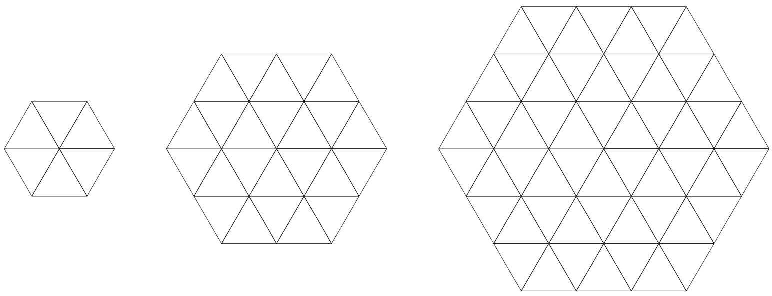
1. EL ZOOLÓGICO

Un zoológico tiene forma hexagonal con celdas que son triángulos equiláteros de 10 metros de lado, como en las figuras. Por seguridad no puede haber dos animales en una misma celda y si una celda está ocupada ninguna de las que comparte un lado con ella puede estarlo.



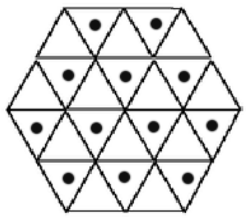
a) ¿Cuál es el número máximo de animales que puede haber en un zoológico de 20 metros de lado? Haz una distribución de los mismos siguiendo las reglas dadas.

b) Si el hexágono mide 50 metros de lado, ¿cuántos animales se pueden poner en el zoológico como máximo?

c) Tenemos ahora 1000 animales salvajes. ¿Cuánto medirá el lado del hexágono más pequeño que permite construir un zoológico en el que quepan todos?

SOLUCIÓN

a) 12 animales. Por ejemplo, ésta es una de las posiciones.



b) Si el lado del hexágono abarca n triángulos, el hexágono se puede siempre dividir en tres rombos con capacidad para n^2 animales cada uno, luego el total de animales es 3 n^2. Si la longitud del lado, en metros, es L, el número de animales será $3\cdot (L/10)^2$. Así pues, para $L=50$, el máximo número de animales es *75*.

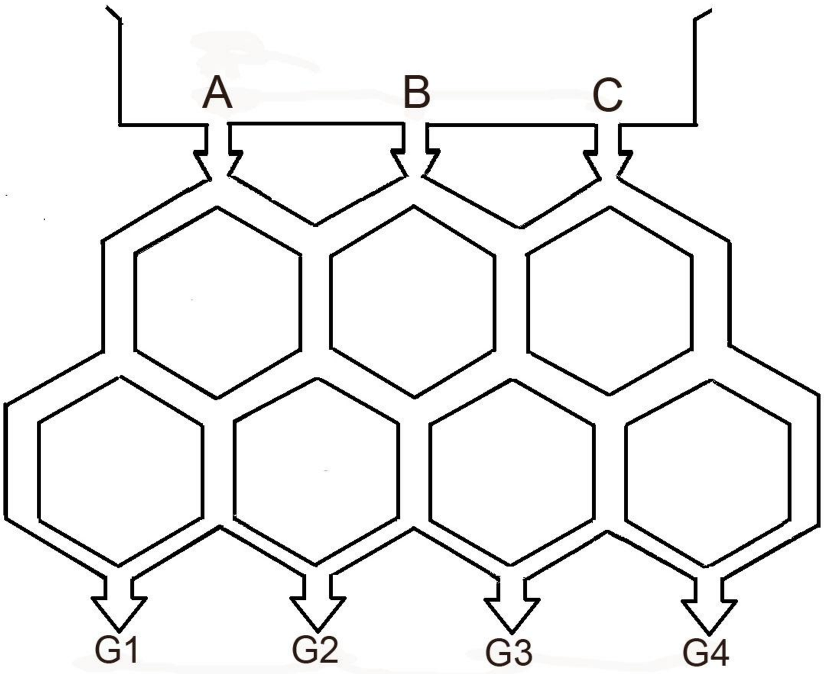
c) La solución es $3n^2>=1000$, *o sea*, $n^2>=333{,}33$;es decir,
$n>=19$, $L>=190m$.

2. AGUA POTABLE EN EL CAMPAMENTO

En un campamento de verano se dispone de una máquina potabilizadora. El agua no potable se introduce por el *recipiente de entrada* y se distribuye uniformemente por los orificios A, B y C. En las siguientes bifurcaciones el agua se reparte la mitad a cada lado.

Planta 1

Planta 2



a) La máquina potabilizadora de la figura tiene 2 plantas. Si se vierten 1200 litros de agua en el *recipiente de entrada,* ¿cuántos litros se recogerán en cada uno de los grifos G1, G2, G3 y G4?

b) Supongamos ahora que la máquina tiene 3 plantas y se vierten 4800 litros de agua no potable. ¿Cuántos litros se recogerán en cada uno de los grifos de salida G1, G2, G3, G4 y G5?

c) Se han vertido 1920 litros de agua en una máquina cuyo tamaño desconocemos. Se sabe que por el primer grifo de salida, el G1, se han recogido 45 litros. ¿Cuál es el número de plantas que tiene esta máquina?

