminos parten de cada ciudad ¿cuántos caminos hay en total?

5. Hay 30 estudiantes en una clase. ¿Puede suceder que 9 de ellos tengan exactamente 3 amigos en la clase, 11 tengan 4 y 10 tengan 5 cada uno?

6. En Pequeñilandia hay 15 teléfonos ¿Pueden ser conectados de forma que:

   a) cada teléfono se conecte exactamente a otros 7,

   b) haya 4 teléfonos cada uno de ellos conectado a otros 3, 8 cada uno conectado a otros 6 y 3 cada uno conectado a otros 5?

7. Un rey tiene 19 vasallos ¿puede suceder que cada vasallo tenga tenga 1, 5 o 9 vecinos?

8. ¿Puede un reino con 3 caminos saliendo de cada ciudad tener 100 caminos?

9. Pedro después de venir de Disneylandia dijo que había visto un lago encantado con 7 islas a las que se llegaba por 1, 3 o 5 puentes; con esta información ¿se puede asegurar que uno de los puentes conduce a tierra firme?

10. Prueba que el número de personas que ha vivido en cualquier época sobre la faz de la Tierra y que ha estrechado la mano con otras persona un número impar de veces es par.

11. ¿Pueden 9 segmentos ser dibujados en un plano de forma que cada uno interseque exactamente a otros 3?

12. En el país Sietilandia hay 15 ciudades, cada una conectada al menos a otras 7. Prueba que se puede viajar de cualquier ciudad a cualquier otra (posiblemente pasando por ciudades intermedias).

13. En el país de Nuncajamás se utiliza el sistema de transporte de la alfombra mágica. Hay 21 líneas de alfombras que llegan a la capital. Una de las líneas vuela a Ciudadremota y el resto de las ciudades son servidas por 20 líneas exactamente . Demuestra que se puede volar de Ciudadremota a la capital.

14. En un cierto país 100 caminos salen de cada ciudad y se puede viajar de una ciudad a otra cualquiera. Un camino ha sido clausurado por reparaciones. Prueba que a pesar de ello se puede seguir viajando de una ciudad a cualquier otra.

15. En un grafo completo de orden 4 ¿se pueden recorrer las aristas sin levantar el lápiz del papel y pasando solo una vez por cada arista? Igual pregunta si al grafo se le añade un nodo unido a otros dos de forma que no se corten las aristas.

16. ¿El grafo de los Puentes de Königsberg es hamiltoniano?

17. Dibuja un grafo que no sea hamiltoniano.

18. Se considera un río con 2 islas en su interior como se muestra en la figura 7. Determina si se puede o no realizar un recorrido que atraviese todos los puentes, sin pasar por ninguno de ellos más de una vez.

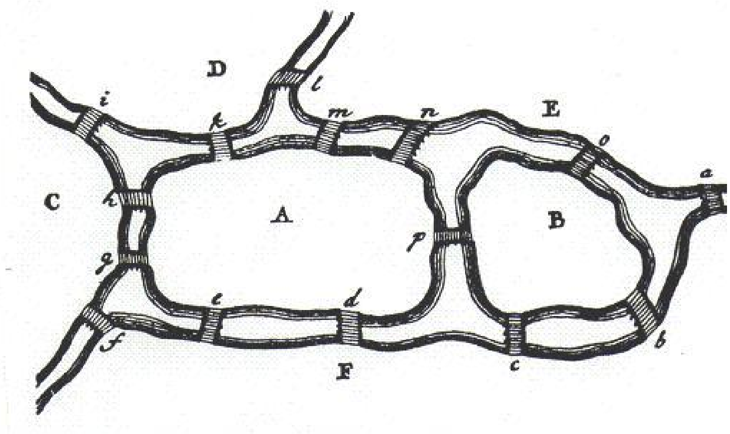

Figura 7: Plano de un río con sus dos islas

En caso afirmativo, marca el recorrido sobre el plano de la figura 7.

¿Se puede realizar un recorrido que empiece y termine en la isla A pasando una sola vez por cada territorio?

19. En un prado hay 6 postes altos y 4 postes bajos. Se quiere unir cada poste alto a todos los postes bajos mediante una línea de cable; pero no los postes altos entre sí, ni los postes bajos entre ellos mismos. ¿Cuántos tramos de cable se necesitan? Cuando se realice la instalación, ¿es posible recorres todos los tramos de cable sin pasar dos veces por el mismo tramo? ¿Es posible marcar un recorrido entre todos los postes a través de los cables, sin pasar dos veces por el mismo poste?

20. Cuatro niños A, B, C y D se tiran unos a otros una pelota y para ello respetan las siguientes reglas (se supone que ninguno se tira la pelota a sí mismo):

    i) A nunca tira a C o D
    ii) B nunca tira a C o A
    iii) C nunca tira a B
    iv) D nunca tira a B

    a) Si A tiene la pelota al empezar, dibuja un diagrama para mostrar los diferentes caminos de la pelota en las 5 primeras jugadas.

    b) Si D no tira nunca a C o B, prueba que C no consigue nunca la pelota.