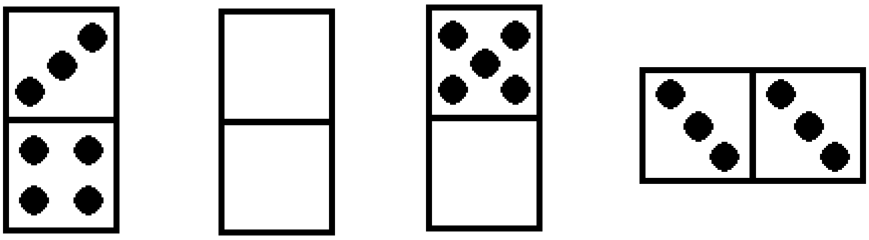
Problema nº 1: Dominó/Dominó triangular

Las fichas del juego del **dominó** son rectángulos formados a partir de la unión de dos cuadrados. En esos cuadrados hay puntos que pueden variar de 0 a 6. Así tenemos la ficha 3-4 (o 4-3 que es la misma), la 0-0 (conocida como blanca doble), la 0-5, la 3-3, etc.



Un juego completo de dominó se compone de 28 fichas.

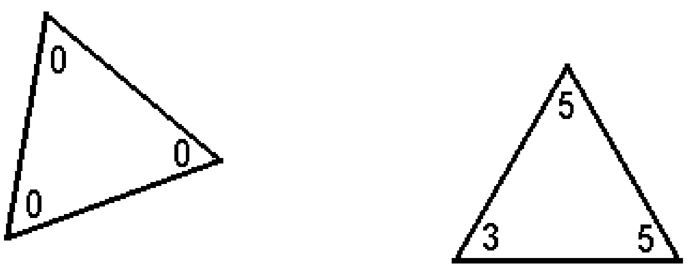
a) Si quisiéramos hacer un dominó en el que los puntos de cada cuadrado sólo fueran de 0 a 4, ¿cuántas fichas tendría el juego completo?

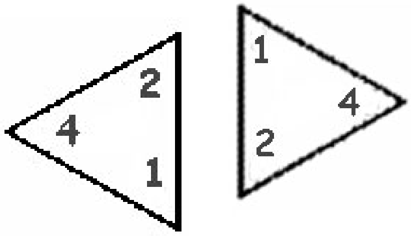
4-4	*3-3*	*2-2*	....	
4-3	*3-2*	*2-1*	....	*5+4+3+2+1=15*
.....	.....	.....		

b) ¿Y si los puntos fueran de 0 a 10?

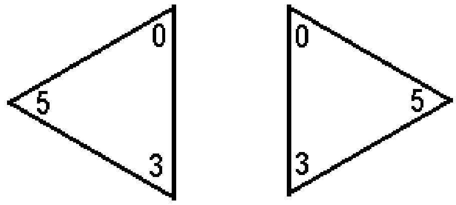
11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=66

El **dominó triangular** es parecido al dominó. Las fichas son triángulos equiláteros y cada una lleva tres valores (números **de 0 a 5,** en vez de puntos), uno en cada vértice, tal como podéis ver en los ejemplos siguientes:





(Estas dos fichas son la misma)



(Estas dos fichas son diferentes)

c) Dos fichas son iguales si tienen los mismos tres números y están colocados en el mismo orden circular. ¿Cuántas fichas diferentes hay en este **dominó triangular**?

Indico una manera de contar, hay otras.

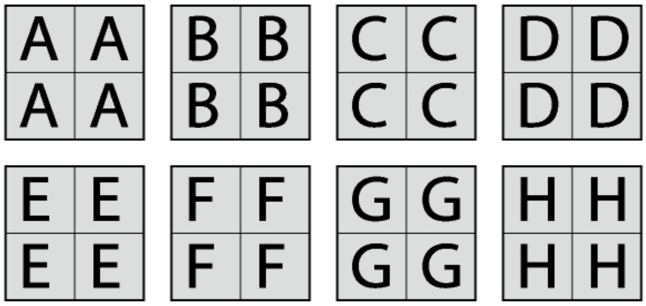
<u>*Con un 5 arriba*</u> *5-5 4-5 3-5 ... 0-5* *5-4 4-4 3-4 ... 0-4* *5-3 4-3 ....* *5-2 4-2 ....* *5-1 4-1 ....* *5-0 4-0 3-0 ... 0-0*	*Hay 36 fichas = 6^2. Del mismo modo, contando el cuadro de las que tienen un 4, hay 5^2 y sigue 3^2, 2^2, 1^2.* *Pero las fichas de la primera fila están repetidas en la primera columna, excepto el* *5-5-5, que sólo está una vez, luego hay que quitar 5 fichas.* *En el cuadro del 4 pasa lo mismo, hay que quitar 4 fichas, y en los siguientes, 3, 2, 1, 0.*

