PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
S.A.E.M. THALES

ESTALMAT
Estímulo del Talento Matemático
Prueba de selección
2 de junio de 2012

Nombre:……………………………………………………………..

Apellidos:…………………………………………………………..

Localidad:………………………………………………………… **Provincia**: ………………………………........

Fecha de nacimiento: ……./……./..…. **Lugar de nacimiento:** ………………………………

Teléfonos (fijo y móvil)...

Sexo: Hombre ☐ Mujer ☐ **Centro:** Público: ☐ Privado/Concertado: ☐

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

1. **En primer lugar debes leer todos los problemas y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.**

2. **Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza, por favor, el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco (en la carpeta tienes dos y si necesitas más, puedes pedirlas, pero recuerda que en ellas debes escribir también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja).**

   De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos problemas distintos. Al final debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

3. **Queremos conocer no solamente tus soluciones sino, sobre todo, tus propios caminos hacia la solución. Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describirlas de la manera más clara posible. Para ello bastará unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales o incompletas de los problemas propuestos.**

   Además tenemos una curiosidad, ¿cómo te has enterado de esta convocatoria?

   ☐ A través de tu Centro.

   ☐ A través de la *Olimpiada Thales*.

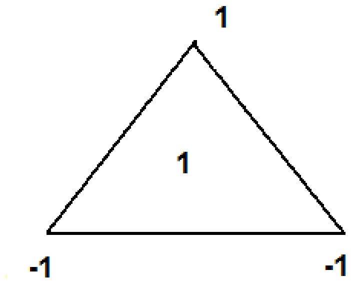
   ☐ A través de otros medios. Indícalos:

   ……………………………………………………………..

Tienes dos horas y media en total.
¡Te deseamos mucho éxito!

1. NÚMEROS Y POLÍGONOS

En los vértices de un triángulo pones un 1 o un -1 y en el interior del triángulo pones el producto de los números que has puesto en los vértices. Luego sumas todos los números que tienes, los de los vértices y el del interior. En el caso de la figura la suma es



$$-1 -1 +1+1 = 0.$$

a) ¿Qué otros valores puede tener esta suma? ¿Qué distribuciones dan cero?

-4, 0, 0, +4

Las distribuciones que dan cero son: 1, 1, -1 y 1, -1, -1

b) ¿Qué valores puede tener la suma si en lugar de un triángulo consideras un cuadrado?

5, 1, 1, -3, -3

c) Si consideras un polígono con un número par de lados ¿puede ser la suma cero? ¿Por qué?

NO, porque, en todos los casos, el número de 1 y de -1 a sumar tienen distinta paridad.

d) ¿En qué polígonos con un número impar de lados puede ser la suma cero? ¿Por qué?

Para que la suma sea cero la distribución de 1 y de -1 debe verificar: $| n(1) – n(-1) | = 1$.

Las posibilidades son éstas:

<table>
<tr><th>1</th><th>-1</th><th>producto</th><th>suma</th><th>Nº de vértices</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2k</td><td>2k-1</td><td>-1</td><td>0</td><td>4k-1</td></tr>
<tr><td>2k+1</td><td>-1</td><td>-2</td><td>4k+1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2k+1</td><td>2k</td><td>1</td><td>2</td><td>4k+1</td></tr>
<tr><td>2k+2</td><td>1</td><td>0</td><td>4k+3 ~ 4k-1</td></tr>
</table>

Entonces, los polígonos con un número impar de lados en los que puede darse la suma cero son los de la forma 4k-1. Y no es posible en los impares de la forma 4k+1.

2. ROBOT TRAMOL

TRAMOL es un robot que puede subir escaleras. En cada paso puede subir o bien un escalón, o bien dos escalones o bien tres escalones. Cuando en un paso sube un escalón decimos que está en modo A; cuando con un paso sube dos escalones decimos que está en modo B y cuando con un paso sube tres escalones decimos que está en modo C. Por ejemplo:

- Si sube dos escalones podrá hacerlo: AA o B.
- Si sube tres escalones podrá hacerlo: AAA, AB, BA o C.
  (Observa que no es lo mismo AB que BA).

a) Si tiene que subir 4 escalones, le puedo enviar el mensaje AC, o bien ABA etc. Escribe los distintos mensajes que le puedo enviar. (Recuerda que ABA es distinto de AAB).

