1. TARJETAS NUMERADAS.

Alex y Bea tienen 10 tarjetas numeradas con los números 1, 2, 3,... 10. Juegan a un juego en el que uno de ellos debe usar **tres tarjetas** para obtener la suma que diga su compañero.

Por ejemplo, si Álex dice: 6, entonces Bea debe encontrar tres tarjetas que sumen 6. En este caso Bea tiene una única posibilidad; debería escoger necesariamente las tarjetas 1, 2, 3.

a) Bea dice: 7. ¿Qué tarjetas puede escoger Álex?

a) Vamos comprobando con esquemas:

1 { 2 → 4
3 → 3 ×
4 → 2 → Sería igual que 124.
5 → 1 ×
6 → 0 }
A partir de aquí no contamos porque no tenemos una carta 0.

2 { 3 → 2 ×
4 → 1 × (Ya la pusimos)
5 → 0 }

3 { 4 → 0 × A partir de aquí todo se pasa así que podemos dejar de comprobar

1-2-4

b) Quitamos cinco de las diez tarjetas y Álex dice: 8. Bea se da cuenta entonces de que puede sumar el número 8 con dos tríos distintos de tarjetas. ¿Qué tarjetas hemos quitado?

b) Si estuvieran todas las tarjetas:

1 { 2 → 5 ✓
3 → 4 ✓
4 → 3 ×
5 → 2 ×
6 → 1 ×
7 → 0 }
Se repiten.

2 { 3 → 3 ×
4 → 2 ×
5 → 1 × (Ya la pusimos)
6 → 0 }

3 { 4 → 1 × (Ya la pusimos)
5 → 0 ×
6 → 0 }
Volvemos a pasarnos así que nos quedamos con 125 y 134.

Como sólo hay 2 tríos, eliminamos el resto de tarjetas, es decir, 6, 7, 8, 9 y 10 serían las eliminadas.

c) Quitamos una de las 10 tarjetas y Bea dice: 10. Álex se da cuenta entonces de que puede sumar el número 10 con un sólo trío de tarjetas. ¿Qué tarjeta hemos quitado?

c) Si de nuevo tuviésemos todas las tarjetas:

1 { 2 → 7 ✓, 3 → 6 ✓, 4 → 5, 5 → 4 ×, 6 → 3 ×, 7 → 2 ×, 8 → 1, 9 → 0 } Se repiten

2 { 3 → 5 ✓, 4 → 4 ×, 5 → 3 × (Ya la posimos), 6 → 2 ×, 7 → 1 × (Ya la posimos), 8 → 0 }

3 { 4 → 3 ×, 5 → 2 × (Ya la posimos), 6 → 1 × (Ya la posimos), 7 → 0 }

4 { 5 → 1 × (Ya la posimos), 6 → 0 }

Como nos pasamos de nuevo, consideramos 127, 136, 145 y 235

Si sólo puede hacerse con una combinación si quitamos una cifra, ésta debería ser una que coincida en 3 combinaciones solamente, siendo la carta eliminada el 1.

d) Quitamos una tarjeta y Álex dice: 25. Bea no puede encontrar ninguna combinación de tres tarjetas para que sume 25. ¿Qué tarjeta hemos quitado?

d) Volvemos a contar:

1 { 2 → 22 ×, 3 → 21 ×, ..., 15 → 9 ×, ... } No tenemos nºs de 2 cifras así que contamos hasta que los tres números tengan una sola cifra. Esto no sucede así que continuamos.

2 { 3 → 20 ×, 4 → 19 ×, ..., 13 → 10 × }

3 { 4 → 18 ×, 5 → 17 ×, ..., 12 → 10 × }

4 { 5 → 16 ×, 6 → 15 ×, ..., 11 → 10 × }

5 { 6 → 14 ×, 7 → 13 ×, ..., 10 → 10 × }

6 { 7 → 12 ×, 8 → 11 ×, 9 → 10 ✓, 10 → 9 × }

7 { 8 → 10 ✓, 9 → 9 ×, 10 → 8 × }

8 { 9 → 8 ×, 10 → 9 ✓ }

9 { 10 → 6 × }

Tenemos 6/9/10 y 7/8/10. Para anular ambas combinaciones, sólo hay que quitar el 10.

e) Quitamos una de las 10 tarjetas y Bea dice: 16. Álex se da cuenta entonces de que puede sumar el número 16 de seis formas distintas. ¿Qué tarjeta hemos quitado?

e)

1
2 → 13 ✗
3 → 12 ✗
4 → 11 ✗
5 → 10 ✓
6 → 9 ✓
7 → 8 ✓
8 → 7 ✗
...

