Invariantes. El principio del palomar

1. Invariantes

En un problema, un invariante es una característica, normalmente un número, o alguna propiedad de un número, que no varía cuando se modifica el problema a uno más sencillo. La búsqueda de invariantes puede emplearse para resolver problemas o para demostrar que determinadas situaciones son imposibles en otros

Problema 1 (0's y 1's)**.** Tenemos seis 0's y cinco 1's escritos en una línea. Efectuamos 10 veces la siguiente operación: Se seleccionan dos de estos números y se tachan. Si son iguales, escribimos un nuevo 0, si son distintos, escribimos un nuevo 1. ¿Puedes demostrar que el número que quede al final es independiente de cómo escojan las parejas de números?

Problema 2 (Sectores)**.** Tenemos un círculo dividido en seis sectores. Sobre cada sector del círculo tenemos una ficha. Se permite elegir dos fichas cualesquiera y moverlas a sectores adyacentes. ¿Es posible, repitiendo esta operación, acabar con todas las fichas en el mismo sector?

Problema 3 (Sumas)**.** Se comienza con los números del 1 al 20 escritos en fila. Se permite tachar dos de estos números, a y b, y añadir el valor $a+b-1$. ¿Puedes demostrar que el número que queda después de repetir esta operación 19 veces no depende del orden en que elijamos los números? ¿Cuál es el resultado que nos queda? ¿Y si en vez de sustituir a y b por $a+b-1$ los cambiamos por $ab+a+b$, qué número nos queda?

Problema 4 (Árboles y pájaros)**.** Hay seis árboles colocados en fila, a 10 metros cada uno del siguiente. Sobre cada árbol tenemos posado un pájaro. Si un pájaro vuela desde un árbol hasta otro, entonces automáticamente otro pájaro volará la misma distancia en la dirección opuesta (no necesariamente entre los mismos árboles). ¿Es posible que en algún momento se encuentren todos los pájaros sobre el mismo árbol? ¿Qué ocurre si en vez de seis árboles tenemos 7?

Problema 5 (Caras y cruces)**.** Sobre cada casilla de un tablero 8×8 tenemos colocada una moneda. Una de las monedas está con la cara hacia arriba, mientras que todas las demás muestran la cruz. Mediante operaciones que consistan en darle la vuelta a todas las monedas de una misma fila o columna, ¿es posible obtener una posición en la que todas las monedas muestren cara, o todas cruz? ¿Qué ocurre si consideramos un tablero 3×3? ¿Y, de nuevo en el tablero 8×8, si en vez de una moneda con cara, tenemos cuatro, colocadas en las esquinas?

Problema 6 (Camaleones)**.** En la Isla Croma existen camaleones de 3 colores: Rojos, Amarillos y Verdes. Cuando dos camaleones de diferente color se cruzan, ambos cambian simultáneamente de al tercer color. Si en un momento dado tenemos 13 camaleones rojos, 15 amarillos, y 17 verdes, ¿es posible que después de algún número encuentros todos sean del mismo color?

Problema 7 (Dodecágono)**.** Los vértices de un dodecágono regular están marcados con los números 1 o -1, de tal manera que uno de los vértices está marcado con un -1, y los restantes con un 1. Si permitimos cambiar el signo de cualesquiera tres vértices consecutivos, ¿es posible conseguir desplazar el -1 al vértice adyacente al inicial? ¿Y si permitimos cambiar el signo de cualesquiera 4 vértices consecutivos? ¿Y de cada 5?

2. Coloraciones

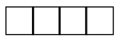
Muchos problemas de invariantes pueden resolverse usando un tipo particular invariante, denominado “*coloración*”. La noción de coloración se comprende muy bien con el siguiente ejemplo:

Ejemplo. En el ajedrez indio, que se juega sobre un tablero 10×10, existe una pieza especial llamada el *camello*, que se mueve de manera parecida al caballo del ajedrez, pero desplazándose tres casillas en una dirección, y a continuación una casilla en la dirección perpendicular. ¿Es posible mover un camello desde una casilla hasta otra adyacente?

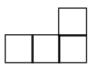
Solución: La respuesta es no. Si consideramos el tablero 10×10 como si estuviese coloreado igual que el del ajedrez, es fácil ver que el camello se mueve siempre sobre casillas del mismo color. La casilla adyacente a una casilla dada es siempre del color opuesto, por lo que tal posición no es alcanzable.

Problema 8.

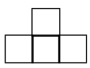
(a) Probar que un tablero de ajedrez no puede recubrirse (sin solapamientos) usando 4 piezas de tamaño 4×1, esto es, de la forma



y una pieza de la forma



(b) Probar que un tablero 10×10 no puede recubrirse con piezas de la forma



Problema 9. Demostrar que un tablero de tamaño 102×102 no puede recubrirse con piezas rectangulares de tamaño 1×4.

Problema 10. Un tablero rectangular se recubre sin solapamientos con piezas rectangulares de tamaño 1×4 y piezas cuadradas de tamaño 2×2. Entonces, retiramos las piezas que cubrían el tablero, reemplazando uno de los cuadrados 2×2 por un nuevo rectángulo 1×4. Demostrar que con estas nuevas piezas no es posible recubrir el tablero.

Problema 11. ¿Es posible hacer pasar a un caballo de ajedrez por todas las casillas de un tablero rectangular de tamaño $4 \times N$, de manera que pase por cada casilla una única vez y vuelva de regreso al cuadrado inicial?

3. El principio del palomar

El enunciado del *principio del palomar* es tan simple que hay quien lo toma por una broma:

> Si $n+1$ palomas se posan en n nidos, entonces en alguno de los nidos hay al menos dos palomas.

Una versión alternativa lo llama *principio de la caja*:

> Si en n cajas se distribuyen $n+1$ bolas, entonces en alguna caja hay al menos dos bolas.

La demostración de este principio es muy fácil por el método de reducción al absurdo:

> Si no hubiese más de una bola en ninguna de las cajas, el número total de bolas sería como máximo n y no $n+1$.

A pesar de su simplicidad este principio nos permite resolver problemas que en principio no parecen fáciles.

Problema 12. Probar que entre trece personas hay dos que han nacido el mismo mes.

Problema 13. Probar que en un grupo de personas hay dos de ellas que tienen el mismo numero de conocidos en el grupo.

Problema 14. Probar que en Granada habitan dos personas que nacieron exactamente el mismo día.

Problema 15. Probar que existen dos potencias de tres que dan igual resto módulo 100.

Problema 16. Probar que en un grupo de seis personas o bien hay tres que se conocen entre sí, o bien hay tres que cada uno no conoce a los otros dos.