AAAA, ABA, BAA, CA.
AAB, BB. (Siete)
AC.

b) Supongamos que tiene que subir 5 escalones. Describe todos los mensajes posibles que le puedo enviar.

AAAAA, ABAA, BAAA, CAA.
AABA, BBA.
ACA.
(Trece)
AAAB, ABB, BAB, CB.

AAC, BC.

c) Si, en total, tiene que subir 6 escalones ¿cuántos mensajes distintos le puedo enviar?

13 + 7 + 4 = 24.

d) Si tiene que subir 8 escalones, ¿cuántos mensajes distintos le puedo enviar?

Primero calculamos los mensajes posibles para subir 7 escalones:

24 + 13 + 7 = 44.

Y ahora: 44 + 24 + 13 = 81.

3. RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

En el plano se consideran rectas y circunferencias, todas diferentes entre sí. Se pide determinar el máximo número posible de puntos de intersección cuando se consideran:

a) dos rectas y dos circunferencias.

11

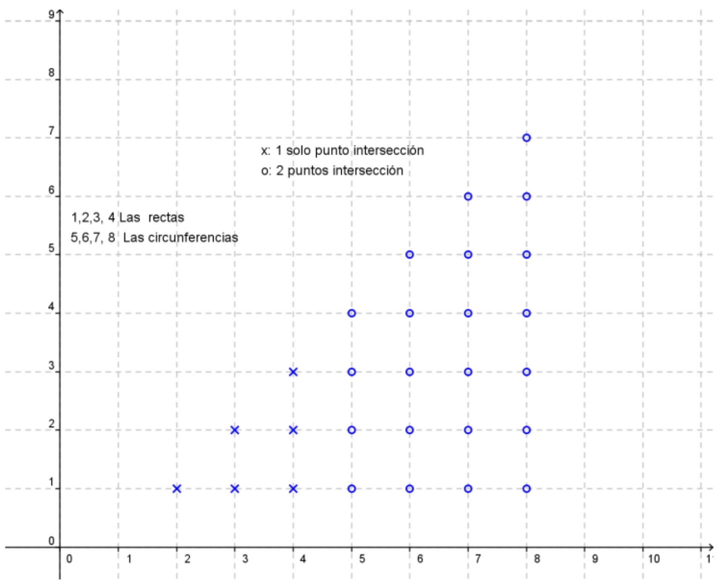
b) tres rectas y tres circunferencias.

27

c) veinte rectas y veinte circunferencias.

1370

d) A la vista de lo anterior, ¿podrías establecer una fórmula que diera el número máximo de puntos de intersección que se pueden producir cuando se consideran *n* rectas y *n* circunferencias en el plano?



Si consideramos todos los puntos señalados en la retícula (sea con **x**, sea con **o**), estaríamos calculando $C_{2n,2}$. Los contamos todos a dos intersecciones y luego les quitamos los que solo tienen una (los **x**) que son $C_{n,2}$.

Total: $2 \cdot C_{2n,2} - C_{n,2}$ = $(7n^2 – 3n) / 2$

4. SUMA DE NÚMEROS IMPARES

Algunos números se pueden expresar como suma de números positivos impares consecutivos. Por ejemplo 64=13+15+17+19, pero también 64=31+33.

a) Escribe 120 como suma de impares consecutivos, de dos maneras distintas.

59 + 61

27+29+31+33

15+17+19+21+23+25

3+5+7+9+11+13+15+17+19+21

b) Sabemos que 441=7 · 63 y que 441 se descompone en 7 sumandos impares consecutivos:

441= 57+59+61+63+65+67+69

Escribe otra descomposición de 441 en suma de 9 sumandos impares consecutivos.

41+43+45+47+49+51+53+55+57

c) ¿Puedes poner 250 como suma de impares consecutivos? ¿Por qué?

La condición necesaria y suficiente para que un número ***N*** descomponga en ***p*** sumandos impares consecutivos es que exista ***q≥p***, con la misma paridad que ***p***, tal que ***N=p*q.***

Como $250= 2^* 5^3$, no existe ninguna descomposición en dos factores con la misma paridad. Por tanto, 250 no puede descomponerse en una suma de sumandos impares consecutivos.

d) Escribe todas las descomposiciones posibles en sumandos impares consecutivos del número 168.

