ECUACIONES, SISTEMAS E INECUACIONES CON GEOGEBRA

1. Introducción

Herramientas y comandos de CAS que utilizaremos a lo largo del taller

HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN			
Nombre		**Utilidad**	**Comando equivalente**
	Evalúa	Halla el resultado exacto de la expresión numérica	Evalúa[<Expresión>]
	Valor numérico	Calcula el valor numérico aproximado de una expresión	ValorNumérico[<Expresión>] ValorNumérico[<Expresión>,<Precisión>]
	Conserva la entrada	Conserva y comprueba la entrada	
HERRAMIENTAS DE CÁLCULO			
Nombre		**Utilidad**	**Comando equivalente**
	Factoriza	Factoriza un número o polinomio en factores primos	Factoriza[<Expresión>] Factores[<Expresión>] FactorC[<Expresión>]
	Desarrolla	Desarrolla la expresión eliminando los paréntesis	Desarrolla[<Expresión>]
	Sustituye	Permite evaluar una expresión que dependa de varias variables	Sustituye[<Expresión>, <De>, <A>]
	Resuelve	Resuelve una ecuación o un sistema de ecuaciones	Resuelve[<Expresión>] Resuelve[<Lista de Ecuaciones>, <Lista de variables>] Soluciones[<Ecuación>] SolucionesC[<Ecuación>]
	Resolución Numérica	Resuelve una ecuación o un sistema de ecuaciones dando una aproximación a un cierto orden	SolucionesN[<Ecuación>] SolucionesN[<Lista de ecuaciones>, <Lista de variables>]
HERRAMIENTAS GENERALES			
Nombre		**Utilidad**	**Comando equivalente**
	Eliminar	Borra objeto	

Algunos atajos

En una fila en blanco, si pulsamos la tecla:

Barra espaciadora	Repite la salida previa
=	Repite la entrada previa
)	Repite la entrada previa encerrada entre paréntesis

2. Ecuaciones

Actividad 1: Resuelve las ecuaciones de 2º grado con CAS y gráficamente.

a) $x^2+2x-35=0$ b) $3x^2+11x-4=0$

c) $x^2-4x-1=0$ d) $5x^2-2x+1=0$

Actividad 2: Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\dfrac{3x+2}{5}-\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x-3}{6}+\dfrac{x-2}{3}\right)=\dfrac{1}{12}\left(3x-4-\dfrac{2x-7}{3}\right)$

c) $9x^4-3x^3-32x^2-4x+16=0$ d) $\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{15x}{x^2-1}=\dfrac{-30x}{x^3+2x^2-x-2}$

Actividad 3: Halla los puntos de corte con el eje *X* de la siguiente función polinómica.

$g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (donde *a*, *b*, *c*, *d* y *e* son parámetros)

Resuélvelo de forma gráfica y analítica.

Actividad 4: Factoriza los siguientes polinomios y di cuales son su raíces

a) $x^5+8x^4+21x^3+18x^2$ b) $3x^4+12x^3-21x^2+66x+72$ c) x^5-16x

Actividad 5: Resuelve las ecuaciones con CAS o gráficamente

a) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x+2}=3$ b) $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{4x+12}{3x+3}$ c) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{1}{x^2-a^2}$

Actividad 6: Resuelve las ecuaciones con CAS o gráficamente

a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$ b) $\sqrt{3(10-x)}-\sqrt{2(x-5)}=1$

c) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x$ d) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}$

Actividad 7: Resuelve las ecuaciones logarítmicas con CAS y gráficamente. ¿Se pueden resolver todas estas ecuaciones con CAS? ¿y gráficamente?

a) $\lg(4-5x)+\lg(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$ b) $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2$

c) $4^{x^2+1}=2^{5x+5}$ d) $9^x+5\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}=111$

Actividad 8: Resuelve las ecuaciones

a) $sen x+\cos x=0$ b) $sen^2 x+\cos x=\dfrac{5}{4}$ c) $sen^2 x+tag^2 x=0$

Actividad 9: Resuelve con el comando SolucionesN y gráficamente las ecuaciones

a) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{x}{5}$ b) $3\cos(x)=x^2-1$ c) $tg(a)-3=a-1$

3. Sistemas de ecuaciones

Actividad 10: Resuelve los sistemas

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 15y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

