PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

S.A.E.M. THALES

Estímulo del Talento Matemático

Prueba de selección
2 de junio de 2007

Nombre:..

Apellidos:...

Fecha de nacimiento:..

Localidad:.. **Provincia**: ....

Teléfonos de contacto:..

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

1. **En primer lugar debes leer todos los problemas y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.**

2. **Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza, por favor, el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco (en la carpeta tienes dos y si necesitas más, puedes pedirlas, pero recuerda que en ellas debes escribir también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja).**

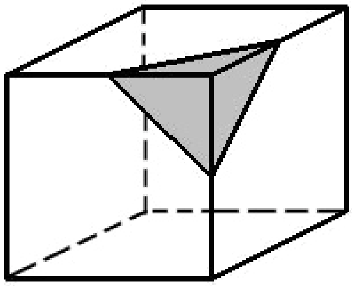
   De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos problemas distintos. Al final debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

3. **Queremos conocer no solamente tus soluciones sino, sobre todo, tus propios caminos hacia la solución. Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describirlas de la manera más clara posible. Para ello bastará unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales o incompletas de los problemas propuestos.**

Tienes dos horas y media en total.
¡Te deseamos mucho éxito!

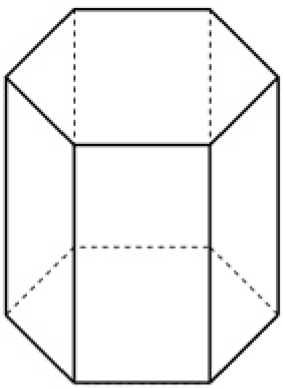
1. CUBO CORTADO

a) Uniendo los puntos medios de las aristas de un cubo, como se ve en la figura, se obtiene una pirámide triangular por cada vértice. Quitando estas pirámides ¿qué polígonos forman las caras del cuerpo que resulta? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has llegado a los resultados.



b) Ahora vamos a hacer una variación sobre el problema anterior.
En vez de tomar los puntos medios, elegimos los puntos sobre las aristas situados a un tercio de distancia de los vértices, resultando, al unirlos, unas pirámides más pequeñas y que no se tocan entre ellas. Si recortamos estas pirámides ¿qué polígonos forman ahora las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has obtenido las respuestas.

c) Si en vez de un cubo consideramos el prisma hexagonal regular de la figura (las bases son hexágonos regulares) y procedemos como en el apartado a) ¿qué polígonos forman en este caso las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has llegado al resultado.



(Puedes escribir al dorso)

2. LAS PARTIDAS

Tres amigos A, B y C acuerdan jugar un torneo de tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Se sabe además que cada uno perdió una partida en el orden siguiente: primero perdió el jugador A, luego lo hizo el jugador B y, finalmente, el jugador C.

Un ejemplo de cómo podría haberse desarrollado la partida se muestra en la siguiente tabla:

	Cantidad de euros del JUGADOR A	**Cantidad de euros del JUGADOR B**	**Cantidad de euros del JUGADOR C**
Inicio de la Partida	70	40	20
Después de que pierda el jugador A	10	80	40
Después de que pierda el jugador B	20	30	80
Después de que pierda el jugador C	40	60	30

a) Completa en la siguiente tabla las situaciones que se tendrían después de cada partida, en este otro supuesto de dinero inicial.

	Cantidad de euros del JUGADOR A	**Cantidad de euros del JUGADOR B**	**Cantidad de euros del JUGADOR C**
Inicio de la Partida	60	30	20
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

Con las mismas condiciones de orden de pérdida de cada partida, responde a los siguientes apartados (puedes utilizar las plantillas que hay al dorso):

b) Se sabe que al final del torneo cada uno tenía 24 €, ¿cuánto dinero tenía cada jugador al comienzo?

c) Se conoce que en otro torneo de las mismas características, el jugador C comenzó con 20 € y al final acabaron todos con la misma cantidad de dinero ¿cuánto tenía cada jugador al comienzo y con cuánto acabaron?

d) En otro torneo sucedió que se tuvo que suspender en la tercera partida ya que el jugador C no pudo hacer frente a los pagos correspondientes. Describe esta situación con un ejemplo.

e) Dicen que en una ocasión acabaron todos con la misma cantidad de dinero con la que comenzaron. ¿Es posible que se dé esta situación? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, pon un ejemplo que lo ilustre.

(Al dorso tienes más cuadros para practicar)

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida			
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida			
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida			
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida			
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida			
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida			
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

3. EL JUEGO DE LAS PIEDRAS

Se trata de un juego para dos jugadores, Ana y Pedro. Para jugar sólo se necesitan unas cuantas piedras.

Las reglas son muy sencillas: Cada jugador, en su turno puede coger 1 ó 2 piedras. Gana el jugador que retira la última piedra que, evidentemente, puede ir acompañada.

