Estalmat - Andalucía Oriental

…Más triángulos

Pascual Jara y Ceferino Ruiz

20 de octubre de 2007.

1.- La Recta de Euler[1]

Construcción:

En un triángulo cualquiera *ABC*, dibuja el Baricentro *G*, el Ortocentro *H* y el Circuncentro *O*.

- Comprueba que los puntos *G*, *H* y *O* están alineados.
- Comprueba, asimismo, que la distancia *GH* es el doble de la distancia *GO*.

La recta que pasa por *H*, *G* y *O* se llama "Recta de Euler" del triángulo *ABC*.

2.- La Recta de Simson[2] o Recta pedal

Construcción:

- En un triángulo cualquiera *ABC*, dibuja la circunferencia circunscrita con centro en *O*.
- Considera un punto *P* sobre esa circunferencia y, desde *P*, traza las 3 perpendiculares hasta los lados (prolongados si es necesario). Dichas perpendiculares cortarán respectivamente a esos lados en los puntos *Q*, *R* y *S*.
- Comprueba que los 3 puntos *Q*, *R* y *S* están alineados.
- La recta que pasa por *Q*, *R* y *S* se llama "Recta de Simson" del triángulo *ABC* asociada a *P*.
- A los puntos *Q*, *R* y *S* se les llama "pies" de las perpendiculares desde *P* a los lados del triángulo.
- Por eso, a la Recta de Simson asociada a *P* también se le suele llamar "Recta pedal" de *P* del triángulo *ABC*.
- Si *P* coincide con alguno de los vértices, dos de estos pies coinciden con el propio *P* y la otra perpendicular desde *P* sobre el lado opuesto, es la altura desde *P*. Al punto correspondiente, donde cae la altura en el lado puesto, se le llama "pie de altura". La Recta pedal coincide en este caso, con la recta altura.

---

[1] Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza. Murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

[2] Robert Simson nació el 14 de octubre de 1687 en West Kilbride, Ayrshire, Escocia. Murió el 1 de octubre de 1768 en Glasgow, Escocia.

3.- Las Rectas cevianas y el Teorema de Ceva[3]

- En un triángulo cualquiera *ABC*, a las rectas que pasan por uno de los vértices y cortan al lado opuesto (o a su prolongación) se les llama "Rectas cevianas" del triángulo *ABC*.
- Dado un punto cualquiera *P* del plano, que no sea ninguno de los vértices, desde *P* podemos dibujar 3 rectas cevianas, uniendo *P* con cada uno de los vértices; eventualmente, dos de estas rectas pueden coincidir y esto ocurrirá solamente si *P* está sobre alguno de los lados de *ABC*.
- Si *P* no está sobre ninguno de los lados, entonces las 3 rectas cevianas que pasan por *P* y parten de los vértices *A*, *B* y *C*, cortaran a los lados opuestos *a*, *b* y *c* en los puntos *Q*, *R* y *S*, respectivamente. De esta forma, se obtienen seis segmentos:

  BQ y *QC* sobre la recta que contiene al lado *a*;
  CR y *RA* sobre *b*; y *AS* y *SB* sobre *c*.
- Sean $\overline{BQ}$, $\overline{QC}$, $\overline{CR}$, $\overline{RA}$, $\overline{AS}$ y $\overline{SB}$ sus longitudes.

  Comprueba que se verifica:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}\cdot\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}\cdot\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}=1 \qquad [3.1]$$

- El "Teorema de Ceva" establece esta propiedad y su recíproca:
  Sean 3 cevianas desde los vértices ABC de un triángulo que cortan a los lados opuestos respectivamente en los puntos Q, R y S. Las 3 cevianas son concurrentes, es decir, se cortan en un punto, si y solamente si se verifica la expresión [3.1].

Razones entre segmentos

Nota:

- Dado un segmento *AB* y un punto *S* sobre la recta que lo contiene, al cociente *AS/SB* se le conoce como la "razón" en la que *S* divide o corta al segmente *AB*.
- Si el punto *S* coincide con *A*, la razón es *0*.
- Si *S* coincide con *B*, se dice que la razón es infinito.
- Si *S* está entre el punto *A* y el punto *B*, la razón es positiva.
- Mientras que si *S* está fuera del segmento *AB*, la razón se toma negativa.

---

[3] Giovanni Ceva nació el 7 Diciembre de 1647 en Milán, Italia.
Murió el 15 de Junio de 1734 en Mantua, Italia.

4.- El Teorema de Napoleón[4] y el Punto de Fermat[5]

Construcción:

- En un triángulo cualquiera *ABC*, dibuja 3 triángulos equiláteros sobre cada uno de los lados, de modo que no corten al triángulo de partida.
- Tendremos así 3 triángulos equiláteros que notaremos *ABM*, *BCN* y *CAP*, cuyos centros respectivos denotaremos *Q*, *R* y *S*.
- Comprueba que el triángulo *QRS* que forman esos centros es equilátero.
- Este resultado se conoce como "Teorema de Napoleón".

