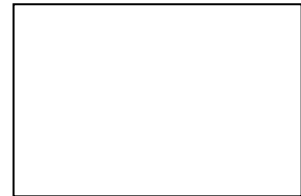




ESTALMAT
Estímulo del Talento Matemático
Prueba de selección
12 de junio de 2010



Nombre:.....
Apellidos:.....
Localidad:..... **Provincia:**

Fecha de nacimiento:/...../199... **Teléfonos:**.....

Sexo: Hombre Mujer **Centro:** Público: Privado/Concertado:

**Información importante que debes leer
antes de comenzar a trabajar**

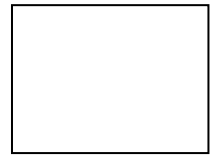
- 1. En primer lugar debes leer todos los problemas y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.**
 - 2. Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza, por favor, el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco (en la carpeta tienes dos y si necesitas más, puedes pedir las, pero recuerda que en ellas debes escribir también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja).**
- De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos problemas distintos. Al final debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.**
- 3. Queremos conocer no solamente tus soluciones sino, sobre todo, tus propios caminos hacia la solución. Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describirlas de la manera más clara posible. Para ello bastará unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales o incompletas de los problemas propuestos.**

Además tenemos una curiosidad, ¿cómo te has enterado de esta convocatoria?

- A través de tu Centro.
 A través de la *Olimpiada Thales*.
 A través de otros medios. Indícalos:

**Tienes dos horas y media en total.
¡Te deseamos mucho éxito!**

1. HALLANDO COORDENADAS



Fíjate en la siguiente tabla y considera que es ilimitada hacia abajo y hacia los lados.

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7
1							1						
2						2	3	4					
3					5	6	7	8	9				
4				10	11	12	13	14	15	16			
5			17	18	19	20	21	22	23	24	25		
6		26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
7	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

Cada número queda definido por la fila y la columna en la que se encuentra. Por ejemplo, el número 1 está en la fila 1 y en la columna 1, así diremos que sus coordenadas son (1, 1). El número 2 está en la fila 2 y columna -1, por tanto sus coordenadas son (2, -1). Las coordenadas de 4 son (2, 2), las de 18 son (5, -3), etc.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del número 48? ¿Y cuáles son las de 1001? ¿Y las de 895? Explica tu razonamiento.

$$48 = (7,6); \quad 1001 = (32, 9); \quad 895 = (30, 25)$$

b) Encuentra el número cuyas coordenadas son (40, 30) y el de coordenadas (50, -10). Explica tu razonamiento.

$$(40, 30) = 1590; \quad (50, -10) = 2441$$

c) Hay coordenadas, como (2, -4) (ver figura), que no representan ningún número. Si tenemos (100, **b**), ¿qué valores puede tomar **b** para que esas coordenadas representen un número de la tabla?

A la fila del 100 le corresponden las siguientes columnas:

Desde el 1 hasta el 100 y desde el -1 hasta el -99, luego el 'dominio' de **b** es $\{-99, \dots, 100\} - \{0\}$.

En general, (a, b) representa un número si b pertenece a $\{1-a, \dots, a\} - \{0\}$.



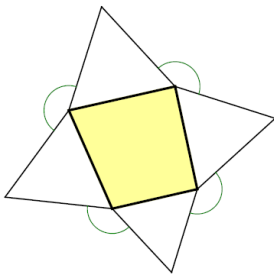
2. TRIÁNGULOS

Para resolver este problema es conveniente saber cuánto suman los ángulos interiores de un polígono. Ponemos algunos resultados en esta tabla:

Polígono	Suma
Triángulo	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$
Cuadrilátero	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
Pentágono	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$
Hexágono	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$
Heptágono	$5 \times 180^\circ = 900^\circ$
Octógono	$6 \times 180^\circ = 1080^\circ$
Polígono de n lados	$(n-2) \times 180^\circ$

Se tienen polígonos como los de las siguientes figuras y sobre cada uno de sus lados, y hacia el exterior, se dibujan triángulos equiláteros.

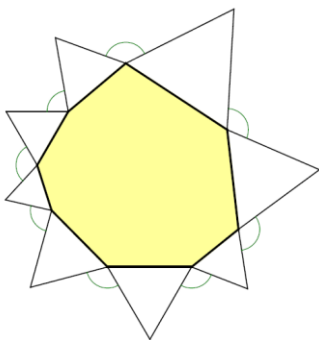
- a) Supongamos que el polígono es un cuadrilátero. ¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos que se forman entre cada dos triángulos equiláteros contiguos? (Ver figura).



Al sumar todos los ángulos que se forman en cada vértice, se suman, además de los marcados, los ángulos interiores del cuadrilátero y dos del triángulo equilátero por cada uno.

O sea, $S + 360 + 8 \cdot 60 = 4 \cdot 360$. $S = 600$

- b) Sea ahora un polígono de ocho lados y también dibujamos triángulos equiláteros sobre sus lados hacia el exterior del polígono. ¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos que se forman entre cada dos triángulos equiláteros contiguos?