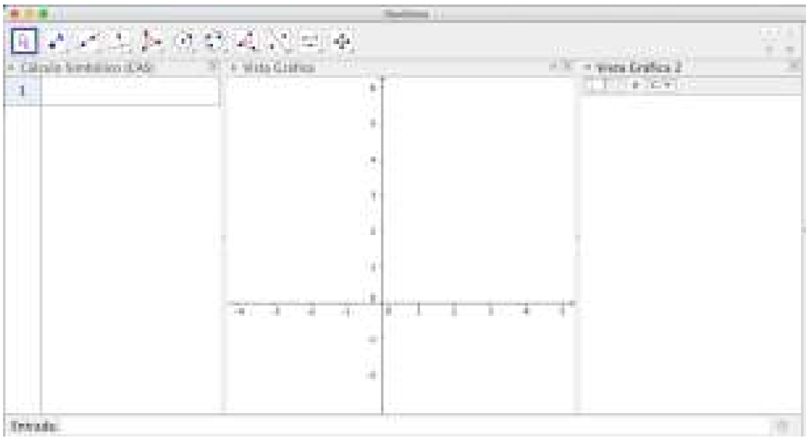
c) $\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 5 \\ 2\mathrm{x} - \mathrm{y} = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{\mathrm{y}+2}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{2(\mathrm{x}-1)}{3} - \frac{\mathrm{y}+2}{6} = -1 \end{cases}$

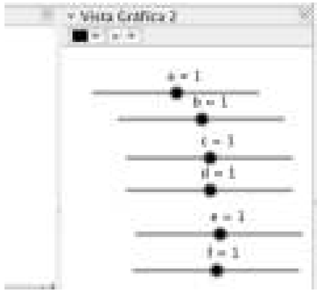
Actividad 11: Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones. Clasificación según el número de soluciones.

Con esta actividad pretendemos introducir el concepto de resolución gráfica de cualquier sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando la Vista CAS y la Vista gráfica. Para ello, se estimula al alumnado a deducir qué relación existe entre los coeficientes de las dos ecuaciones dependiendo de la posición relativa de las rectas.

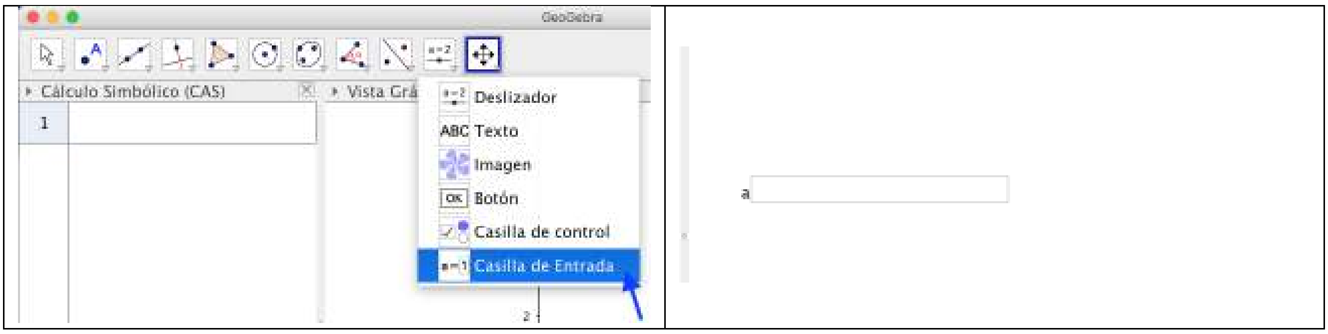
1. Se activan la Vista CAS, la Vista Gráfica 1 y 2 y se oculta la Vista Algebraica.