2
3 → 11 ✗
4 → 10 ✓
5 → 9 ✓
6 → 8 ✓
7 → 7 ✗
8 → 6 ✗
...

3
4 → 9 ✓
5 → 8 ✓
6 → 7 ✓
7 → 6 ✗
...

4
5 → 7 ✓
6 → 6 ✗
...

5
6 → 5 ✗
7 → 4 ✗
8 → 3 ✗
9 → 2 ✗
10 → 1 ✗

6
7 → 3 ✗
8 → 2 ✗
9 → 1 ✗

7
8 → 1 ✗

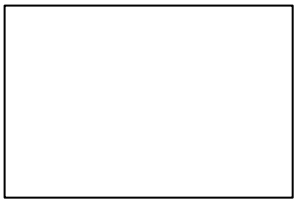
A partir de aquí nos pasamos de 16 así que comprobamos:

1/5/10 2/4/10 3/4/9 4/5/7
1/6/9 2/5/9 3/5/8
1/7/8 2/6/8 3/6/7

Buscamos un número que se repita en todos los casos menos en 6, que en este caso sería el

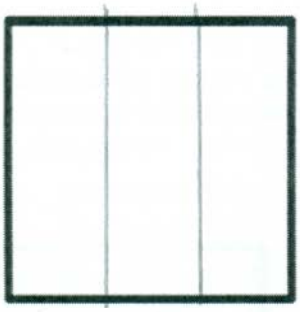
5

2. TROCEANDO CUADRADOS Y HEXÁGONOS.

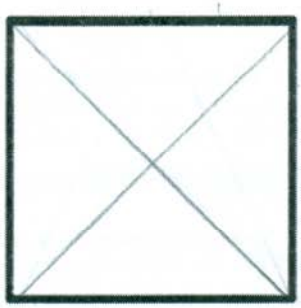


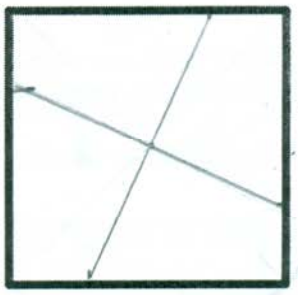
a) Dado un cuadrado, lo cortamos con dos rectas para dividirlo en partes. ¿De cuántas maneras diferentes podemos hacerlo para obtener tres partes iguales en forma y tamaño? ¿Y para obtener cuatro partes iguales? Razona las respuestas.

Puedes usar las figuras siguientes para tus ensayos.



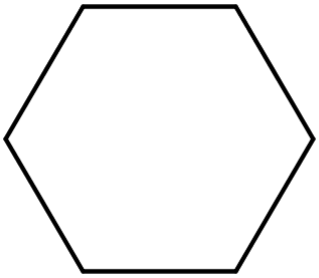
Esta es la única distribución de 3 partes posible

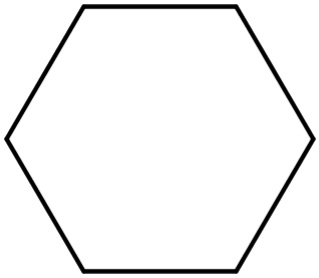


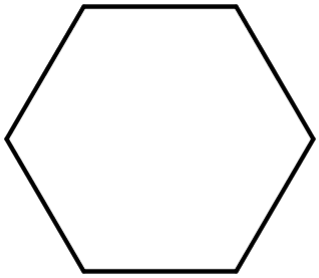


Al dividirlo en 4, dos rectas perpendiculares cualesquiera que se corten en el centro del cuadrado serían válidas.

b) Divide un hexágono regular en 8 partes iguales, en forma y tamaño. Si la longitud del lado del hexágono es de 10 cm, encuentra la longitud de los lados de cada una de las partes en que se ha dividido el hexágono. (Puedes usar las figuras siguientes para tus ensayos).

