Estrellas en las decoraciones hispanomusulmanas y polígonos estrellados

David Crespo Casteleiro[1] davidcasteleiro@hotmail.com
José Luis Rodríguez Blancas[2] jlrodri@ual.es

Resumen

Geogebra constituye una herramienta de excepción para el tratamiento de la Geometría dinámica y el acercamiento del patrimonio histórico y cultural al aula de Matemáticas. Las soberbias muestras del Arte Nazarí y Mudéjar en Andalucía, permiten el estudio de las mismas mediante polígonos estrellados, así como sus vínculos con la Geometría, la aritmética o los números complejos.

1. Introducción

El aprendizaje por competencias, se ha convertido en el foco de las últimas leyes educativas, estableciendo unas destrezas que los alumnos de la Educación Secundaria han de alcanzar al terminar esta etapa y que desde todas las materias debemos contribuir a su consecución. Si la LOE recogía la competencia *cultural y artística*, la recomendación 2006/962/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de la que se hace eco la LOMCE, marca como competencia clave la *conciencia y expresiones culturales*.

La concreción autonómica establecida por la Orden de 14 de julio de 2016, en la que se desarrolla el currículo de la ESO en Andalucía, establece como objetivo en el área de Matemáticas *valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual.*

---

[1] IES Ciudad de Dalías (Almería)
[2] Universidad de Almería

Las manifestaciones culturales en la Comunidad Andaluza sobre Arte Nazarí en la Alhambra de Granada o Mudéjar en los Reales Alcázares de Sevilla, constituyen dos paradigmáticos ejemplos para el estudio de la Geometría y los movimientos en el plano, que nos marcan las propuestas de la presente comunicación.

De forma más concreta, nos centraremos en el estudio de las estrellas que recubren los paramentos con este tipo de decoración y su recreaciones mediante polígonos estrellados, haciendo uso de un applet de Geogebra que permite al alumnado experimentar con distintas situaciones y que mediante preguntas dirigidas, le conduce a redescubrir los resultados matemáticos en los que se basan las diversas construcciones.

2. Estrellas en las decoraciones Nazaríes y Mudéjares

Los paramentos verticales de los palacios Nazaríes de la Alhambra de Granada y de los Reales Alcázares de Sevilla, están profusamente decorados con zócalos constituidos por piezas de cerámica construidos in situ, que perseguían una doble función: ornamental (como decoración de los mismos) y funcional (aportando calidez a las estancias y preservando las paredes de las humedades que afectan a las mismas por la capilaridad). A su vez, los paramentos horizontales, fundamentalmente las techumbres, se encuentran decoradas usando la madera como elemento arquitectónico. Tanto unos como otros, comparten los motivos geométricos como base de su decoración, formando recubrimientos periódicos, llamados mosaicos.

Estas composiciones, se hacen partiendo de una unidad mínima, la tesela fundamental, que mediante movimientos rígidos en el plano (rotaciones, simetrías y traslaciones) consiguen una bellísima forma de obtener recubrimientos periódicos. Con la composición de movimientos, cualquiera de estas decoraciones planas, tienen estructura de grupo y son isomorfas a uno de los 17 grupos cristalográficos planos. Pero el objeto de la presente comunicación, son las estrellas que aparecen en esta decoraciones, siendo más usuales las que contienen un número par de lados (6. 8, 12, 16, 32), no desdeñando los artistas otras posibilidades, aunque en menor medida (10 y 11 lados).

El cuadrado y el hexágono, son figuras muy recurrentes pues por un lado, recubren el plano y por otro son sencillas de dibujar. Duplicar sus lados, nos permite con facilidad trazar los polígonos de 8, 12, 16 y 32 lados. Aunque el pentágono no es construible con regla y compás, el conocimiento de la razón áurea hace posible, de forma indirecta, su trazado y posteriormente el duplicado de sus lados, pudiendo dibujar de esta forma el decágono.

La estrella de 11 puntas que presentamos, es una excepción encontrada en la Alhambra y que forma parte de un artesonado semiesférico en el templete oriental del Patio de los Leones (Cultura, 2015)

3. Contenidos

Los polígonos estrellados, surgen al unir convenientemente los vértices de un polígono mediante sus diagonales. El recurso más común, y en el que se centra esta comunicación, es cuando partimos de un polígono regular (aunque en los mosaicos que estudiamos aparecen polígonos en los que sus correspondientes estrellados que no lo son).

Denotando al polígono regular de n lados P_n, pretendemos encontrar las condiciones necesarias y suficientes que permitan unir sus vértices mediante diagonales que establezcan un recorrido que empiece y termine en el mismo vértice, habiendo pasado por todos los del polígono. Aunque podríamos afrontar el problema desde la teoría de grafos en cuyo caso, estaríamos buscando un ciclo de Hamilton, la solución se encuentra tan cerca que puede ser abordada mediante aritmética modular. En efecto, si identificamos cada vértice $V_i \in P_n$ con el elemento $[i] \in \mathbb{Z}_n$, $\forall i \in \{0,\ 1, \dots, n-1\}$ y establecemos la operación interna $V_i + V_j = V_{(i+j) m\acute{o}d\, n}$, se puede trivialmente comprobar que lo hemos dotado de estructura de grupo abeliano. Para determinar la forma de unir los vértices, bastaría con encontrar un subgrupo cíclico $< d > \in \mathbb{Z}_n$, es decir, que genere todo el grupo. Pero esta circunstancia es posible si y sólo si el máximo común divisor de d y n es 1, y lo notamos (d, n)=1. De esta forma, encontramos una imbricación entre la teoría de grupos finitos y la Geometría, en la que el subgrupo cíclico generado por el elemento d, establece la distancia entre dos vértices adyacentes, para que sea posible construir el polígono estrellado.