3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25

23+25+27+29+31+33

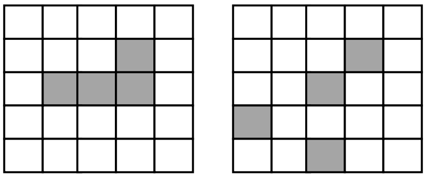
39+41+43+45

83+85

Por la condición necesaria y suficiente del apartado anterior, no existen más descomposiciones.

5. EL MUNDO DE LAS CÉLULAS

Disponemos de una **malla 5x5** formada por “células”. Las que están en *blanco* están **muertas**, las que están en *gris* **vivas**. Veamos dos ejemplos de malla con células vivas, el primer ejemplo muestra un organismo pluricelular con cuatro células y el otro muestra cuatro células independientes u organismos unicelulares:



Un organismo es pluricelular si sus células, dos o más, están unidas por uno de sus lados.
Cuando las células no comparten lado son unicelulares.

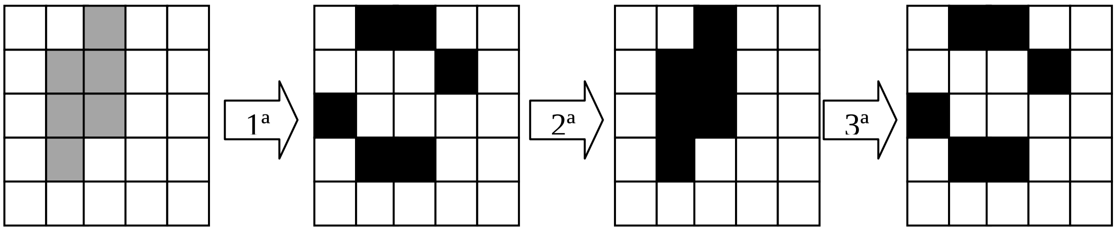
Dos células son vecinas si tienen en común un lado o un vértice.

El estado de la malla evoluciona por **turnos o transiciones**. Las células “**vivas**” o “**muertas**” cambian en cada turno siguiendo las **REGLAS** siguientes:

1. Una célula “muerta” con exactamente 3 células vecinas vivas "nace" (al turno siguiente estará viva).

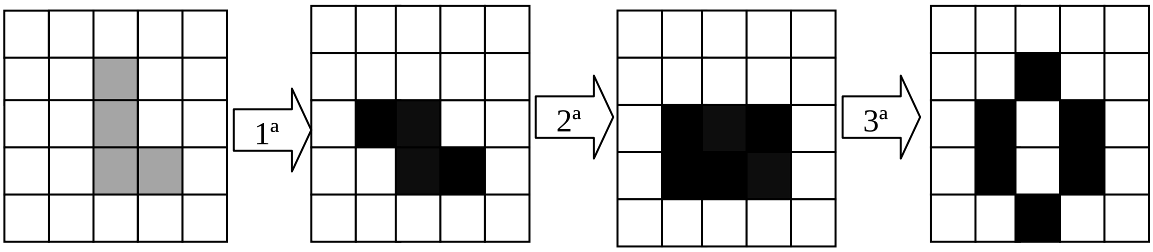
2. Una célula “viva” con 2 ó 3 células vecinas vivas sigue “viva”, en otro caso “muere”.

a) ¿Cuáles serían las dos primeras transiciones o turnos en el siguiente caso?



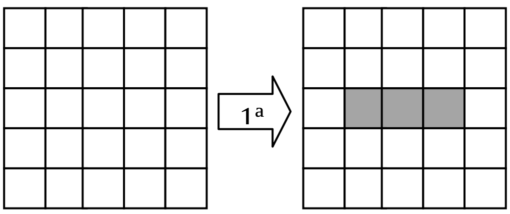
Las posiciones son alternadas. Después de la 10ª = después de la 2ª.

b) Si partimos de la siguiente situación, ¿cómo serán las siguientes transiciones?

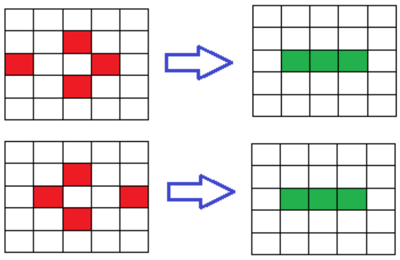


La última posición es estacionaria.

c) Organismos unicelulares pueden generar uno pluricelular. ¿Podrías encontrar una combinación de organismos unicelulares, con el número más pequeño posible de células, que generen el organismo pluricelular que se muestra?



Soluciones óptimas:



Otras soluciones con mayor número de células: