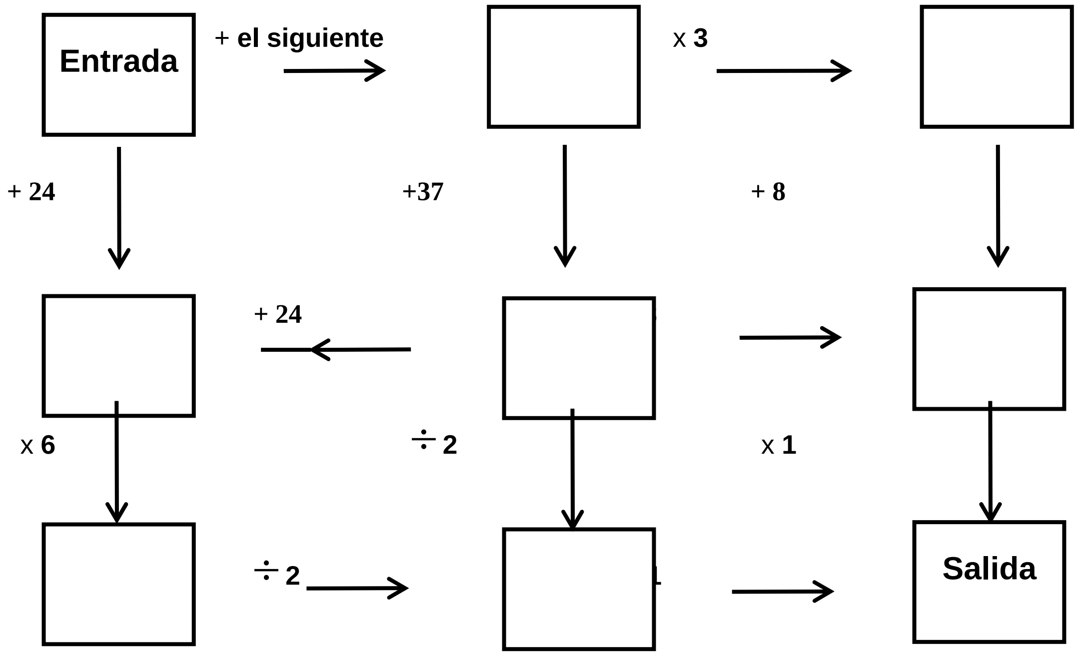
1. CIRCUITO

Este circuito solo reconoce **números naturales** (0, 1, 2, 3, ...). Cuando un número entra en este circuito se coloca en la casilla de **Entrada** y siguiendo las flechas va avanzando hasta llegar a la **Salida**. Para pasar de una casilla a otra debe realizar la operación que se indica junto a la flecha.



a) Irene se dio un paseo por este circuito y salió convertida en el 17. ¿Qué itinerario siguió y qué número era al principio?

b) Nuria y Olga entraron al circuito siendo el mismo número y decidieron no pasar por la casilla central. Cada una eligió un camino distinto. Si Olga salió convertida en el 83, ¿qué itinerario siguió Olga?, ¿qué itinerario siguió Nuria?, ¿qué número eran al principio?, ¿en qué número se convirtió Nuria?

c) Explica por qué todo número que entra puede pasar por las flechas $\boxed{\div 2}$ do exacta la división.

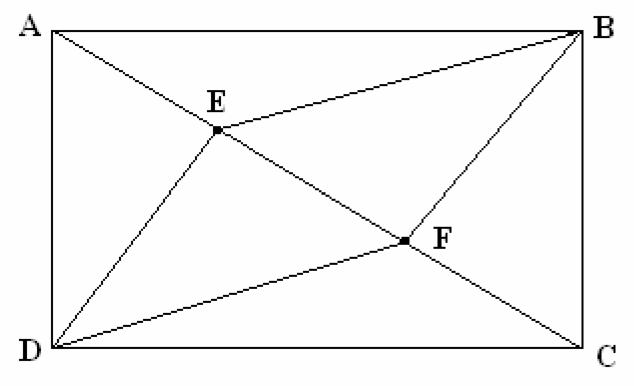
d) ¿Es posible ir por los caminos del borde y llegar al mismo número? Contesta de manera razonada.

SOLUCIÓN.-

a) 1 3 9 17 17	b) **12** 25 75 36 83 216 108	c) Si viene por el Norte, procede de un número impar (n+n+1), más 37, que siempre es par. Si viene por el Oeste, procede de un producto por 6, que siempre es par.
d) No es posible. Si vas por el camino ES nunca obtendrás un múltiplo de tres. Si vas por el camino SE siempre obtienes un múltiplo de tres. Se trataría de resolver la ecuación diofántica 6x+11 = 3y+72 ; 6x – 3y = 61, que no tiene solución porque el primer miembro es múltiplo de tres y el segundo, no.		