La notación más recurrente es debida al matemático de origen suizo Ludwig Schläfli (1814-1895), según la cual el polígono estrellado que surge el unir los vértices de un polígono de n lados a distancia d, se denota por {n/d}.

Vemos algunas implicaciones y efectos de la correspondencia establecida:

i. Si n=3, no hay diagonales ni por lo tanto no surge ningún polígono estrellado.
ii. Si n es un número primo, cualquier elección del subgrupo, no trivial, es decir a distancia 1 y por lo tanto vértices contiguos en el polígono de partida, genera un correspondiente polígono estrellado.
iii. Si n no es un número primo, encontraremos situaciones que van desde un polígono degenerado que se ciñe a una arista (por el ejemplo {4/2}), hasta diferentes estrellados {10/3} o {10/4} que en ocasiones no recorren todos los vértices.
iv. Si $d + d' = n \Rightarrow \{n/d\} = \{n/d'\}$.

La complejidad de los contenidos anteriormente expresados, se debe a la utilización de la Teoría de Grupos, que si bien nos permite demostrar de manera escueta bajo qué condiciones aparecen polígonos estrellados, dificulta su explicación en los primeros cursos de ESO. En cambio, en la práctica, sólo necesitamos conocer el concepto de fracción irreducible y simplificando aún más la cuestión, basta con ceñirnos al cálculo de (n, d) para determinar de manera inequívoca si el polígono {n/d} es o no estrellado.

Siendo exhaustivos, el tratamiento de los polígonos estrellados nos permite trabajar en el aula de Matemáticas la mayoría de los conceptos descriptivos que sobre polígonos abordamos en los primeros cursos de la Secundaria, i.e., polígonos regulares, diagonales y número de estas, ángulos de un polígono, e incluso intuitivamente mostrar una explicación de la fórmula que permite calcular la longitud de la circunferencia (nótese que el número de lados máximo que consideramos, es n=50, donde ya cuesta a simple vista discernir entre el concepto de polígono y el de circunferencia).

Por su parte, la construcción que recoge el applet de Geogebra que presentamos, dispone los vértices del polígono regular de partida haciendo uso de las raíces enésimas de un complejo, que aunque con variantes, pueden consultarse en Muñoz (2016).

4. Elementos de Geogebra

Para la construcción que presentamos, se han empleado elementos muy variados de Geogebra, que no sólo se circunscriben a herramientas geométricas. Veamos los más destacados:

i. Deslizadores: la construcción está dotada de dos deslizadores, que regulan el número de lados del polígono de partida (denotado por n y cuyo rango es de 5 a 50) y otro para la distancia entre vértices (nombrado por d).
ii. Listas: los vértices del polígono, constituyen una lista a la que se recurre para generar el correspondiente estrellado. Se recurre a las raíces enésimas de la unidad, en vez de a la herramienta polígono regular, para no distorsionar las imágenes al usar los deslizadores.
iii. Casilla de control y cuadro de texto: para visualizar el polígono estrellado o sólo trabajar con el polígono regular de partida.
iv. Exportar el archivo a GeoGebra Tube.

5. Propuesta de aula

En una primera sesión, se demanda al alumnado la búsqueda de mosaicos de la Alhambra y de los Reales Alcázares, que contengan alicatados y techumbres para que identifique polígonos estrellados (sin dar la definición, pues el concepto es de uso general) y que anoten el número de vértices de las estrellas más recurrentes. Posteriormente, se les entrega una ficha que contiene actividades iniciales sobre polígonos y se les pide que traten de reproducir manualmente una de las estrellas que aparecen en las imágenes.

En la segunda sesión, se ponen en común los resultados más relevantes obtenidos y se les indica la dirección del applet en GeoGebra Tube para que, experimentando con él, puedan terminar las actividades propuestas. Las consideraciones más importantes, así como el applet, pueden verse en http://matesdedavid.blogspot.com.es/2017/02/poligonos-estrellados.html.

Dedicamos una última sesión, a la corrección de las actividades y a complementar el trabajo realizado con otros monumentos hispanomusulmanes, de los que encontraremos interesantes ejemplos en Toledo o Zaragoza.

Esta actividad que puede llevarse a cabo en 1º de ESO, puede a su vez ser introductoria de los movimientos del plano en 3º de ESO y complementarse con Crespo, Rodríguez y Sánchez (2013) o Crespo y Rodríguez (2014), donde encontramos actividades manipulativas para recrear con distintas técnicas mosaicos y lacerías.

Referencias

1. Crespo, D., Rodríguez, J. L. y Sánchez, M. C. (2013) *Trenzados y mosaicos árabes con cuerdas*, Revista Épsilon 2013, Vol. 30(3), nº 85, 69-82
http://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/[field_volumen-formatted]/epsilon85_5.pdf

2. Crespo, D., y Rodríguez, J. L. (2014): *Actas del XV CEAM*, 550-558
http://thales.cica.es/xvceam/actas/pdf/actas.pdf

3. Cultura (2015) *Hallados dibujos nazaríes en el Patio de los Leones de la Alhambra*, Recuperado el 8 de marzo de 2017, de

http://cultura.elpais.com/cultura/2015/12/02/actualidad/1449058589_152485.html

4. Muñoz, J. L. (2016) *Un mundo imaginario. Potencias de un número imaginario*, Revista Suma 2016, nº 83, 103-110.