Por lo tanto, el número de fichas será:

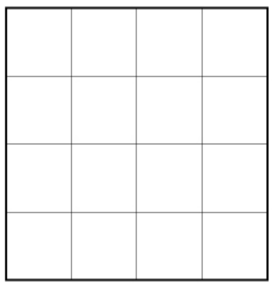
$$(6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2)-(5+4+3+2+1+0)=91-15=76$$

Problema nº 2: El juego de los cartones

Ocho alumnos de una clase, Aurora, Berta, Clara, David, Ester, Fernando, Gloria y Helia tienen ocho cartones cuadrados, todos de la misma medida, donde han escrito sus iniciales (cuatro iniciales en cada cartón).

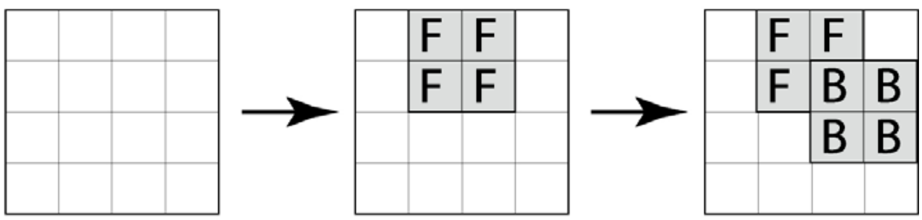


Deciden hacer un juego que consiste en colocar sucesivamente los cartones cuadrados en un tablero, también cuadrado, que tiene la longitud del lado doble de las de los cartones:

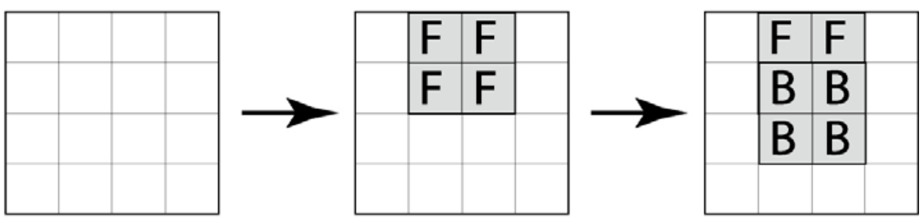


Cada cartón se ha de colocar con los lados paralelos a los del tablero y de manera que cada cartón que se coloque <u>tape parcialmente el anterior</u> (el segundo ha de tapar una parte del primero, el tercero una parte del segundo – y también si se quiere una parte del primero –, el cuarto una parte del tercero y si se quiere de los anteriores, etc.)

Una posible sucesión de jugadas podría ser ésta:



Y otra sucesión posible es ésta:



Después de haber colocado los ocho alumnos sus cartones, el tablero presenta este aspecto:

H	G	D	D
H	B	B	D
A	B	B	C
F	F	E	C

a) De los ocho alumnos, ¿quién fue el último en colocar su cartón?

Berta.

b) ¿Y quién fue el penúltimo?

David.

c) ¿Cuál ha sido el orden en el que se han colocado los cartones?

Clara, Ester, Fernando, Aurora, Helia, Gloria, David, Berta

Observar que hay una "rotación" que debe terminar en D, B.

d) ¿Crees que sin colocar todos los cartones, pero siguiendo las instrucciones del juego, se podría llegar a cubrir todo el tablero? ¿Cuántos cartones harían falta? Pon un ejemplo, colocando los cartones por orden alfabético (esto es, primero Aurora, segundo Berta, etc.) y di cómo quedaría el tablero.