Este apartado se resuelve igual que el anterior:

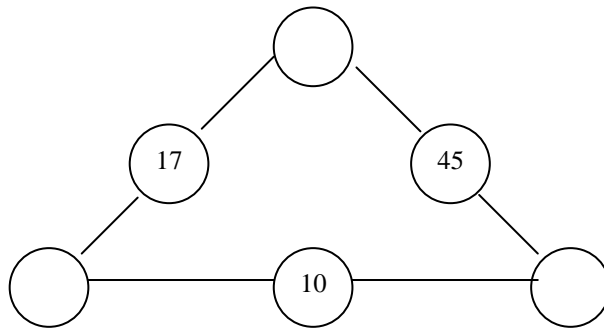
$S + 1080 + 16 \cdot 60 = 8 \cdot 360$. $S = 840$

- c) Y si el polígono tuviera n lados, ¿cuánto valdría la suma de esos ángulos?

$$S + (n-2) \cdot 180 + 2n \cdot 60 = n \cdot 360 \implies S = 60(n+6).$$

3. NÚMEROS EN UN TRIÁNGULO

Se considera el triángulo numérico de la figura:



- a) Rellena con números enteros positivos los círculos en blanco de forma que la suma de los tres números de cada lado del triángulo sea la misma.

Soluciones: Por ejemplo (40, 5, 12); hay que tener cuidado con el orden porque otra solución es (1, 36, 8) y no va situada como la anterior.

- b) Si encuentras una solución, explica cómo podrías encontrar otra. ¿Cuántas soluciones diferentes crees que existen?

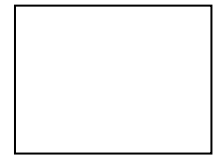
Si (a, b, c) es una solución con constante k , $(a+1, b+1, c+1)$ es una solución con constante $k+2$.

En general, si (a, b, c) es una solución con constante k ,

$(a+h, b+h, c+h)$ es una solución de constante $k+2h$.

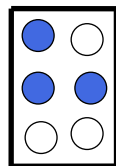
- c) Encuentra una solución donde la suma de cada lado sea 80.

Solución: (49, 14, 21)

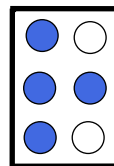


4. BRAILLE

El Braille es un sistema de lectura táctil que utilizan las personas con deficiencias visuales graves. En Braille cada símbolo está representado por una combinación de puntos en relieve colocados sobre un rectángulo que tiene 3 filas y 2 columnas. En las siguientes figuras se representan dos de estos símbolos:



Letra h



Letra r

- a) ¿Cuántos símbolos de Braille utilizan sólo dos puntos?

$$6 \times 5 / 2 = 15$$

- b) Hay tantos símbolos de dos puntos como de cuatro. Razona por qué.

Complementario: cada símbolo con dos puntos da opción a usar uno con cuatro y recíprocamente.

- c) ¿Cuántos hay que utilizan tres puntos?

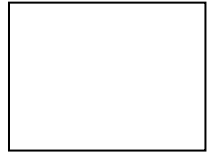
$$20$$

- d) ¿Cuántos símbolos se pueden generar en total en este sistema de lectura? Razona tu respuesta.

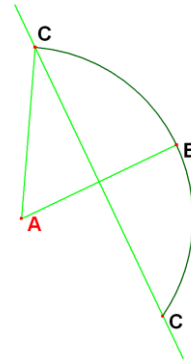
Sólo falta coger los puntos de 1 en 1 (hay 6 símbolos), de 5 en 5 que es lo mismo (ver apartado b) y cogerlos todos (sólo hay 1).

$$\text{En total: } 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

5. POSICIONES

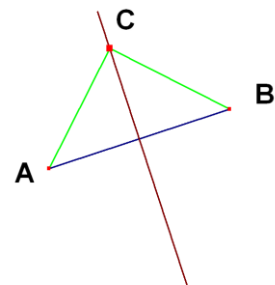


- a) Los puntos **A** y **B** son dos vértices de un **triángulo equilátero**. Dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C** y explica cómo has hecho el dibujo.



El punto C debe estar en la mediatriz a una distancia de los extremos igual a la longitud del segmento AB (compás con centro en A y radio AB).

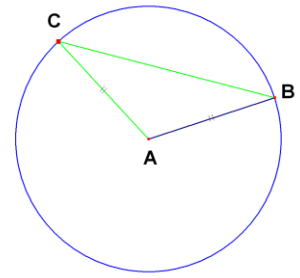
- b) Los puntos **A** y **B** son los vértices del lado desigual de un **triángulo isósceles**. Dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C** y explica cómo has hecho el dibujo.



C tiene que estar en la mediatriz del segmento AB.

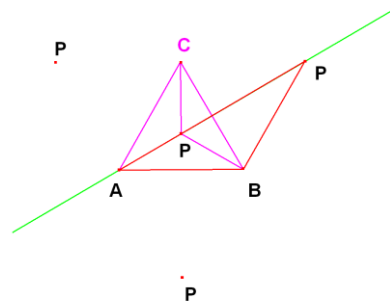
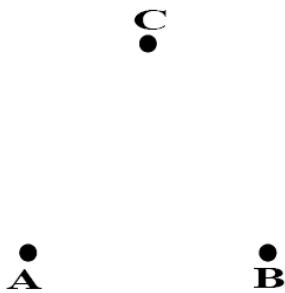
Sigue al dorso

c) Los puntos **A** y **B** son los vértices de uno de los lados iguales de un **triángulo isósceles**. Dibuja todas las posiciones donde se puede situar el tercer vértice **C** y explica cómo has hecho el dibujo.



En este caso el punto C puede estar en cualquier punto de la circunferencia de centro A y radio AB o de centro B y radio BA

d) Los puntos **A**, **B** y **C** son los tres vértices de un **triángulo equilátero**. Señala las posiciones donde podrías colocar un punto **P** de forma que los triángulos **PAB**, **PBC** y **PCA** sean **isósceles**. Explica cómo has hecho el dibujo.



Dependiendo de que el lado del triángulo equilátero sea el lado desigual o uno de los lados iguales del isósceles se obtienen las cuatro posiciones que se muestran en la figura.

Una es el Circuncentro y las otras son los simétricos de los vértices respecto de los lados opuestos.