SOLUCIÓN

a) G1=250 l. G2=350 l. G3=350 l. G4=250 l.

b) El modelo sería éste:

	1 1 1	$\mathbf{2^0}$
Planta 1	**1 2 2 1**	$\mathbf{2^{-1}}$
Planta 2	**1 3 4 3 1**	$\mathbf{2^{-2}}$
Planta 3	**1 4 7 7 4 1**	$\mathbf{2^{-3}}$
	……………………..	

La columna de la izquierda son factores que multiplican a los números de su fila. Así, la última fila resulta ser:

200	800	1400	1400	800	200

Para cerrar la última planta primero hay una bifurcación (salvo en los extremos) y después una suma de tuberías por parejas:

200 800 1400 1400 800 200

200 400 400 700 700 700 700 400 400 200

600 1100 1400 1100 600

G1 G2 G3 G4 G5

c) Según el modelo anterior, si el total de agua que entra es *3x,* la cantidad de agua que sale por el grifo G1 de la planta *n* es:

$$x/2^n + (n + 1)\, x/2^{n+1}$$

En nuestro caso, $x=640$. Entonces,

$$640/2^n + (n + 1)\, 640/2^{n+1}=45$$

Haciendo algunas operaciones, esto se simplifica y queda:

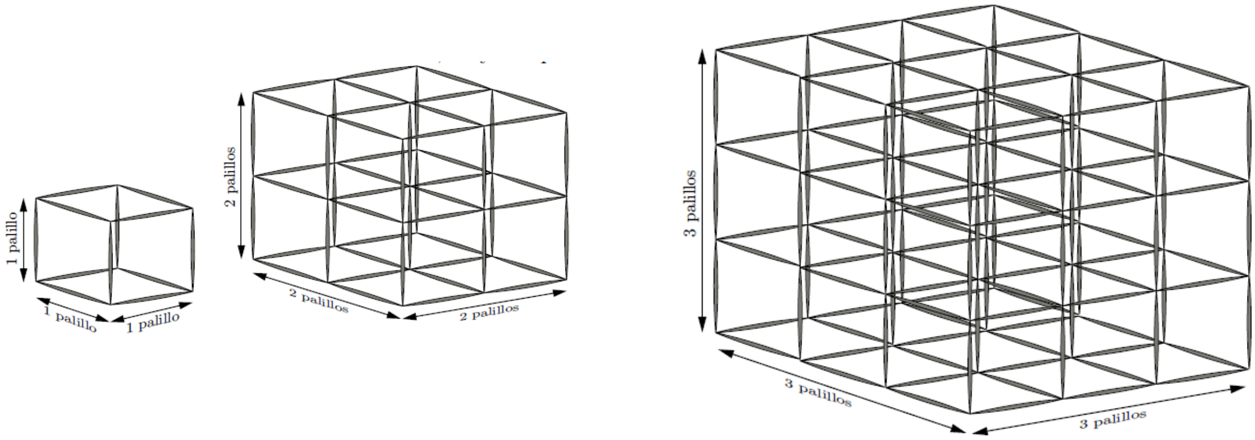
$$2^{6-n}\,(n + 3) = 9$$

Cuya solución es $n=6$.

En el modelo anterior, los números no indican los litros que salen de la planta *n*, sino los litros que pasan por los lados verticales de los hexágonos de la planta *n*, que después tienen que bifurcarse y sumarse para salir de la planta.

3. REDES DE PALILLOS EN EL ESPACIO

En la figura se ven tres redes hechas de palillos iguales. Las redes son cúbicas de arista uno, dos y tres palillos respectivamente y, para hacer cada una de ellas se han necesitado 12, 54 y 144 palillos respectivamente.



a) ¿Cuántos palillos se necesitan para hacer una red cúbica con 5 palillos en cada arista? ¿Por qué?

b) ¿Cuántos palillos se necesitan para hacer una red cúbica con 10 palillos en cada arista? Explica tu razonamiento.

c) ¿Se puede hacer una red cúbica formada exactamente por 2011 palillos? Si la respuesta es «*sí*», ¿cuántos palillos tiene esa red en cada arista? Si la respuesta es «*no*», explica por qué no se puede.

d) Si disponemos de 7500 palillos, ¿cuál es el lado de la red cúbica más grande que se puede construir?