No se puede hacer con menos de siete cartones. Yo creo que una "razonable justificación" es que la mitad superior (y la inferior) necesitan tres cartones cada una para cubrirse (aunque inicialmente se pusieran en diagonal, que abarcan más), pero al tener que solaparse entre ellas se necesita el séptimo de caballería para ganar la batalla.

Un ejemplo sería con A,B,C,D.E,F,G, y el tablero quedaría, por ejemplo así (hay otras posibilidades).

A	**A**	**C**	**C**
A	**B**	**D**	**D**
G	**G**	**F**	**E**
G	**G**	**F**	**E**

Problema nº 3: Poliamantes

Un **poliamante** es una figura formada por varios triángulos equiláteros, todos con lados de la misma longitud, unidos por uno de sus lados. Por ejemplo, con dos triángulos equiláteros se puede formar <u>una sola figura</u>, el **diamante**, y con tres triángulos equiláteros se puede formar también <u>una sola figura</u>, el **triamante**. En la Figura 1 puedes ver el **diamante** colocado en distintas posiciones y en la Figura 2 puedes ver el **triamante** en dos posiciones diferentes.

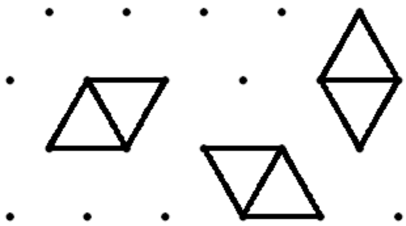


Figura 1: Diamante

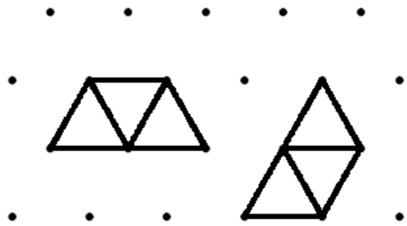
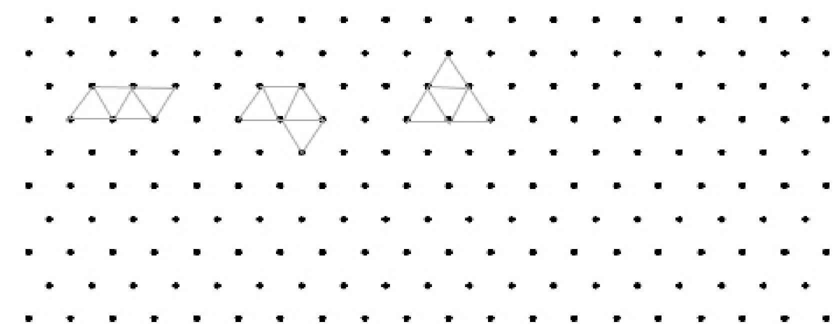


Figura 2: Triamante

Contesta a las siguientes preguntas y justifica las respuestas:

a) ¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cuatro triángulos equiláteros? Las llamaremos los **tetramantes**. Dibuja cada uno de ellos en esta trama:



b) Varios **tetramantes** se han combinado para formar la Figura 3. Halla una descomposición de la figura, señalando los **tetramantes** que la forman.

Se me ocurren estas dos:

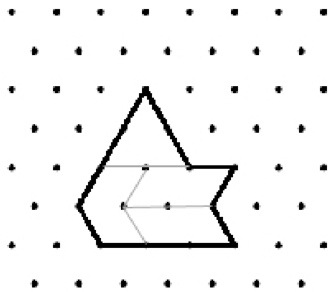


Figura 3

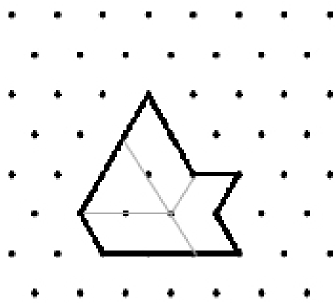
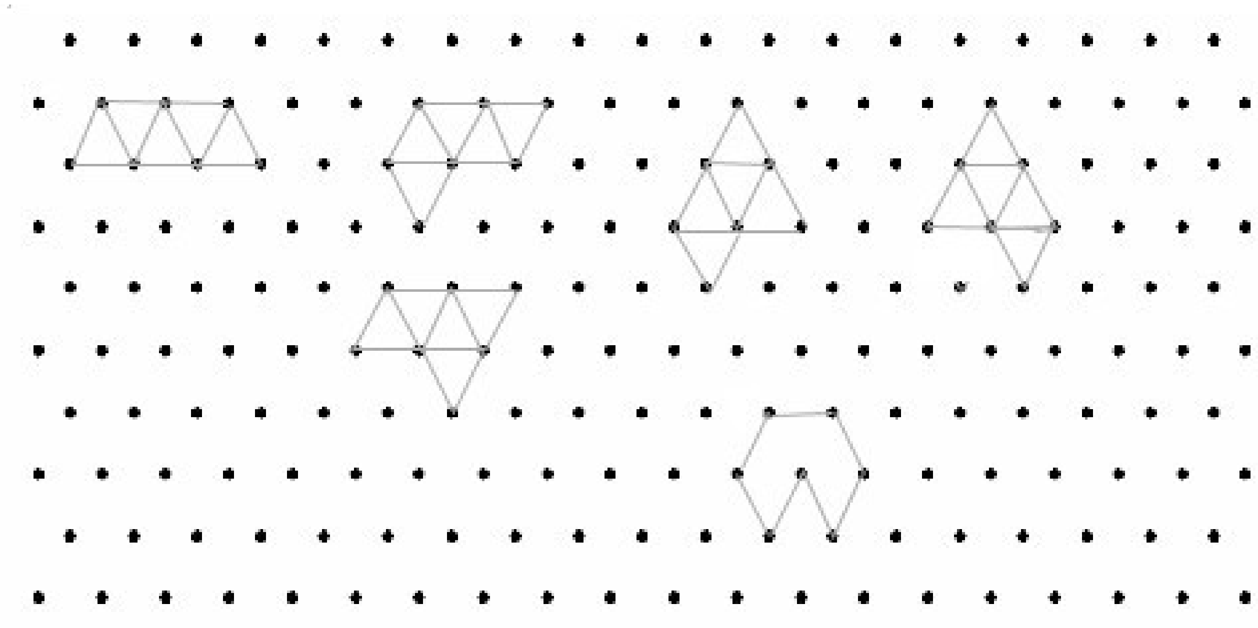


Figura 3

c) ¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cinco triángulos equiláteros? Las llamaremos los **pentamantes**. Dibuja cada uno de ellos en esta trama de puntos:



¡Ojo con las respuestas de los niños! ¡Estos <u>seis pentamantes</u> podrían ser <u>cuatro</u> si se consideran en el espacio!

d) Varios **pentamantes** se han combinado para formar la Figura 4. Halla una descomposición de la figura, señalando los **pentamantes** que la forman.

Se me ocurren estas dos:

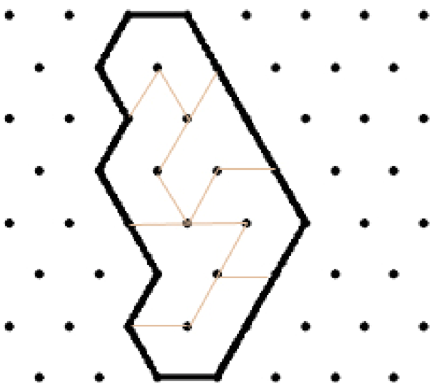


Figura 4

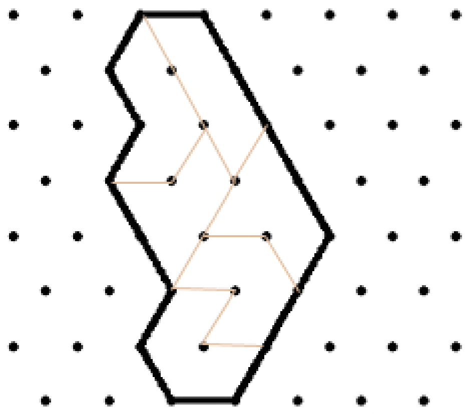


Figura 4

Problema nº 4: El cubo rodante

Se tiene un cubo, con números del 1 al 6, en cada una de sus caras, cuyo desarrollo es el que se ve en la Figura 1.