Propiedades curiosas:

- Las 3 circunferencias circunscritas a los e triángulos equiláteros se cortan en un punto *F*, el cuál se denomina "Punto de Fermat.
- Los segmentos *AF*, *BF* y *CF* forman entre si (2 a 2) tres ángulos de 120º.
- El punto de Fermat *F* es el punto del plano cuya suma de distancias a los vértices del triángulo es más pequeña, o punto de mínima distancia a los tres vértices.
- Las rectas *AN*, *BP* y *CM* son 3 cevianas de *ABC* que concurren en *F*.
- Los segmentos *AN*, *BP* y *CM* tienen la misma longitud, es decir:

$$\overline{AN} = \overline{BP} = \overline{CM}$$

También podemos construir los 3 triángulos equiláteros hacia el lado donde se encuentra el triángulo de partida.

- Los centros de estos 3 nuevos triángulos equiláteros construidos hacia el interior forman también un triángulo equilátero. Sería el triángulo de Napoleón interior.
- La diferencia de áreas entre los dos triángulos de Napoleón, construidos hacia el exterior y hacia el interior del triángulo *ABC* es, precisamente, el área del triángulo de partida.

5.- El Triángulo de Morley[6]

Construcción:

- En un triángulo cualquiera *ABC*, dibuja las trisectrices de los ángulos (en cada vértice un par de rectas que dividen al ángulo en 3 partes iguales).

¡Ojo, esta construcción no siempre se puede hacer con regla y compás!

[4] Napoleón Bonaparte nació el 15 de agosto de 1769 en Ajaccio, Córcega, Francia.
Murió el 5 de mayo de 1821 en la Isla de Santa Helena, Reino Unido.

[5] Pierre de Fermat nació el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne, Francia.
Murió el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia.

[6] Frank Morley nació el 9 de septiembre de 1860 en Woodbridge, Suffolk, Inglaterra.
Murió el 17 de octubre de 1937 en Baltimore, Maryland, EE.UU.

- En principio, estas 6 trisectrices se cortan (2 a 2) en 12 puntos, sin contar los vértices.
- Consideremos los 3 puntos *Q*, *R* y *S* donde se cortan los pares de trisectrices adyacentes de vértices contiguos.
- El triángulo *QRS* es equilátero y se le denomina “Triángulo de Morley” del triángulo *ABC*.

6.- La Fórmula de Herón[7]

Sea *ABC* un triángulo cualquiera cuyos lados miden *a*, *b* y *c*. Para calcular su área podemos realizar la siguiente construcción:

- Trazar la circunferencia inscrita que tendrá radio *r*.
- Unir el incentro *I* con los puntos de contacto de la circunferencia con los lados: *Q* sobre el lado *BC*,
  R sobre *CA* y *S* sobre *AB*;
- Unir *I* con lo vértices *A*, *B* y *C* mediante las bisectrices.
- De este modo se descompone nuestro triángulo en 6 triángulos rectángulos: *ASI*, *ISB*, *BQI*, *IQC*, *CRI* e *IRA*.

<u>Observación:</u>

- El área de los triángulos rectángulos es, claramente, la mitad de la del cuadrilátero rectángulo que tiene por lados a los catetos. Por eso, el área de un triángulo rectángulo es mitad del producto de las longitudes de los catetos.
- El área de nuestro triángulo *ABC* es pues, la suma de las áreas de esos 6 triángulos rectángulos.
- Como todos ellos tienen la longitud de un cateto igual a *r*, en la suma podemos sacar factor común ese *r* y, agrupando los otros catetos de 2 en 2, queda que el área es

$$\triangle ABC = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \qquad [6.1]$$

- *a*+*b*+*c* es el perímetro del triángulo ABC. Llamando

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

al semiperímetro, se tiene la expresión del área *ABC* en función del semiperímetro y del radio de la circunferencia inscrita:

$$\triangle ABC = s \cdot r \qquad [6.2]$$

[7] Herón (o Hero) de Alejandría nació hacia el año 10.
Murió hacia el año 70 en Alejandría, Egipto.

- La fórmulas [6.1] y [6.2] permiten calcular el área de un triángulo conociendo los lados y el radio de la circunferencia inscrita, o bien este último y el semiperímetro.
- La "Fórmula de Herón" permite calcular el área de un triángulo *ABC* conociendo solamente las longitudes de los lados *a*, *b* y *c* (y con ellos el semiperímetro *s*).

Esta es:

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad [6.3]$$

En términos de los lados, resulta::

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} \qquad [6.4]$$

7.- Cuadrados de los lados de un triángulo.

En un triángulo cualquiera *ABC*, conviene a veces conocer la longitud de uno de sus lados en función de los otros dos y de algún dato adicional.

Fijemos para esto uno de los vértices, por ejemplo el *A* y obtengamos la longitud *a* del lado opuesto.

- Si el ángulo *A* es recto, *a* será la longitud de la hipotenusa, y *b* y *c* la de los catetos. Tenemos el "Teorema de Pitágoras[8]":

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad [7,1]$$

- Si el ángulo *A* es agudo, tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \qquad [7.2]$$

- Si el ángulo *A* es obtuso, tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \qquad [7.3]$$

donde *m* es la longitud del segmento que une *A* con el pié de altura de *C*.

Observación:

- El Teorema de Pitágoras [7.1] es el caso límite tanto de la fórmula para el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo [7.2], como la del cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso [7.3]. Pues si el ángulo en el vértice *A* es recto, el pie de altura desde *C* coincide con *A* y, por tanto, *m* = 0.

[8] Pitágoras de Samos nació en la Isla de Samos hacia el año -582.
Murió aproximadamente en -507.