Se pide:

a) Si hay 5 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si es la primera jugadora en retirar piedras, esté segura de ganar.

b) Si hay 20 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si ella es la primera jugadora en retirar piedras, esté segura de ganar.

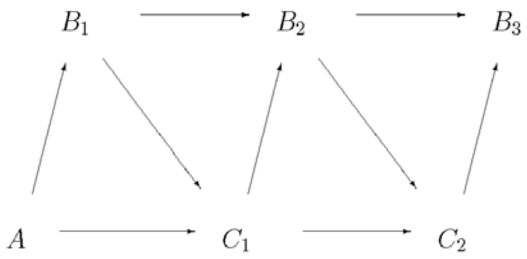
c) ¿Qué pasa si en el montón, al comenzar a jugar, hay veintiuna piedras? ¿Y si hay veintidós? ¿Y si, en general, hay un número cualquiera?

d) ¿Qué pasa si en el montón hay veinte piedras pero en vez de retirar sólo una o dos, se pueden coger una, dos o tres?

(Puedes escribir al dorso)

4. CAMINOS

Se tiene la siguiente estructura:

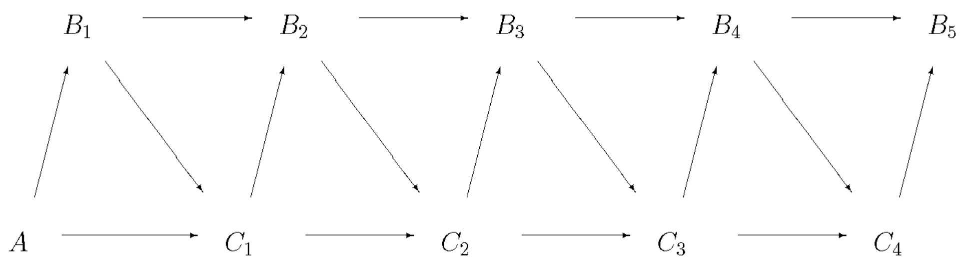


De un punto a otro se consideran los caminos siguiendo la dirección de las flechas. Observa que de A a B_1 hay un solo camino y que de a A a C_1 hay dos caminos: AC_1 y AB_1C_1.

a) Describe todos los caminos que hay de A a B_2.

b) ¿Cuántos caminos hay de A a B_3?

Incrementamos el número de flechas de la estructura hasta obtener la siguiente:



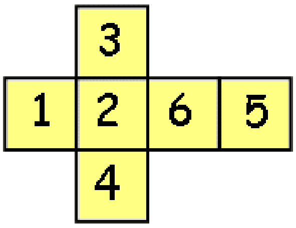
c) Piensa una estrategia que te permita calcular el número de caminos de A a cada uno de los puntos B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, ... ¿Cuántos caminos hay de A a B_6?

d) Para cualquier número natural n ¿cómo se calcularía el número de caminos que hay desde A hasta B_n?

(Puedes escribir al dorso)

5. DADOS GIGANTES

Tenemos **ocho** dados iguales con las caras numeradas del 1 al 6. Cada uno de los dados tiene el desarrollo plano siguiente:



Con los **ocho** dados construimos un cubo, que llamaremos "**Gran Dado**"

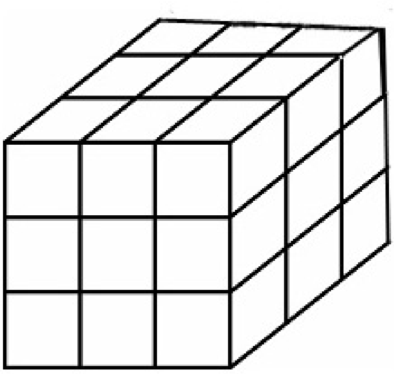
a) Si sumamos todos los números de las seis caras del "Gran Dado", ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?

b) En el dado que se muestra, la suma de los puntos de dos caras opuestas es siempre la misma. ¿Podemos construir un "Gran Dado" que tenga también esta propiedad? Es decir, si miramos dos caras opuestas, la suma de todos los puntos que hay en esas caras es siempre la misma. Describe cómo has llegado al resultado.

c) ¿Podemos construir un "Gran Dado" de forma que la suma de los puntos que hay en cada una de sus seis caras sean los números consecutivos 19, 20, 21, 22, 23 y 24? Razona tu respuesta

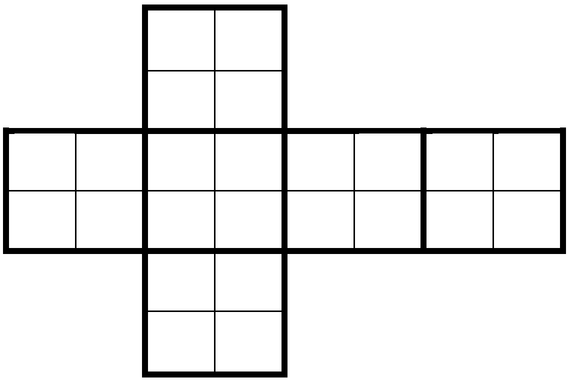
Ahora tenemos **veintisiete** dados iguales con las caras numeradas del 1 al 6. Con los veintisiete dados construimos un cubo más grande que el anterior, le llamaremos "**Mega Dado**"

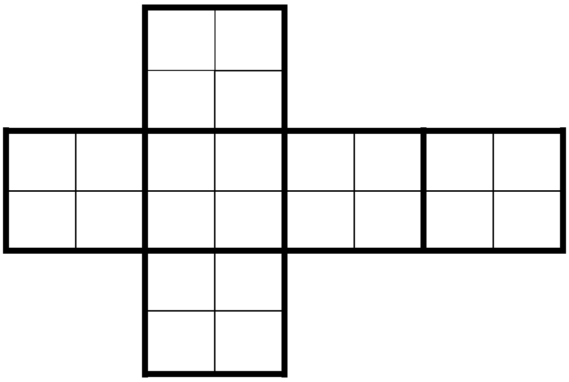
d) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del "**Mega Dado**", ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?

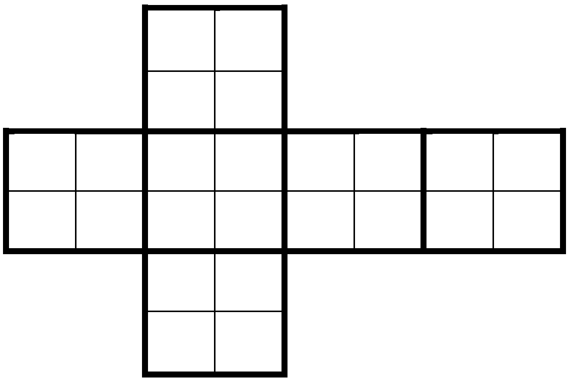


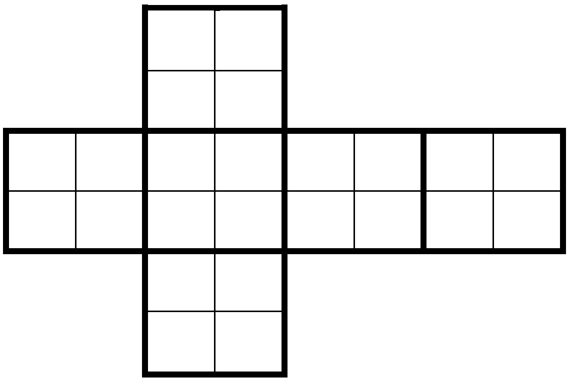
Mega Dado

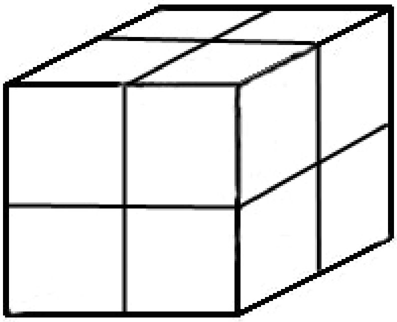
(Tienes al dorso plantillas del Gran Dado para practicar)