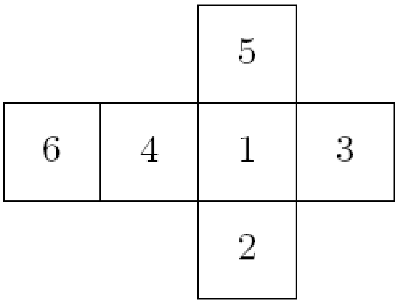
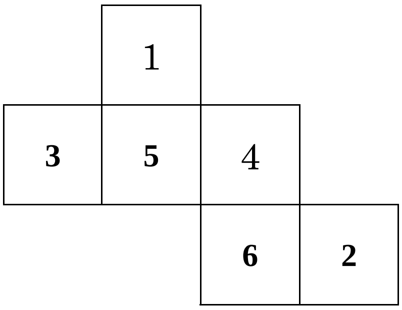


Figura 1

a) En la Figura 2 puedes ver dos desarrollos del cubo anterior, pero se han borrado algunos números. Rellena los huecos en blanco para que estos desarrollos sean también del mismo cubo que el de la Figura 1.



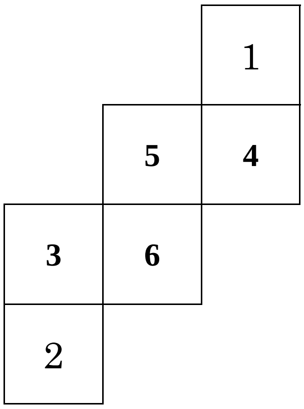


Figura 2

Se dispone ahora de un tablero con doce casillas del mismo tamaño que las caras del cubo. Se coloca el cubo en la casilla A-1 del tablero, siendo la cara superior la ocupada por el número 1. Cada movimiento del cubo consiste en voltearlo sobre una de sus aristas para situarlo en una de las casillas vecinas.

b) Se han realizado, desde la posición inicial una serie de movimientos de forma que el cubo ha pasado una sola vez por cada una de las casillas del tablero y en cada una hemos anotado el número que figura en la cara de arriba. El resultado obtenido es el que aparece en la Figura 3.

Di cuál ha sido el camino que ha seguido el cubo sobre el tablero, explicando tu razonamiento.

	1	2	3	4
A	1	4	6	3
B	3	3	5	5
C	2	6	6	4

Figura 3

A-1 , A-2 , A-3 , A-4 , B-4 , C-4 , C-3 , B-3 , B-2 , C-2 , C-1 , B-3

Exceptuando los primeros movimientos, en los que hay que buscar el volteo correcto, después la mayoría son movimientos obligados por los bordes o por coincidencia con números contiguos.

c) Explica por qué la configuración de la Figura 4 no se puede obtener mediante el proceso antes descrito de movimientos del cubo a partir de la posición inicial A-1.

	1	2	3	4
A	1	4	2	1
B	3	3	6	5
C	2	3	2	6

Figura 4

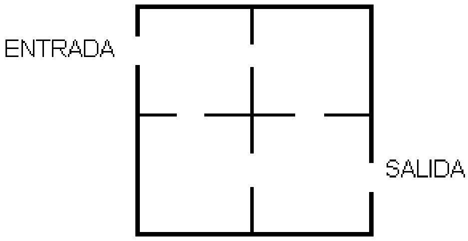
- *Si pasamos del 1 arriba (A1) al 3 arriba (B1), queda a la izquierda un 5 y detrás un 6, luego no podemos pasar a 3 en B2 ni a 2 en C1.*
- *Si pasamos del 1 arriba (A1) al 4 arriba (A2), queda a la izquierda un 6 y detrás un 5, luego no podemos pasar a 3 en B2 ni a 2 en A3.*

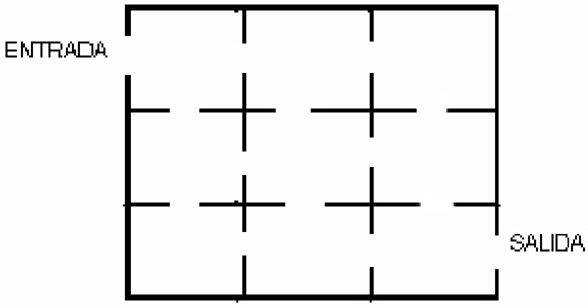
Entonces no se puede completar la figura rodando el cubo.