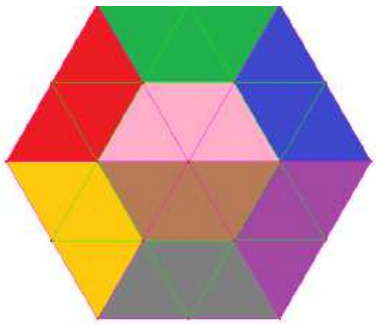






Solución esquemática aportada por la organización.

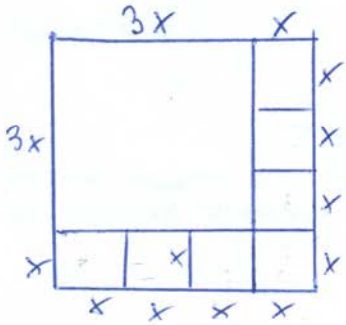
8 trapecios isósceles de ángulos 120º y 60º, y lados: 10, 5, 5 y 5 cm. Si se divide el hexágono por un diámetro, resultan dos trapecios iguales. Ahora dividimos el trapecio en 4 trapecios iguales y obtenemos la solución.



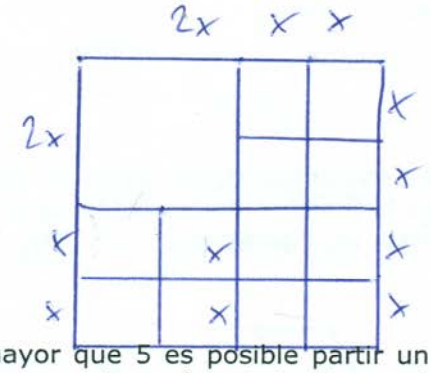
c) Trocear un cuadrado en 4, en 9 o en 16 cuadrados es sencillo. ¿Sabrías trocear un cuadrado en 8 cuadrados (no necesariamente iguales)? ¿Y en 13 cuadrados (no necesariamente iguales)?

Puedes usar las figuras siguientes para tus ensayos.

8 cuadrados



13 cuadrados



d) Para cualquier número *n* mayor que 5 es posible partir un cuadrado en *n* cuadrados (no hace falta que sean iguales). Intenta explicar cómo lo harías según el valor de *n*.

Si n es 6 se parte de esta posición y si se quiere seguir dividiendo se trocean los cuadrados pequeños en 4 partes, lo que nos brinda 3 cuadrados más, y así sucesivamente, así se pueden conseguir todos los múltiplos de 3

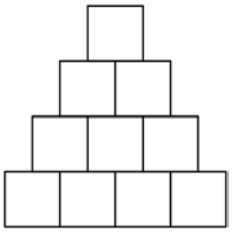
Si n es 7 se parte de esta posición y si se quieren añadir cuadrados de 3 en 3 se van dividiendo los cuadrados grandes en 4, y posteriormente los pequeños, hasta conseguir el número deseado. Así se pueden conseguir los números a los que les faltan 2 unidades para ser múltiplo de 3.

el número deseado. Esto vale para los que le faltan 1 unidad para ser múltiplo de 3.

Si n es 8 se parte de esta posición y si se quieren añadir cuadrados se trocean los pequeños en 4, y así hasta conseguir

3. TORRES.

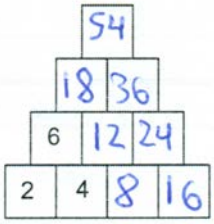
Tenemos una torre que está formada por 4 casillas en la base (primer piso), en el segundo piso hay 3 casillas, en el tercero 2 y en el último 1, como indica la figura.



