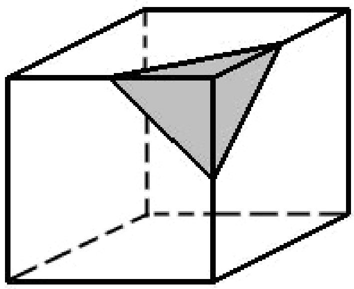
1. CUBO CORTADO

a) Uniendo los puntos medios de las aristas de un cubo, como se ve en la figura, se obtiene una pirámide triangular por cada vértice. Quitando estas pirámides ¿qué polígonos forman las caras del cuerpo que resulta? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has llegado a los resultados.

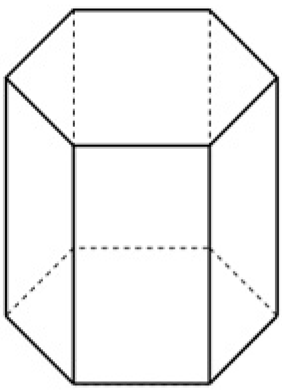


a) 8 triángulos equiláteros y 6 cuadrados. V=12, C=14, A=24.

b) Ahora vamos a hacer una variación sobre el problema anterior.
En vez de tomar los puntos medios, elegimos los puntos sobre las aristas situados a un tercio de distancia de los vértices, resultando, al unirlos, unas pirámides más pequeñas y que no se tocan entre ellas. Si recortamos estas pirámides ¿qué polígonos forman ahora las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has obtenido las respuestas.

b) 8 triángulos equiláteros y 6 octógonos no regulares. V=24, C=14, A=36.

c) Si en vez de un cubo consideramos el prisma hexagonal regular de la figura (las bases son hexágonos regulares) y procedemos como en el apartado a) ¿qué polígonos forman en este caso las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has llegado al resultado.



c) 12 triángulos isósceles, 6 rombos y 2 hexágonos. V=18, C=20, A=36.

2. LAS PARTIDAS

Tres amigos A, B y C acuerdan jugar un torneo de tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Se sabe además que cada uno perdió una partida en el orden siguiente: primero perdió el jugador A, luego lo hizo el jugador B y, finalmente, el jugador C.

Un ejemplo de cómo podría haberse desarrollado la partida se muestra en la siguiente tabla:

	Cantidad de euros del JUGADOR A	**Cantidad de euros del JUGADOR B**	**Cantidad de euros del JUGADOR C**
Inicio de la Partida	70	40	20
Después de que pierda el jugador A	10	80	40
Después de que pierda el jugador B	20	30	80
Después de que pierda el jugador C	40	60	30

a) Completa en la siguiente tabla las situaciones que se tendrían después de cada partida, en este otro supuesto de dinero inicial.

	Cantidad de euros del JUGADOR A	**Cantidad de euros del JUGADOR B**	**Cantidad de euros del JUGADOR C**
Inicio de la Partida	60	30	20
Después de que pierda el jugador A	10	60	40
Después de que pierda el jugador B	20	10	80
Después de que pierda el jugador C	40	20	50

Con las mismas condiciones de orden de pérdida de cada partida responde a los siguientes apartados:

b) Se sabe que al final del torneo cada uno tenía 24 €, ¿cuánto dinero tenía cada jugador al comienzo?

c) Se conoce que en otro torneo de las mismas características, el jugador C comenzó con 20 € y al final acabaron todos con la misma cantidad de dinero ¿cuánto tenía cada jugador al comienzo y con cuánto acabaron?

d) En otro torneo sucedió que se tuvo que suspender en la tercera partida ya que el jugador C no pudo hacer frente a los pagos correspondientes. Describe esta situación con un ejemplo.

e) Dicen que en una ocasión acabaron todos con la misma cantidad de dinero con la que comenzaron. ¿Es posible que se dé esta situación? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, pon un ejemplo que lo ilustre.

b)

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	39	21	12
Después de que pierda el jugador A	6	42	24
Después de que pierda el jugador B	12	12	48
Después de que pierda el jugador C	24	24	24

c)

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	65	35	20
Después de que pierda el jugador A	10	70	40
Después de que pierda el jugador B	20	20	80
Después de que pierda el jugador C	40	40	80 – x = x → x=40

d)

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	50	20	5
Después de que pierda el jugador A	25	40	10
Después de que pierda el jugador B	50	5	20
Después de que pierda el jugador C	Basta que haya gran diferencia entre lo que tengan al inicio A o B y C		

e)

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	x	y	z
Después de que pierda el jugador A	x/4	2y	2z
Después de que pierda el jugador B	x/2	y/2	4z
Después de que pierda el jugador C	x	y	z

Aunque es de esperar que los chicos lo resuelvan sin utilizar álgebra, he aquí una solución algebraica:

$3x/4 = y + z \qquad 3y/2 = x/4 + 2z \qquad 3z = x/2 + y/2$

$3x = 4y + 4z \qquad 6y = x + 8z \qquad 6z = x + y$

cuya solución es: $x = 2y = 4z$, es decir, las ternas $(4z, 2z, z)$.

Si z = 20 entonces

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	80	40	20
Después de que pierda el jugador A	20	80	40
Después de que pierda el jugador B	40	20	80
Después de que pierda el jugador C	80	40	20

Si z = 15 entonces

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	60	30	15
Después de que pierda el jugador A	15	60	30
Después de que pierda el jugador B	30	15	60
Después de que pierda el jugador C	60	30	15

3. EL JUEGO DE LAS PIEDRAS

Se trata de un juego para dos jugadores, Ana y Pedro. Para jugar sólo se necesitan unas cuantas piedras.

Las reglas son muy sencillas: Cada jugador, en su turno puede coger 1 ó 2 piedras. Gana el jugador que retira la última piedra que, evidentemente, puede ir acompañada.

Se pide:

a) Si hay 5 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si es la primera jugadora en retirar piedras, esté segura de ganar.

b) Si hay 20 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si ella es la primera jugadora en retirar piedras, esté segura de ganar.

c) ¿Qué pasa si en el montón, al comenzar a jugar, hay veintiuna piedras? ¿Y si hay veintidós? ¿Y si, en general, hay un número cualquiera?

d) ¿Qué pasa si en el montón hay veinte piedras pero en vez de retirar sólo una o dos, se pueden coger una, dos o tres?

a) Si Ana coge 2 piedras, se asegura ganar la partida.

b) Ana debe jugar manteniendo siempre un número de piedras que sea múltiplo de 3, cosa que puede conseguir siempre en este caso, pues se empieza con 20 piedras. A partir de ahí deberá coger el complemento a 3 de las que coja Pedro.

c) Sabiendo los dos jugar, si hay 21, perderá. Si hay 22, ganará. En general, perderá siempre que el número de piedras sea múltiplo de 3. La secuencia es:

Nº de piedras	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Jugador que sale...	G	G	P	G	G	P	G	G	P	...

d) Estudiando la nueva situación:

Ana debe intentar siempre mantener un número de piedras que sea múltiplo de 4. A partir de ahí deberá coger el complemento a 4 de las que coja Pedro.

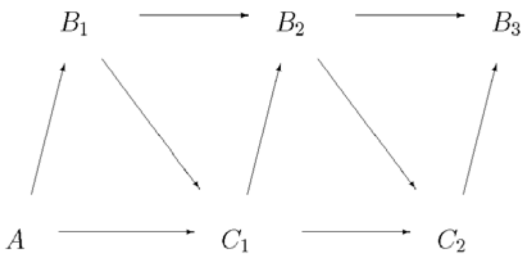
La secuencia ahora es:

Nº de piedras	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
Jugador que sale...	G	G	G	P	G	G	G	P	G	G	G	P	...

Así pues, con veinte piedras, perderá.

4. CAMINOS

Se tiene la siguiente estructura:

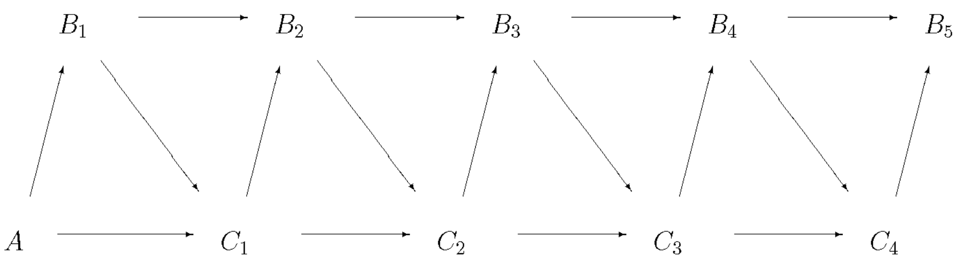


De un punto a otro se consideran los caminos siguiendo la dirección de las flechas. Observa que de A a B_1 hay un solo camino y que de a A a C_1 hay dos caminos: AC_1 y AB_1C_1.

a) Describe los caminos que hay de A a B_2 AB_1B_2 , AC_1B_2 , $AB_1C_1B_2$

b) ¿Cuántos caminos hay de A a B_3? 8

Incrementamos el número de flechas de la estructura hasta obtener la siguiente:



c) Piensa una estrategia que te permita calcular el número de caminos de A a cada uno de los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 , B_5... ¿Cuántos caminos hay de A a B_6?

Destino	B_1	C_1	B_2	C_2	B_3	C_3	B_4	C_4	B_5	C_5	B_6	...
Nº de caminos...	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	

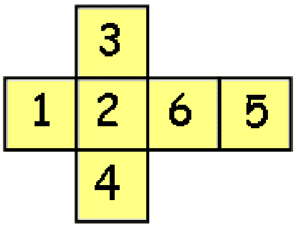
d) Para cualquier número natural n ¿cómo se calcularía el número de caminos que hay desde A hasta B_n?

Para calcular los caminos que hay hasta B_n hay que saber los que hay hasta B_{n-1} y hasta C_{n-1} y sumar ambos números. Es decir:

Caminos a B_n = Caminos a B_{n-1} + Caminos a C_{n-1}

5. DADOS GIGANTES

Tenemos ocho dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Cada uno de los dados tiene el desarrollo plano siguiente:



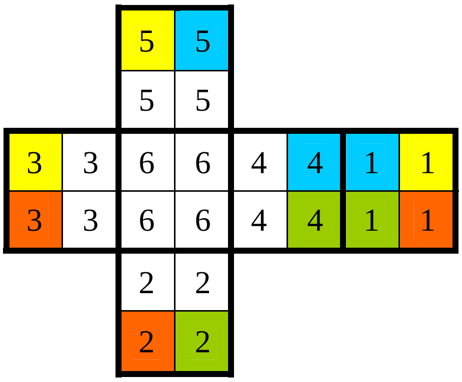
Con los ocho dados construimos un cubo, que llamaremos “Gran Dado”

a) Si sumamos todos los números de las seis caras del “Gran Dado” ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?

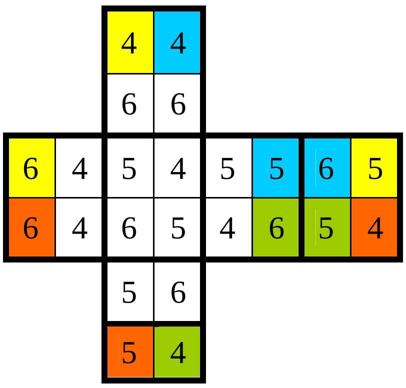
Poniendo los dados en cada esquina de forma que se vean las caras con mayor numeración: 4, 5 y 6. Entonces, la suma será: $8x4 + 8x5 + 8x6 = 120$.

b) En el dado que se muestra, la suma de los puntos de dos caras opuestas es siempre la misma. ¿Podemos construir un “Gran Dado” que tenga también esta propiedad? Es decir, si miramos dos caras opuestas, la suma de todos los puntos que hay en esas caras es siempre la misma. Describe cómo has llegado al resultado.