-

Problema nº 5: El museo

Las salas de un Museo son habitaciones como las que se muestran en la figura. Cada habitación está conectada por una puerta con cada una de las habitaciones con las que comparte un lado. La entrada y la salida del Museo están situadas en habitaciones diametralmente opuestas. En los dibujos aparecen dos diseños diferentes de Museo. El de la izquierda está formado por cuatro habitaciones dispuestas como un cuadrado, diremos que es un Museo $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$. El de la derecha es un Museo $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$:



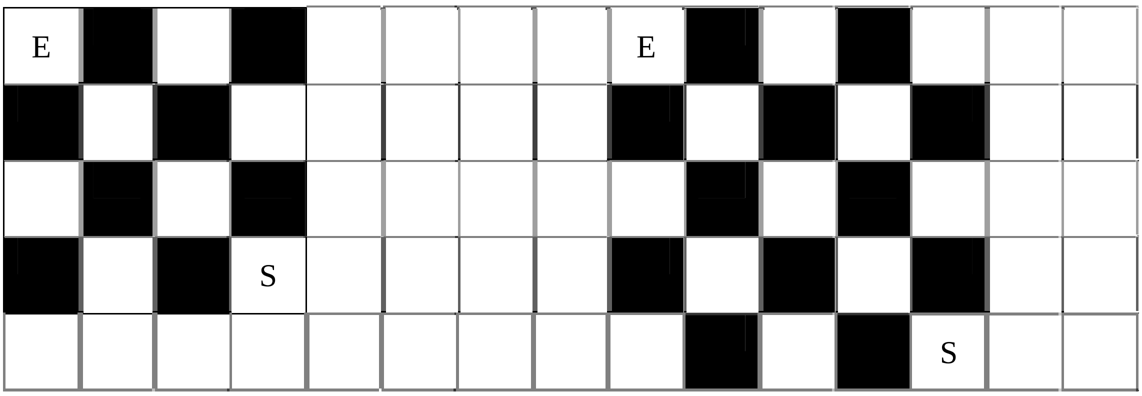


Un visitante del Museo que entra por la ENTRADA desea visitar cada habitación exactamente una vez y salir por la SALIDA. A estos recorridos los llamaremos **caminos aceptables**.

a) ¿Puedes encontrar un camino aceptable en el Museo $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$? ¿Y en el Museo $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$?

En el 2 x *2, NO y en el 3* x *3, SÍ.*

b) Inténtalo en los Museos $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ y $\mathbf{5} \times \mathbf{5}$ (dibújalos e intenta encontrar caminos aceptables en ellos).



c) En algunos de los anteriores Museos no has podido encontrar ningún camino aceptable y es que, a veces, es imposible. Explica por qué en algunos casos no es posible encontrar un camino aceptable. (Quizás te ayude imaginarte un tablero de ajedrez).

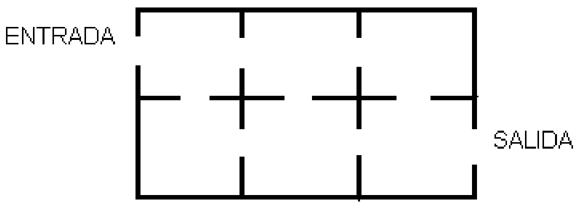
- *Cada cambio de habitación supone un cambio de color. En el primer caso hay que recorrer 16 habitaciones desde E hasta S, luego hay que hacer 14 cambios de color (un número par). Si empezamos en blanco, terminamos en negro, luego es imposible.*
- *En el Museo 5 x 5 hay 25 habitaciones, por lo tanto hay que hacer 23 cambios de color (un número impar). Si empezamos en blanco, terminamos en blanco, luego es posible. Hay muchas*