En cada casilla vamos a colocar un número de acuerdo con las siguientes reglas:

- Se empieza a rellenar por la casilla de la izquierda del primer piso y se pone un número, el que quieras.
- A continuación se completa el primer piso de manera que en cada casilla se pone el doble del anterior.
- Cuando se acaba el primer piso se empieza a rellenar el segundo, de modo que en cada casilla se pone la suma de las dos que tiene debajo.
- Y se sigue así con todos los pisos hasta completar la torre.

a) En la torre que te ponemos a continuación hemos elegido el primer número el 2. Rellena todas las casillas de acuerdo con las reglas anteriores.



b) Si sumas todos los números que hay en la torre, ¿se obtiene un cuadrado perfecto?

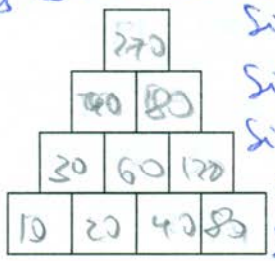
NOTA: El 144 es un cuadrado perfecto porque $144=12^2$, pero 32 no es cuadrado perfecto porque no hay ningún número natural que elevado al cuadrado de 32.

2+4+8+16+6+12+24+18+36+54 = 180

- No, porque 180 no es cuadrado perfecto porque no hay ningún número natural que elevado al cuadrado de 180

c) ¿Cuál es el menor número por el que tienes que empezar para que la suma de todos los números de la torre sea un cuadrado perfecto?

Si empiles con 10 la suma es 900



Si empiezas con 1 la suma es 90 +2

Si empiezas con 2 la suma es 180

Si empiezas con 3 la suma es 270

Si empiezas con 4 la suma es 360 +4

Si empiezas con 5 la suma es 450

Si empiezas con 6 la suma es 540

Si empiezas con 7 la suma es 630

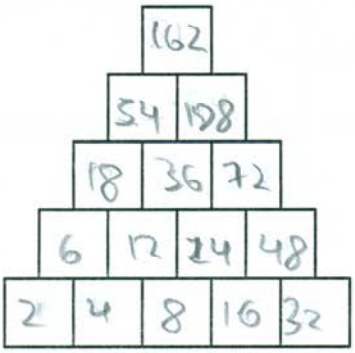
Si empiezas con 8 la suma es 720

Si empiezas con 9 la suma es 810

180 | 90
9 | 2

- Hay que empezar con 10

d) Ahora vamos a trabajar con una torre de 5 pisos, ¿Cuál es el menor número por el que tienes que empezar para que la suma de todos los números sea un cuadrado perfecto?



Si empiezas con 1 da 301 +2

Si empiezas con 2 da 602

Si empiezas con 301 da 90601

- El 301, porque todos los anteriores son primos.

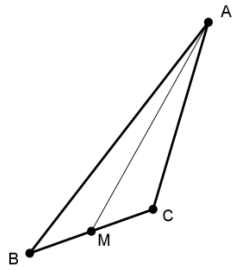
$\sqrt{90601} = 301$

e) ¿Has observado que en la casilla superior de cualquiera de las torres se tiene siempre una potencia de 3 por un número? ¿Sabrías justificar por qué?

- Porque la suma de un número más su doble siempre es múltiplo de 3. Ej: 2+1=3 2+4=6. Entonces a partir del segundo escalón todos los números son múltiplos de 3.

4. TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS.

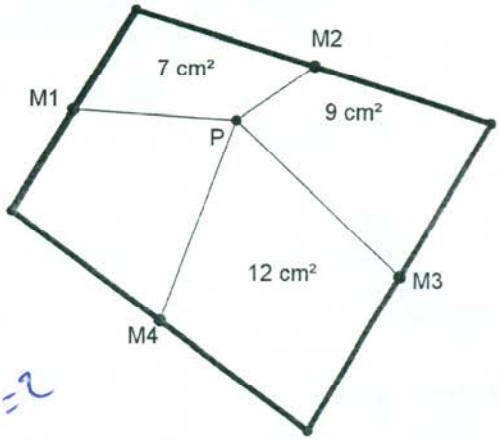
a) Consideremos un triángulo cualquiera ABC y en el lado BC su punto medio M. Dividimos el triángulo en otros dos AMB y ACM, como se ve en la figura. Si al área de AMB es 4 cm^2, ¿cuál es el área del otro triángulo ACM? Justifica la respuesta