2. RECTÁNGULO

Sea el rectángulo ABCD de la figura. Dividimos la diagonal AC en tres segmentos iguales mediante los puntos E y F. Unimos los puntos E y F con B y con D.



a) Si haces el recorrido ABCFEDABCFEDA…. desplazándote por los segmentos trazados ¿en que punto acabarás tras pasar por 2008 letras?

b) ¿Puedes hacer un recorrido que, empezando desde **A**, pase por todos los segmentos de esa figura una sola vez? ¿Hay otros puntos desde los cuales se puede hacer un recorrido que pase también por todos los segmentos una sola vez?

c) ¿Por qué no se puede hacer un recorrido como los anteriores empezando desde **B**?

Y, para acabar este problema, uno de áreas:

d) Si la base del rectángulo mide 12 m y la altura 9 m. ¿cuál es el área del triángulo BEF?

SOLUCIÓN.-

a) Haciendo la división entera 2008 = 6 · 334 + 4. Luego acabaré en el punto F.

b) Sí, de muchas maneras. Por ejemplo: ABEADEFDCFBC.
También se puede hacer empezando en C (y acabando en A).

c) Porque, al ser un vértice con cuatro segmentos, tendríamos que acabar en él y, entonces, en los vértices con tres segmentos entramos y salimos y no podemos volver a entrar, quedándose, al menos, un segmento sin recorrer.

d) La diagonal AC se obtiene por el teorema de Pitágoras:

$$AC = \sqrt{\left(12^2 + 9^2\right)} = 15 .$$

Los triángulos BAE, BEF y BFC tienen la misma área porque tienen la misma base (5 m) y la misma altura (la del triángulo ABC). Como este triángulo es la mitad del rectángulo, su área mide (12 · 9) / 2 = 54 m^2.

Entonces, el área de BEF es 54/3 = 18 m^2.

3. CUADRADOS MÁGICOS

Un cuadrado mágico es un cuadrado de números 3x3 de forma que la suma de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es la misma. Esta suma es "*la suma mágica*" del cuadrado.

X	X	X
X	X	X
X	X	X

a) Si las casillas de un cuadrado mágico están ocupadas por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ¿cuál es *la suma mágica* del cuadrado? ¿Qué número ocupa siempre la casilla central? ¿Por qué?

b) En este caso, con esos números, muestra los cuadrados mágicos que se pueden construir.

c) Construye un cuadrado mágico con los números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17. ¿Qué número ocupa la casilla central?

d) Existe un cuadrado mágico formado por nueve números impares consecutivos entre los que aparecen siete números primos. ¿Cuáles son estos números? Escribe un cuadrado mágico formados por ellos.

SOLUCIÓN.-

a) La suma mágica se obtiene sumando los 9 números y dividiendo entre tres (filas / columnas).
Esto es, 1+2+3+…+9= 45 ; 45/3 = 15. La suma mágica es 15.

Sea x la casilla central. Si sumamos todas las líneas que pasan por x (cuatro), aparecen todos los números, con la x cuatro veces. Como cada línea suma 15, queda:

$45 + 3x = 4 \cdot 15$; $3x = 15$; $x=5$.

b)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Y todos los que se obtienen por giros y simetrías.

c) Suma mágica=27.

7	17	3
5	**9**	13
15	1	11

d) Los números son: **3**, **5**, **7**, 9, **11**, **13**, 15, **17**, **19**. En negrita los 7 primos. Suma mágica: 33.

9	19	5
7	**11**	15
17	3	13

Podría ocurrir que algún alumno tomase el 1 como número primo (¡!), en cuyo caso también valdría la solución del apartado c).

e) **4. LOS TRES SOBRES**

En una mesa hay tres sobres marcados con las letras A, B y C. Los tres contienen una cantidad (entera) diferente de euros, con la peculiaridad de que C es el que más euros tiene y A el que menos. **Ana, Beatriz y Carlos** son tres hermanos excelentes lógicos que examinan cada uno el sobre marcado con su inicial. Considera los siguientes casos y responde de manera razonada:

a) Si el total de dinero en los tres sobres es **10 euros,** Ana mira el sobre A y dice "*Ya sé cuánto hay en cada sobre*". ¿Podrías deducirlo tú también?

b) Si el total de dinero en los tres sobres es **11 euros,** Carlos mira el sobre C y dice: "*Ya sé cuánto hay en cada sobre*". A continuación Ana mira el sobre A y dice: "*Ya sé cuánto hay en cada sobre*", entonces Beatriz, sin mirar, asegura saber cuánto hay en su sobre. ¿Podrías decir tú cuánto hay en cada sobre?

c) Si el total de dinero en los tres sobres es **13 euros,** Ana, después de mirar el contenido de su sobre, declara que no puede deducir el contenido de los otros sobres. Mira entonces Carlos el suyo y dice que él tampoco puede saberlo. Entonces, Beatriz examina el suyo y declara que tampoco ella puede deducirlo. ¿Cuánto dinero hay en el sobre B?

d) Si el total de dinero en los tres sobres es **32 euros** y Ana mira su sobre en primer lugar, ¿puede averiguar el contenido de los otros dos sobres?