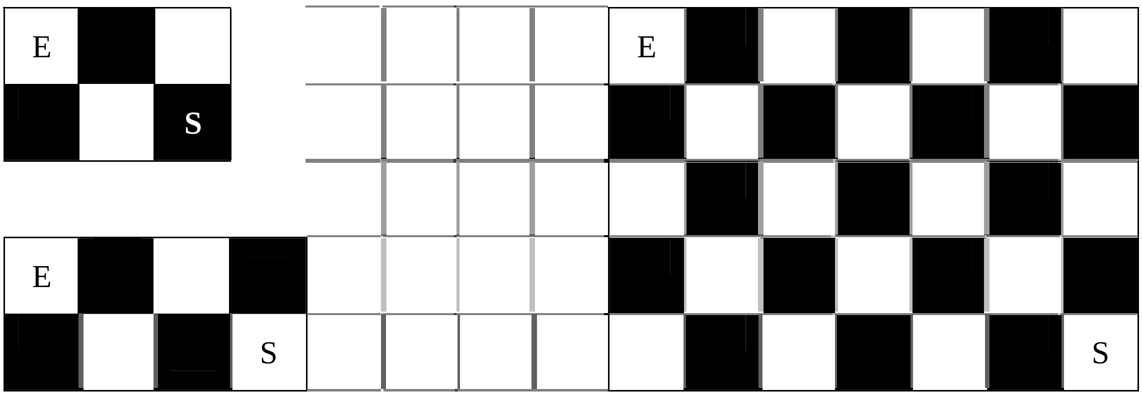
formas de hacerlo, una de ellas es recorrer las filas enteras de derecha a izquierda y al revés, bajando desde E hasta S.

d) No vas a dibujar un Museo $\mathbf{1000} \times \mathbf{1000}$, pero te lo puedes imaginar y tratar de ver si hay un camino aceptable o no. Lo mismo podrías hacer con otro Museo que sea $\mathbf{725} \times \mathbf{725}$. Y lo mismo podrías hacer con un Museo que sea de la forma $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, donde **N** representa un número cualquiera.
¿Podrías dar una regla general que nos permita decidir si en un Museo cuadrado $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ vamos a poder encontrar un camino aceptable?

Por el razonamiento anterior, el recorrido será posible cuando N sea impar.

e) Planteamos ahora la misma pregunta, esta vez con Museos rectangulares. Entrénate, por ejemplo, con Museos $\mathbf{3} \times \mathbf{2}$, $\mathbf{4} \times \mathbf{2}$, $\mathbf{5} \times \mathbf{7}$, etc.



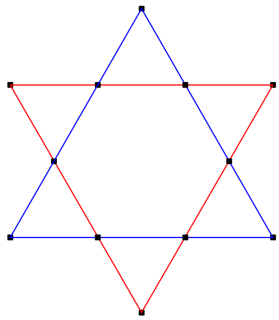


- *En el 3 x 2 hay que atravesar 4 puertas (par), luego se entra por blanco y se sale por negro, posible: hay que recorrer columnas de arriba a abajo y de abajo a arriba desde E hasta S.*
- *En el 4 x 2 hay que atravesar 6 puertas (par), luego se entra por blanco y se sale por negro, imposible.*
- *En el 5 x 7, con el mismo razonamiento, es posible, claramente: hay muchas formas de hacer el recorrido.*

Imagínate un Museo de dimensión $\mathbf{400} \times \mathbf{600}$, o bien $\mathbf{5000} \times \mathbf{7000}$. ¿Podrías encontrar un camino aceptable? Lo mismo podrías hacer con un Museo que sea de la forma $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$, donde **N** es un número cualquiera y **M** es otro número cualquiera distinto de **N**.
¿Qué condiciones han de cumplir **N** y **M** para que en un Museo $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$ haya con seguridad un camino aceptable?

- *Razonando como antes vemos que existe un camino aceptable si y sólo si N ó M es un número impar.*

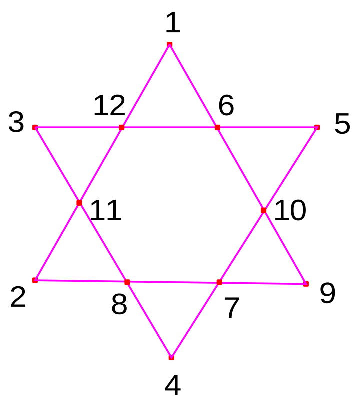
Problema nº 6: Jugando con las estrellas

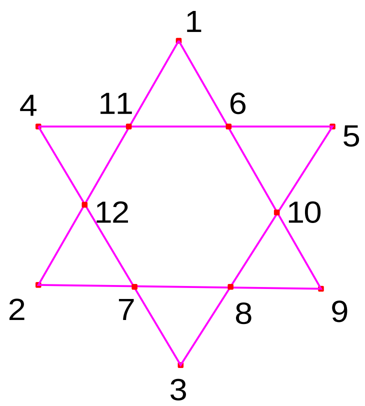


Se considera la **estrella de David**, formada con dos triángulos equiláteros que se cortan como los de la figura, determinando 12 puntos (seis vértices y seis puntos de intersección de los lados).