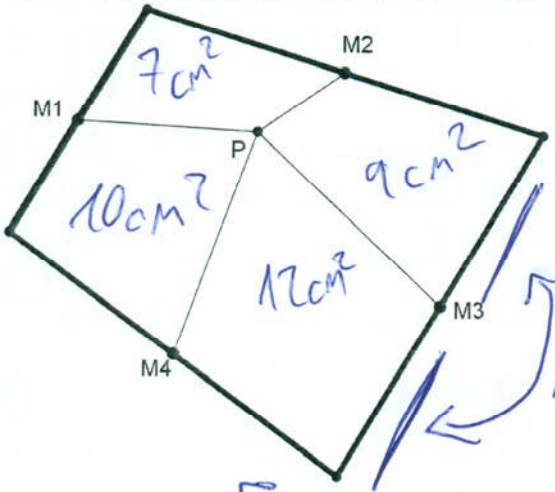
Su área será 4 cm^2.
Porque tienen la misma base (BM = CM) y la misma altura. $A = \frac{b \cdot h}{2}$

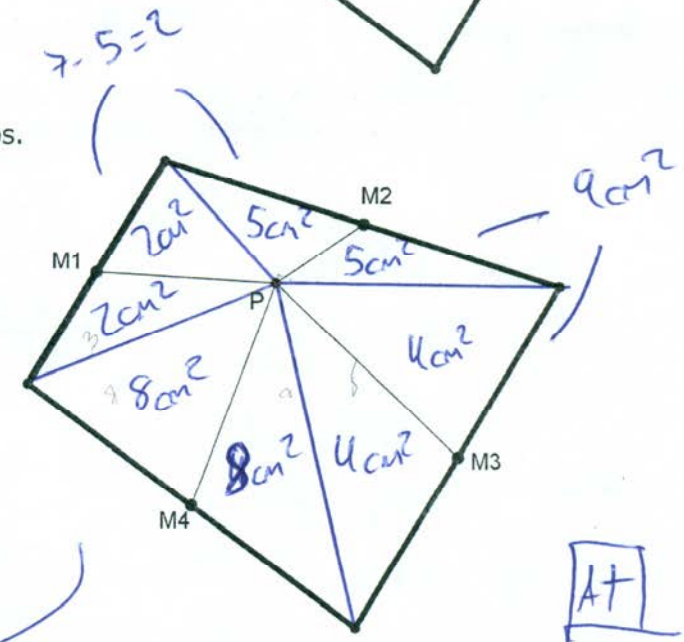
b) Consideremos ahora un cuadrilátero como el marcado en grueso en las figuras que siguen. Si escogemos en él un punto interior P y lo unimos con los puntos medios de los cuatro lados (M1, M2, M3 y M4), el cuadrilátero inicial queda descompuesto en cuatro cuadriláteros más pequeños. Si las áreas de tres de estos cuadriláteros son 7 cm^2, 9cm^2 y 12 cm^2 asignadas como se indica en la figura siguiente, ¿cuál es el área del cuarto cuadrilátero de dicha descomposición?

Nota: Las figuras no están dibujadas a escala.



Puedes usar las figuras siguientes para tus ensayos.

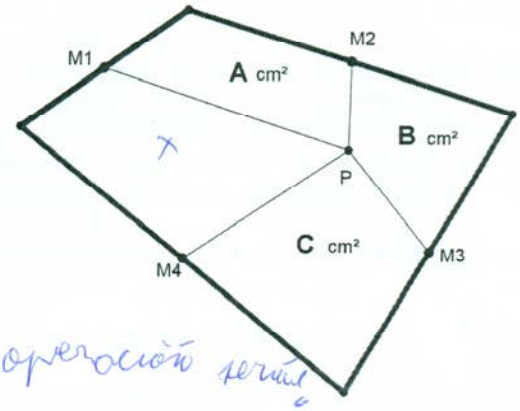




At

12 + 9 + 7 + 10 = 38 cm^2

c) Ahora te pedimos que generalices. Repite el apartado anterior con otro cuadrilátero de partida pero indicando las áreas de tres de los cuatro cuadriláteros consecutivos de la descomposición como A, B y C cm^2. Debes indicar una operación entre A, B y C que permita obtener el área del cuarto cuadrilátero de la descomposición.