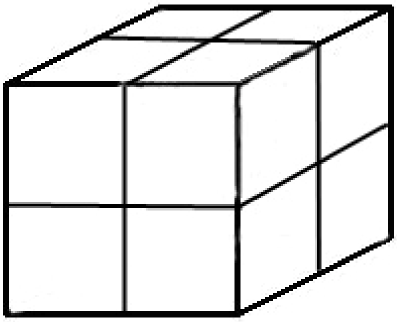


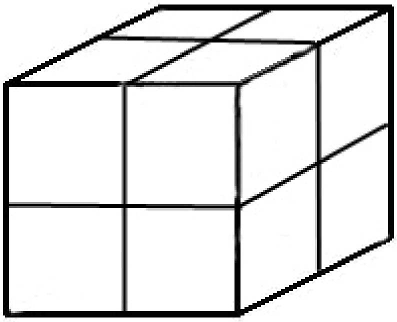


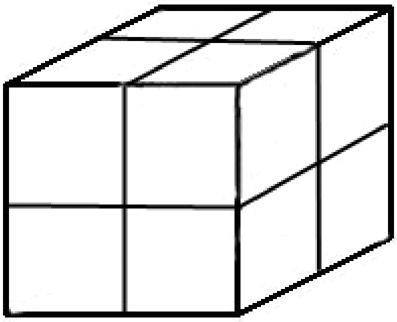


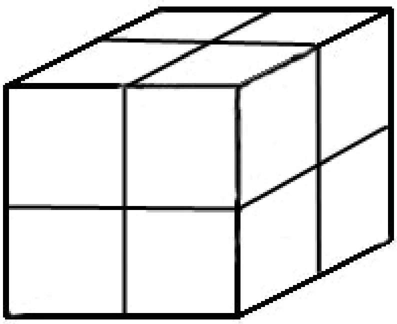












6. RECTÁNGULOS

Disponemos de una cuadrícula en la que hemos dibujado un cuadrado de 8 x 8 (es decir, de 8 unidades de lado). En la misma cuadrícula recortamos aparte cuatro rectángulos de 3 x 5.

a) Razona dibujando, cómo podrías cubrir parte del cuadrado de 8 x 8 con los 4 rectángulos, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.

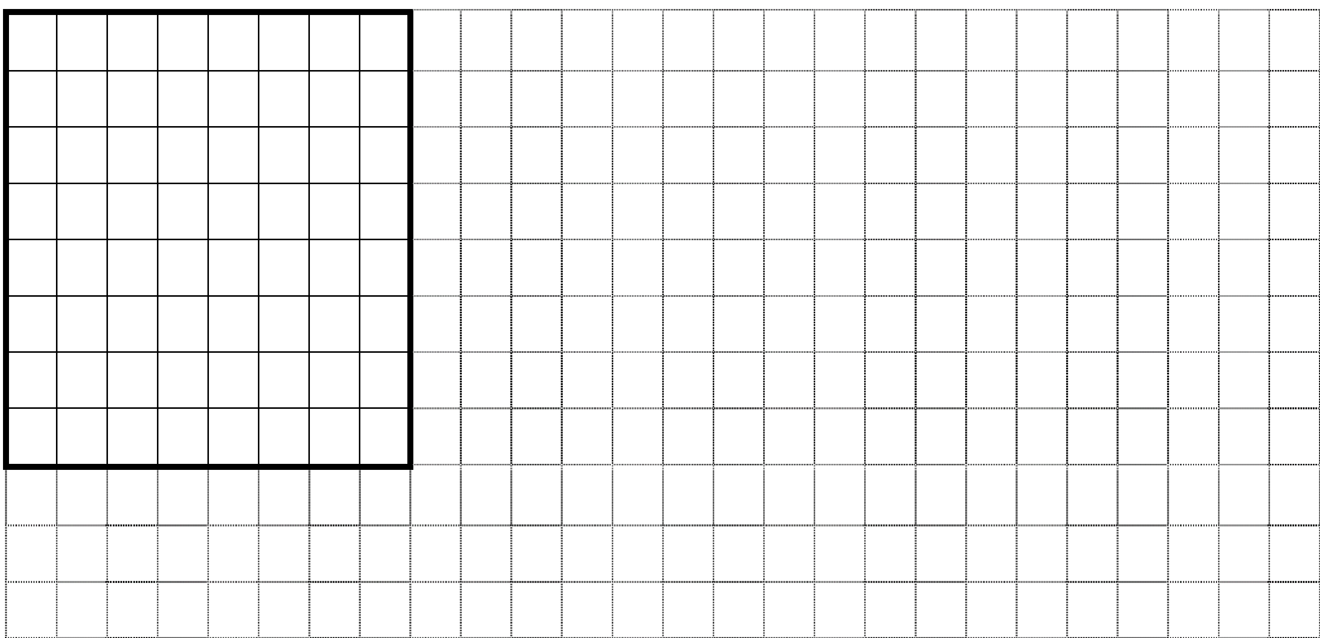
b) Busca todas las parejas de números naturales (a , b) que cumplan a + b = 8 (como por ejemplo (3 , 5)) y en cada caso explica cómo puedes colocar los cuatro rectángulos de lados a y b sobre el cuadrado de 8 x 8, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.

c) Pensando en la zona que queda por cubrir en cada caso ¿puedes encontrar alguna característica que cumpla la suma de las áreas de los cuatro rectángulos respecto al área total del cuadrado de 8 x 8?

d) Crees que se cumpliría la misma propiedad en el caso de un cuadrado de 9 x 9 y los cuatro rectángulos de lados que sumen 9?

e) Sin hacer el dibujo, explica con cuántas parejas diferentes de números naturales (a , b) que sumen 99 podrías colocar los cuatro rectángulos sobre un cuadrado de 99 x 99, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.

f) Pon un ejemplo en el que se vea que no siempre es posible colocar cuatro rectángulos iguales sobre un cuadrado (sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos) aunque la suma de las áreas de los cuatro rectángulos sea menor que el área del cuadrado.



(Al dorso tienes más cuadros para practicar)