Un juego consiste en construir una *estrella mágica* colocando en los puntos los números del 1 al 12 sin repetir ninguno, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen siempre lo mismo.

a) Encuentra una solución en la que sobre los tres vértices de uno de los triángulos estén los números 1, 2 y 9 con la condición de que los cuatro números que están sobre cada lado sumen 26.





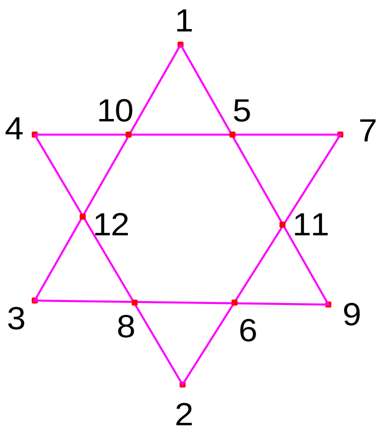
- *Basta observar que los números* 11 y 12 *están obligados, aunque pueden alternarse.*

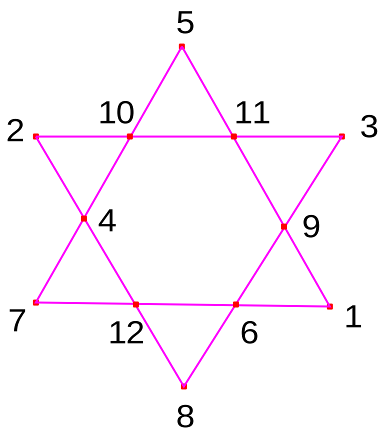
b) En cualquier solución de la *estrella mágica* la suma de los cuatro números colocados sobre un lado es siempre 26. Explica por qué.

- *La suma del* 1 al 12 es 78*. Como cada punto hay que contarlo dos veces (uno por cada lado que pasa por el punto), la suma total de todos los puntos (contado cada uno dos veces) será:* 78 x 2 = 156*. Como esta suma tiene que repartirse por igual entre los seis lados, dividimos* 156:6 =26*.*
- *Un razonamiento que pueden hacer los críos: como cada lado me dicen que suma 26, todos los lados juntos sumarán* 26 x 6 =156*. Como los números del 1 al 12 suman 78, pues* 156:78 = 2 *y esto quiere decir que por cada punto pasan dos lados.*

c) Encuentra otra solución sabiendo que la suma de los números colocados en los seis vértices es también 26 y que, además, los números colocados en los vértices de uno de los triángulos son impares y suman lo mismo que los colocados en los vértices del otro triángulo.

- *La suma de los vértices ha de ser* 13*. Entonces sólo hay dos posibilidades* {1,3,9} y {1,5,7}.
- *En la primera opción hay dos posibilidades para el otro triángulo:* {2,4,7} y {2,5,6}.
- *En la segunda opción hay dos posibilidades para el otro triángulo:* {2,3,8} y {3,4,6}
- *Probando las cuatro combinaciones, sólo resultan estas dos válidas:*





d) En cualquier solución de la *estrella mágica* la suma de los números colocados sobre los vértices de uno de los triángulos es igual a la suma de los números colocados sobre los vértices del otro triángulo. Explica por qué.

- *La suma de los tres lados de uno de los triángulos es* 26 x 3 =78 *que puede descomponerse en la suma de los vértices + la suma de los puntos que forman el hexágono interior.*
- *En el otro triángulo ocurre los mismo:* 78 = *suma de los vértices + la suma de los puntos que forman el hexágono interior.*

Por lo tanto, como el hexágono interior es el mismo para ambos:

Suma de los vértices del triángulo (1)+ *la suma de los puntos que forman el hexágono interior = Suma de los vértices del triángulo* (2)+ *la suma de los puntos que forman el hexágono interior.*

De donde, suma de los vértices del triángulo (1) = *suma de los vértices del triángulo* (2).