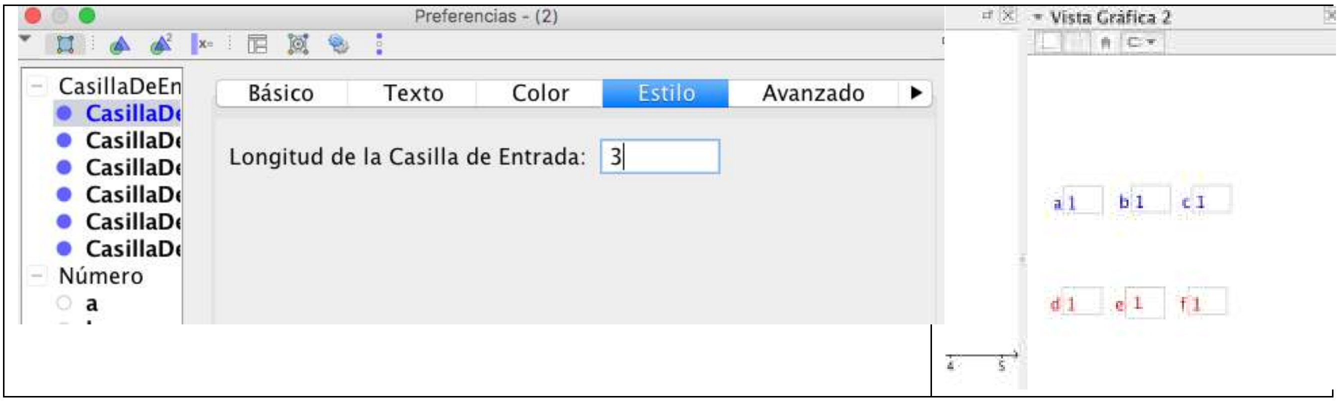
2. En la Vista Gráfica 2 se introducen seis deslizadores con los siguientes parámetros y a continuación los ocultamos.



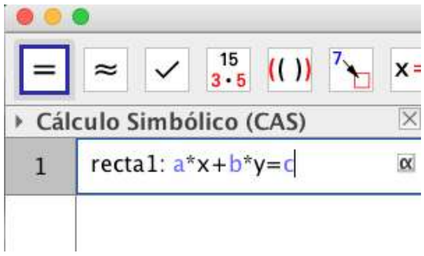
3. En la Vista Gráfica 2 se introducen ahora seis casillas de entrada asociadas con los deslizadores creados y con el mismo nombre:

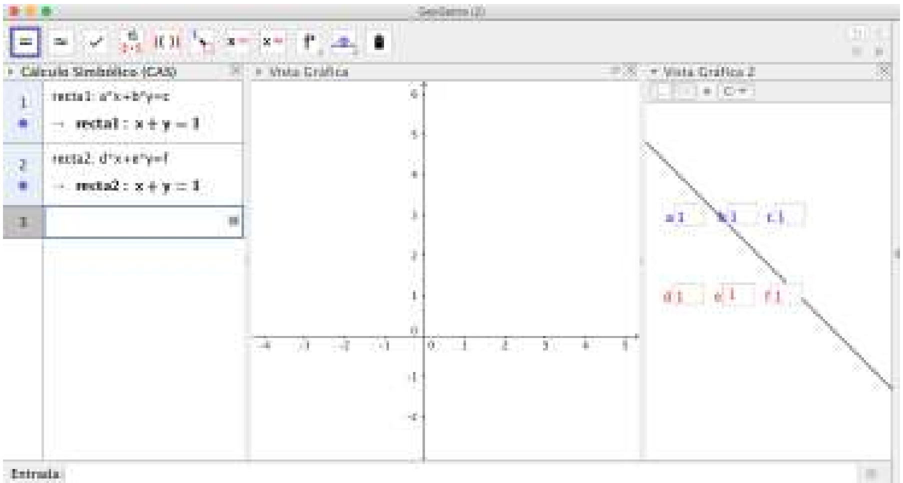


Una vez introducidas las seis casillas de entrada modificamos su aspecto visual. Pulsando el botón derecho sobre el objeto, elegimos la opción propiedades, en la pestaña estilo introducimos por ejemplo el 3 como longitud de la casilla de entrada. También podemos modificar su color.



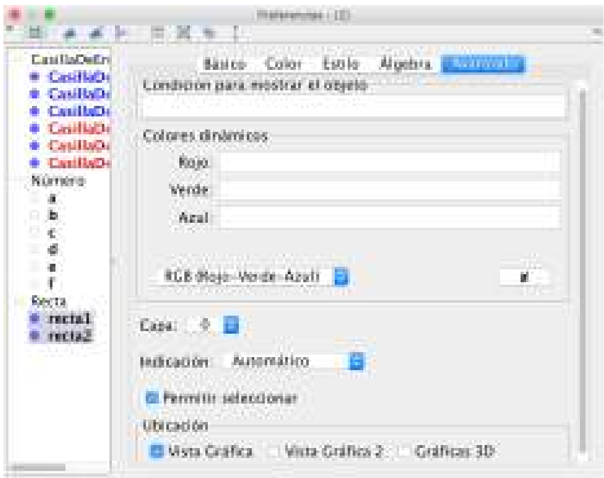
4. En la Vista Cas definimos cada una de las rectas que conforman nuestro sistema de ecuaciones. Por ejemplo, podemos llamarlas recta1 y recta2:



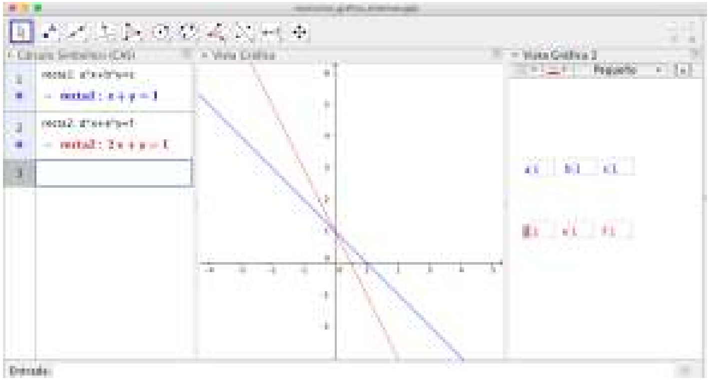


Las dos rectas se han dibujado en la Vista Gráfica 2. Nos interesa ubicarlas en la Vista Gráfica 1. Nos situamos sobre una de las rectas en la Vista Gráfica 2 con el puntero, pulsamos el botón derecho de ratón y elegimos la opción propiedades.

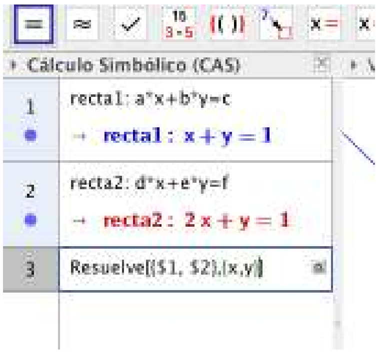
Del menú que emerge, seleccionamos la pestaña *Avanzado* y activamos solo la Vista Gráfica 2:

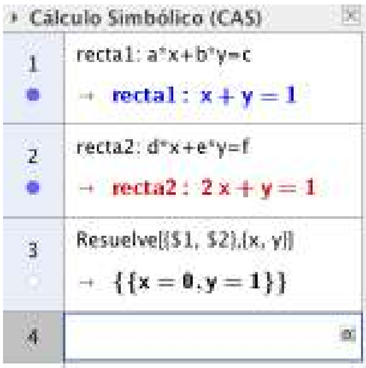


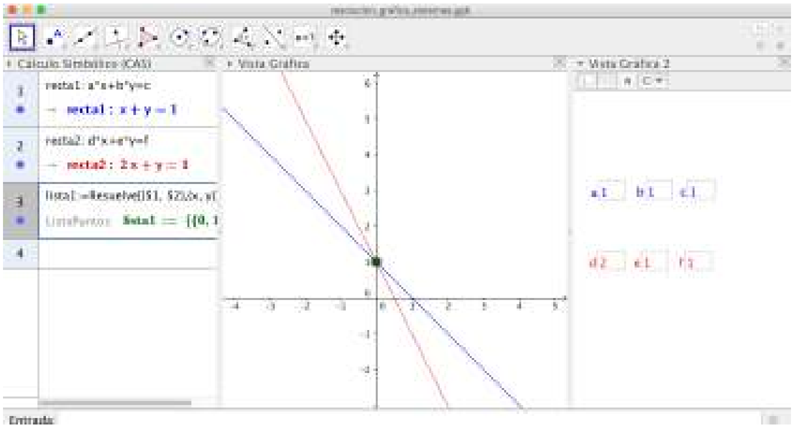
Por último, nos posicionamos sobre la recta para cambiar su estilo.