Una solución (los colores señalan las esquinas que no se ven juntas):



Otra solución, en la que no sólo la suma de las caras opuestas es la misma, sino que todas las caras suman lo mismo, 20 en este caso (es un ejemplo del máximo del primer apartado):



¿Hay más ejemplos como éste?

c) ¿Podemos construir un “Gran Dado” de forma que la suma de los puntos que hay en cada una de sus seis caras sean los números consecutivos 19, 20, 21, 22, 23 y 24? Razona tu respuesta

No, porque hemos dicho que la puntuación máxima es 120 y aquí saldría 129.

Ahora tenemos veintisiete dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Con los veintisiete dados construimos un cubo más grande que el anterior, le llamaremos “Mega Dado”

d) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del “Mega Dado”, ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?

Poniendo

En las ocho esquinas: 6, 5, 4 $\longrightarrow$ 15x8 = 120.

En los doce que enseñan dos caras: 6, 5 $\longrightarrow$ 11x12 = 132.

En los seis que enseñan una sola cara: 6 $\longrightarrow$ 6x6 = 36.

TOTAL = 288.

6. RECTÁNGULOS

Disponemos de una cuadrícula en la que hemos dibujado un cuadrado de 8 x 8 (es decir de 8 unidades de lado). En la misma cuadrícula recortamos aparte cuatro rectángulos de 3 x 5.

a) Razona dibujando, cómo podrías cubrir parte del cuadrado de 8 x 8 con los 4 rectángulos, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.

b) Busca todas las parejas de números naturales (a , b) que cumplan que a + b = 8 (como por ejemplo (3 , 5)) y en cada caso explica cómo puedes colocar los cuatro rectángulos de lado a y b sobre el cuadrado de 8 x 8, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.

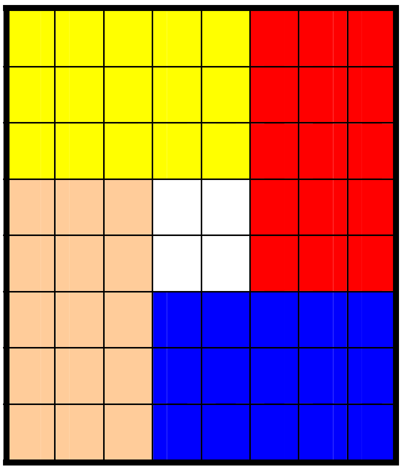
c) Pensando en la zona que queda por cubrir en cada caso ¿puedes encontrar alguna característica que cumpla la suma de las áreas de los cuatro rectángulos respecto al área total del cuadrado de 8 x 8?

d) Crees que se cumpliría la misma propiedad en el caso de un cuadrado de 9 x 9 y los cuatro rectángulos de lados que sumen 9?

e) Sin dibujarlos, explica con cuántas parejas diferentes de números naturales (a , b) que sumen 99 podrías colocar los cuatro rectángulos sobre un cuadrado de 99 x 99, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.

f) Pon un ejemplo en el que se vea que no siempre es posible colocar cuatro rectángulos iguales sobre un cuadrado (sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos) aunque la suma de las áreas de los cuatro rectángulos sea menor que el área del cuadrado.

a)



b) (1,7) , (2,6) , (3,5) y (4,4). Se pueden colocar.

c)

Parejas	Área cubierta	Área sin cubrir
(1,7)	28	$36 = 6^2$
(2,6)	48	$16 = 4^2$
(3,5)	60	$4 = 2^2$
(4,4)	64	$0 = 0^2$

Si la pareja es (a,b), lo que sobra es $(b-a)^2$.

d)

parejas	Área cubierta	Área sin cubrir
(1,8)	32	$81-32 = 49 = 7^2$
(2,7)	56	$81-56 = 25 = 5^2$
(3,6)	72	$81-72 = 9 = 3^2$
(4,5)	80	$81-80 = 1 = 1^2$

Si la pareja es (a,b), lo que sobra es $(b-a)^2$.

e) (1,98) , (2,97) , (3,95) , … , (49,50). Son 49 rectángulos distintos.

f) No se pueden colocar 4 rectángulos de 1x9 sobre el cuadrado 8x8, a pesar de que la suma de los 4 sería 36 < 64.