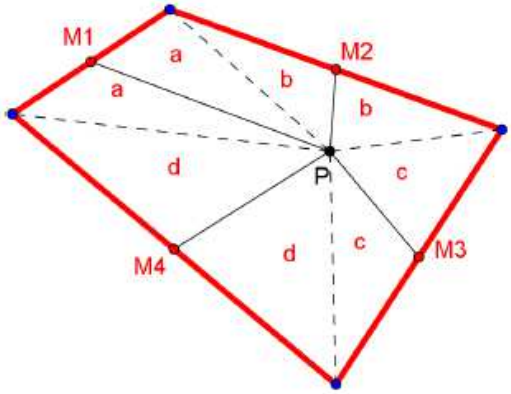


$A + C = B + x$

Esa sería la ~~operación~~ ecuación la operación sería

$(A + C) - B = x$

Como complemento a lo anterior, la organización aporta la siguiente demostración:



a + b = A
b + c = B
c + d = C
d + a = X

Sumando la 1ª y 3ª expresión: a + b + c + d = A + C
Sumando la 2º y 3ª expresión b + c + d + a = B + X

Igualando las dos últimas expresiones que son iguales: A + C = B + X
Por lo que: X = A + C - B

5. JUEGO CON CARTAS

Ana y Juan están jugando a un "juego de divisibilidad" con diez cartas numeradas del 0 al 9. Colocan por turno una carta en la mesa, siempre a la derecha de la carta colocada anteriormente por su compañero. El objetivo del juego consiste en ir consiguiendo que:

- Después de colocar la segunda carta, el número de dos cifras resultante tiene que ser divisible por 2.
- Después de colocar la tercera carta, el número de tres cifras resultante tiene que ser divisible por 3.
- Después de colocar la cuarta carta, el número de cuatro cifras resultante tiene que ser divisible por 4.

Y así siguen colocando cartas sucesivamente, hasta que uno de ellos no puede poner otra carta de las que quedan, que cumpla las reglas del juego.

Tenemos aquí **un ejemplo** de juego:

Ana pone el 5. Juan coloca el 8 para hacer 58, que es múltiplo de 2. Ana pone luego el 2 para tener 582, que es múltiplo de 3. Juan coloca entonces el 0 y tenemos 5820, que es un múltiplo de 4. Ana tendría ahora que escoger entre 1, 3, 4, 6, 7 ó 9 para hacer un múltiplo de 5, como ninguna de estas cartas le sirve, no puede seguir y entonces Juan gana.

a) En esta partida ha comenzado Ana y ya se han puesto ya las cartas 540. ¿Qué número o números pueden ponerse a continuación? ¿Quién ganaría esta partida? Justifica tus respuestas.

– Nos quedan las cartas: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9. Según el criterio de divisibilidad del 4, si las dos últimas cifras tienen que ser múltiplo de 4 ó 00, sólo podrían utilizar el 8, quedando así el 5408.

– Como ya no se puede continuar con una quinta carta, al no estar ni el 0 ni el 5 disponibles, el juego acaba. Entonces:

Ana → 5 Juan → 4 Ana → 0 Juan → 8 Ganaría Juan.

b) Ahora, ha comenzado a jugar Juan y se han puesto ya las cartas 28. ¿Qué número o números pueden ponerse a continuación? ¿Quién ganaría esta partida? Justifica tus respuestas.