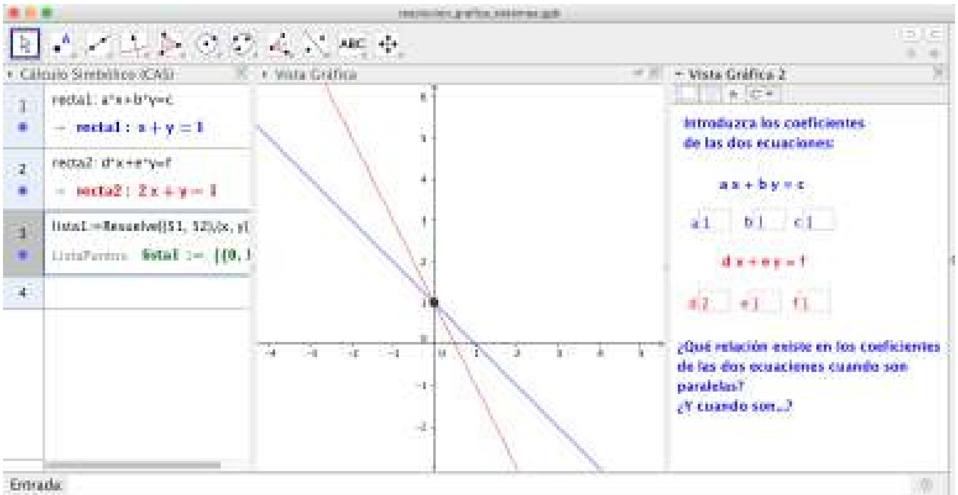
5. Utilizamos la vista CAS para resolver el sistema de forma analítica utilizando el comando Resuelve y la referencias entre filas de forma dinámica (utilizamos $n si queremos emplear la salida de la fila n y $$n si es la entrada de la fila n):







6. Introducimos el texto en la Vista Gráfica 2:



Actividad 12: Resuelve los sistemas

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 5 \\ x + 2y + z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \\ 5x + 2y + 14z = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

Actividad 13: Resuelve los siguientes sistemas con el método de Cramer o de Gauss

a) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$

Actividad 14: Discute los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

Actividad 15: Resuelve con CAS los sistemas

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 2xy = 16 - y^2 \\ x^2 - y^2 = 72 \end{cases}$

Actividad 16: Resuelve gráficamente los sistemas

a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y + 3x - 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

Actividad 17: Resuelve con CAS y gráficamente los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

Actividad 18: Resuelve con CAS y gráficamente los sistemas

a) $\begin{cases} xy = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{1}{xy} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \lg x - \lg y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$ f) $\begin{cases} 10xy = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 4 \end{cases}$

Actividad 19: Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$ determina para que valor de k:

a) No tiene solución
b) Tiene una única solución
c) Tiene infinitas soluciones

Actividad 20: Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ 4x+2y-z=-3 \\ 2kx+y-4z=-4 \end{cases}$ determina para que valor de k:

a) No tiene solución
b) Tiene una única solución
c) Tiene infinitas soluciones

4. Inecuaciones

Actividad 21: Resuelve las siguientes inecuaciones con CAS:

a) $2x-3<x-1$ b) $-3x-2\leq 5-\frac{x}{2}$ c) $\frac{2-5x}{3}-\frac{x-1}{2}\leq 2$

Actividad 22: Resuelve

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$ b) $(x - 1)\cdot(x + 5) - (x+1) \leq -2(x - 6)$ c) $\frac{2x^2+x-3}{3}-\frac{2-3x}{6}\leq\frac{(x-1)^2-1}{4}$

Actividad 23 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x-3<1 \\ x+6\geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(-5x+4)+3x>6x-1 \\ 2(x+3)-10<14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1\geq 21 \end{cases}$

Actividad 24: Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones utilizando la Vista CAS y la Vista de la Hoja de Cálculo:

a) $\begin{cases} 5x+2y\geq 10 \\ 2x+4y>8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y<1 \\ 2x-3y<0 \\ 5x+y>1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x-2y>5 \\ 2x-3y\leq 1 \\ -3x+y\geq 2 \end{cases}$

Actividad 25: Representa gráficamente la región factible determinada por las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\geq 5 \\ 4x+3y\leq 30 \end{cases}$$

Calcula la solución que hace mínima la función objetivo $z = x + 2y$ sometida a las restricciones anteriores.