SOLUCIÓN

a) En la cara superior hay $5 \times 6 + 5 \times 6 = 2 \times 5 \times 6$ palillos

Total palillos horizontales = $(2 \times 5 \times 6) \times 6$

Total palillos verticales = $5 \times 6 \times 6$

Total palillos = $3 \times 5 \times 6 \times 6 = 540$

b) Siguiendo el mismo método, será:

Total palillos = *3 x 10 x 11 x 11 = 3630*

c) El número de palillos siempre es múltiplo de *3*. Por lo tanto, con *2011* palillos NO se puede hacer una red cúbica.

d) Ponemos los datos que tenemos en una tabla,

1	12
2	54
3	144
4	
5	540
10	3630
n	$3n(n+1)^2$

Con 7500 palillos hay que buscar el número *n* que aproxime la expresión:

$3n(n+1)^2 = 7500$; $n(n+1)^2 = 2500$ Empezamos a probar con n=11

$11 \cdot 12^2 = 1584$
$12 \cdot 13^2 = 2028$
$13 \cdot 14^2 = 2508$, que se pasa. Luego el mayor cubo es el que tiene 12 palillos por arista.

4. JUEGO CARA Y CRUZ

Mafalda y Felipe tiran una moneda y juegan a cara y cruz. Cada vez que sale *cara* Mafalda gana un punto y cada vez que sale *cruz* Felipe gana un punto. Para controlar el juego hay un marcador en el que inicialmente pone **(0,0)**. Si sale cara se suma un punto al número de la izquierda y si sale cruz se suma un punto al número de la derecha.

Cuando el marcador ponga (3,2) es porque han salido 3 caras y 2 cruces, pero no sabemos en qué orden han salido las caras y las cruces.

a) Supongamos que el marcador pone (3,2). ¿De cuántas maneras distintas se ha podido llegar a ese resultado?

Ahora deciden jugar de la siguiente manera: el juego se termina si uno de los dos tiene 4 puntos, o bien si, teniendo ambos al menos un punto, uno de ellos tiene una ventaja de 2 puntos sobre el otro.

b) ¿Puede darse el resultado (1,4)? ¿Por qué? ¿Cuáles son los resultados finales en los que el vencedor es Felipe?

Deciden de nuevo cambiar las reglas del juego, éste se termina si uno de los dos tiene 6 puntos, o bien uno de ellos tiene al menos 4 puntos y una ventaja de 3 puntos sobre el otro.

c) Escribe todos los resultados en los que se acaba el juego. ¿Cuántos hay?

SOLUCIÓN

a) El desarrollo del juego es el siguiente:

(1,0) (0,1)

(2,0) (1,1) (0,2)

(3,0) (2,1) (1,2)

(3,1) (2,2)

(3,2)

Contando el número de caminos, resulta:

1 1

1 2 1

1 3 3

4 6

10

b) El resultado (1,4) no puede darse porque tiene que venir del (0,4) o del (1,3), que ya son resultados finales. Los cuatro resultados favorables a Felipe son: (0,4) , (2,4) , (3,4) y (1,3)

c) (4,0) , (4,1) , (5,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5)
y los simétricos, en total hay *12* pares finales.

Observemos que el resultado (6,2) no puede darse porque procede de (6,1), que tampoco puede darse o del (5,2), que ya es un resultado final.

5. TABLA LOCA DE NÚMEROS

En la siguiente tabla se escriben los números con la siguiente pauta:

- En la primera fila colocamos el 2.
- En la segunda fila colocamos los dos impares consecutivos siguientes a 2.
- En la tercera fila ponemos tres pares consecutivos, los que siguen al último impar escrito en la fila anterior.
- En la cuarta fila cuatro impares consecutivos, los que siguen al último par escrito en la fila anterior.
- Y seguimos así sucesivamente.

2							
3	5						
6	8	10					
11	13	15	17				
18	20	22	24	26			

a) Completa tres filas más de la tabla.
b) ¿Cuál es el primer número de la fila vigésimo primera (21ª)?
c) ¿Se encuentra el año actual, número 2011, en esta tabla? Tanto si es que "sí" como si es que "no", explica por qué.
d) El año de nacimiento de Isaac Newton, 1642, está en la tabla. ¿En qué fila y en qué columna? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN

a) Ver tabla adjunta.

2							
3	5						
6	8	10					
11	13	15	17				
18	20	22	24	26			
27	29	31	33	35	37		
38	40	42	44	46	48	50	
51	53	55	57	59	61	63	65

b) La fila 20 termina con el número $20^2+1=401$

Entonces la fila 21 comienza por **402**.

c) La raíz cuadrada de 2011 es,

aproximadamente, 44,8. La fila 44 termina en el 1937. La fila 45 empieza en el 1938 y termina en el 2026. Ahí tendría que estar el 2011, pero esta fila es de números pares y el 2011 es impar. Luego, el 2011 NO está en la tabla.

d) Hacemos lo mismo de nuevo. La raíz cuadrada de 1642 es, aproximadamente, 40,5. La fila 40 termina en el 1601. La fila 41 empieza en 1602 y termina en 1682. Ahí debe estar el 1642 y lo está porque es par y es una fila de pares. ¿En qué columna?

Restamos 1642 – 1602 = 40. La mitad, 20, luego está en la columna **21** de la fila **41**.