– Esta vez podemos elegir entre: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7 ó 9. Siguiendo el criterio de divisibilidad del 3, sumamos las dos cifras que ya tenemos (2+8=10) y nos damos cuenta de que necesitamos un 5 para que 2+8+5=15 (múltiplo de 3)

– Ahora para la cuarta carta aplicamos el criterio de divisibilidad del 4, quedando sólo posible el 6 (2856 → múltiplo de 4)

– La quinta carta siempre será 0, porque el cinco ya está en la mesa (28560)

– Para la sexta carta nos quedan: 1, 3, 4, 7, 9. Tiene que ser un nº par que al sumarlo con el resto de las cifras dé un múltiplo de 3. El único par es el 4, así que:

2+8+5+6+0+4=25 No es múltiplo de tres.

– (El juego acaba con 28560, dándole la victoria a Juan).

Ahora deciden jugar juntos para intentar formar el número más largo posible, siempre cumpliendo las reglas del juego. Rápidamente llegan hasta el número de cinco cifras 12365.

c) ¿Piensas que podrían hacer este número más largo con las cartas que les quedan? ¿Cuándo tendrían que parar?

- Les quedarían las cifras: 0, 4, 7, 8, 9. Aplicando el criterio de divisibilidad del 6, comprobamos el 4 y el 8 (los dos únicos números pares).

  1+2+3+6+5+4=21 sí 1+2+3+6+5+8=25 NO ⇒ 123654

- La siguiente cifra implica probar con el 0, 7, 8 y 9

  1236540 | 7 → 176648 (53, 46, 45, 34, 60, 4)

  1236547 | 7 → 176649 (53, 46, 45, 34, 67, 4)

  1236548 | 7 → 176649 (53, 46, 46, 34, 68, 5)

  1236549 | 7 → 176649 (53, 46, 45, 34, 69, 6)

  — Al no servir ninguno, tienen que dejarlo en el 123654.

d) Una vez llegaron a usar las diez cartas para formar un número de 10 cifras que cumplía las condiciones del juego. No lo guardaron y entonces se les olvidó cuál era. Pero afortunadamente recuerdan algunas cifras para poder reconstruirlo aunque también dudan en otras, como se puede observar en la tabla siguiente:

1ª cifra	2ª cifra	3ª cifra	4ª cifra	5ª cifra	6ª cifra	7ª cifra	8ª cifra	9ª cifra	10ª cifra
3	8	1	6	5	**4**	**7** ó **3**	**2**	**9**	0

¿De qué número de 10 cifras se trataba? Justifica las respuestas.

- La 10ª cifra, obligatoriamente, ha de ser 0, porque ningún otro nº satisface el criterio de divisibilidad. Habiendo colocado el 0, sabemos que la 5ª cifra es 5.
- La 4ª cifra puede averiguarse, junto con la 3ª, con el criterio de divisibilidad del 4. Vamos haciendo combinaciones de 2 cifras:

  00 ✗ / 04 ✗ / 08 ✗ / 12 ✗ / 16 ✓ / 20 ✗ / 24 ✗ / 28 ✗ / 32 ✗ / 36 ✓ / 40 ✗ / 44 ✗ / 48 ✗ / 52 ✗ / 56 ✗ / 60 ✗ / 64 ✗ / 68 ✓ / 72 ✗ / 76 ✓ / 80 ✗ / 84 ✗ / 88 ✗ / 92 ✗ / 96 ✗ ⇒ 16, 36 ó 68

- La 2ª cifra ha de ser par, es decir, 6 u 8. Como esto implica usar una de ellas, el 68 para las posiciones 3 y 4 se descarta. Las demás combinaciones llevan siempre 6 en el lugar 4, así que tanto este como el 8 en la 2ª posición pueden colocarse.
- Si la 7ª fuese 3, la 3ª tendría que ser obligatoriamente 1, quedando el 7 como 1ª cifra. Pero 7+8+1=16, que no es múltiplo de 3, así que la 7ª cifra sería 7.
- Si la 3ª fuese 3 y la 1ª 1, comprobamos todos los criterios:

  1836547 | 7 → 262363 (43, 16, 25, 44, 27, 6)

  NO es válido.

- Por lo tanto, concluimos con el siguiente número:

  3816547290

  3816547 | 7 → 545221 (31, 36, 15, 14, 0 ≠ 0)