SOLUCIÓN.- **A < B < C**

a) n=10. Las posibilidades son: (1 2 7) , (1 3 6) , (1 4 5) , (2 3 5). La única manera de que Ana esté segura es viendo un 2. Solución: **A = 2 , B = 3 , C = 5**.

b) n=11. Las posibilidades son: (1 2 8) , (1 3 7) , (1 4 6) , (2 3 6) , (2 4 5). La frase de Carlos anula el 6. La frase de Ana anula el 1. Luego la solución es: **A = 2 , B = 4 , C = 5**.

c) n=13. Las posibilidades son: (1 2 10) , (1 3 9) , (1 4 8) , (1 5 7) , (2 3 8) , (2 4 7) , (2 5 6) , (3 4 6).
La frase de Ana descarta la última. La frase de Carlos descarta el 10, el 9 y el 6 (porque ya tiene en cuenta la exclusión de la última terna). La frase de Beatriz descarta la (1 5 7) porque ya conoce las exclusiones anteriores. Luego sólo quedan dos posibilidades, (1 4 8) y (2 4 7). Entonces **B = 4**.

d) n=32. No puede, porque en todas las combinaciones posibles, que son muchas aunque esto no añade dificultad al problema[1], el número que ve Ana siempre aparece en más de una terna. El caso más favorable sería (9 10 13) y (9 11 12), que no permitir decidir. Si el total de euros fuera 33, sí podría averiguar las cantidades: (10 11 12).

---

[1] Esto es verdad porque no hay que escribirlas todas, pero hay que tener en cuenta que los alumnos posiblemente sí tratarán de escribirlas y eso les puede desviar del razonamiento principal.

5. LÍO DE LÁMPARAS EN UNA HABITACIÓN

Estás en una habitación cuadrada en la que se pueden poner lámparas de pie, y te dicen que las coloques junto a la pared, con la condición de que haya el mismo número de lámparas en cada una de las cuatro paredes de la habitación.

Para ello te permiten poner, como máximo, una lámpara en cada uno de los cuatro rincones de la habitación, y, en ese caso, la lámpara se cuenta como perteneciente a las dos paredes que forman ese rincón (no siempre es necesario poner lámparas en un rincón).

Por ejemplo, ésta es una forma correcta de colocar **3** lámparas:
(en cada pared hay una lámpara)

x		
		x
	x	

a) Tienes **12** lámparas. ¿Cómo puedes colocarlas? Haz un dibujo que nos diga, de un vistazo, la solución.

b) Ahora tienes **10** lámparas. ¿Cómo puedes colocarlas? Haz un dibujo que nos diga, de un vistazo, la solución.

c) Resuelve el mismo problema para **11** y para **13** lámparas.

d) Para un número cualquiera de lámparas, ¿podrías hacer unos dibujos que representen las diferentes soluciones del problema según el número de lámparas? ¿Cómo puedes hacerlo? ¿Cuántas habrá en cada pared?

SOLUCIÓN.-

a) **12** lámparas

	3	
3		3
	3	

1	2	1
2		2
1	2	1

b) **10** lámparas

1	1	1
2		2
	3	

1	2	
2		2
	2	1

c)

11 lámparas

	2	1
3		2
	3	

13 lámparas

1	2	1
3		2
	3	1

d) La solución general es la siguiente: sea *n* el número de lámparas y sea *r* el resto de dividir *n* entre 4. Entonces, r es el número de rincones en los que NO se pone lámpara.

Si *r* = 0, hay dos soluciones como en el caso a), puede no haber ninguna lámpara en los rincones o haber una en cada uno (es la excepción a la regla).

	n/4	
n/4		n/4
	n/4	

1	n/4 - 1	1
n/4 - 1		n/4 - 1
1	n/4 - 1	1

Si *r* = 1, hay una solución como en el caso c) (13 lámparas). Pueden obtenerse más por giros y simetrías.

1	n/4 – 5/4	1
n/4 – 1/4		n/4 – 5/4
	n/4 – 1/4	1

Si *r* = 2, hay dos soluciones como en el caso b), según los dos rincones vacíos sean contiguos u opuestos. Pueden obtenerse más por giros y simetrías.

1	n/4 – 6/4	1
n/4 – 2/4		n/4 – 2/4
	n/4 +2/4	

1	n/4 – 2/4	
n/4 – 2/4		n/4 – 2/4
	n/4 – 2/4	1

Si *r* = 3, hay una solución como en el caso c) (11 lámparas). Pueden obtenerse más por giros y simetrías.

	n/4 – 3/4	1
n/4 + 1/4		n/4 – 3/4
	n/4 + 1/4	