Actividad 26: Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+y\leq 8 \\ 5x+4y\geq 12 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

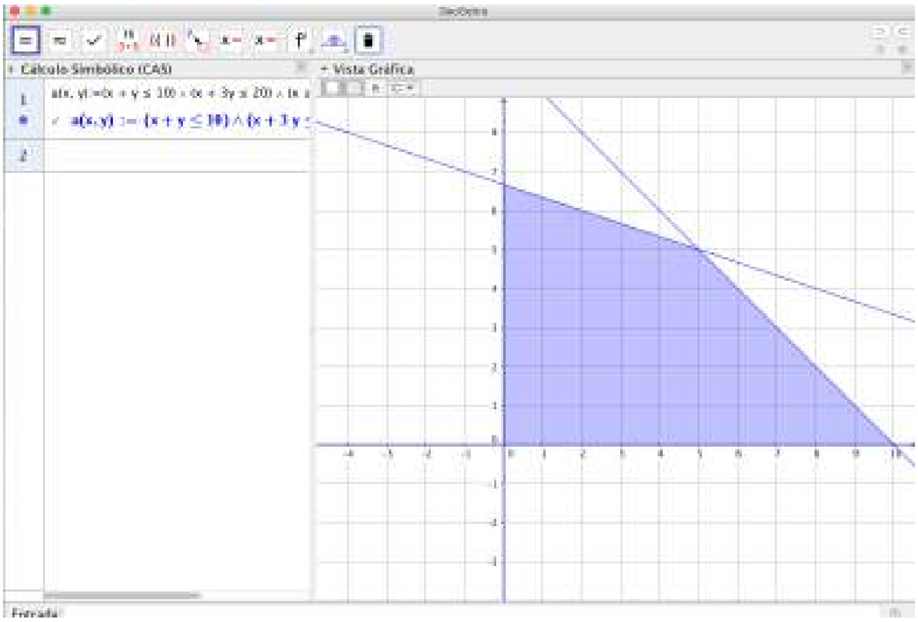
Minimiza y maximiza en dicho reciento el valor de la función: f(x, y) = 15x + 10 y

Actividad 27: Halla la región del plano determinada por la intersección de las zonas definidas por $y\leq 2$, $x>-4$ y $x-y<3$

Actividad 28: Halla los valores de x e y que hacen máxima la función $z = 3x + 5y$, sujeta las restricciones siguientes:

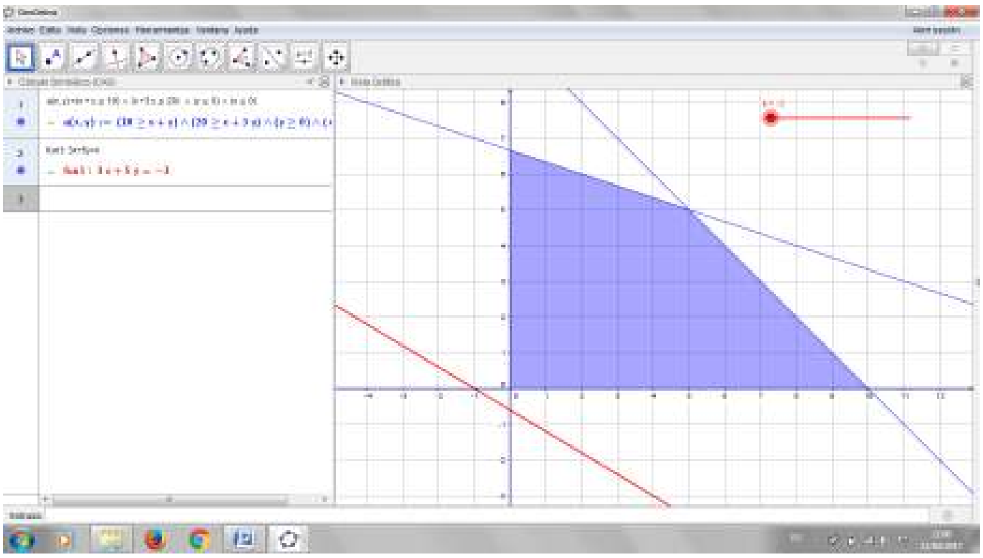
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1. En primer lugar seleccionamos la vista CAS y hallamos la región factible de la función que queremos maximizar. Introducimos cada una de las restricciones entre paréntesis unidas por el conector conjunción ($\wedge$). Pulsamos la herramienta valor exacto $\boxed{=}$ o conserva la entrada ✓ y por último activamos la salida para obtener la representación gráfica de la región factible:

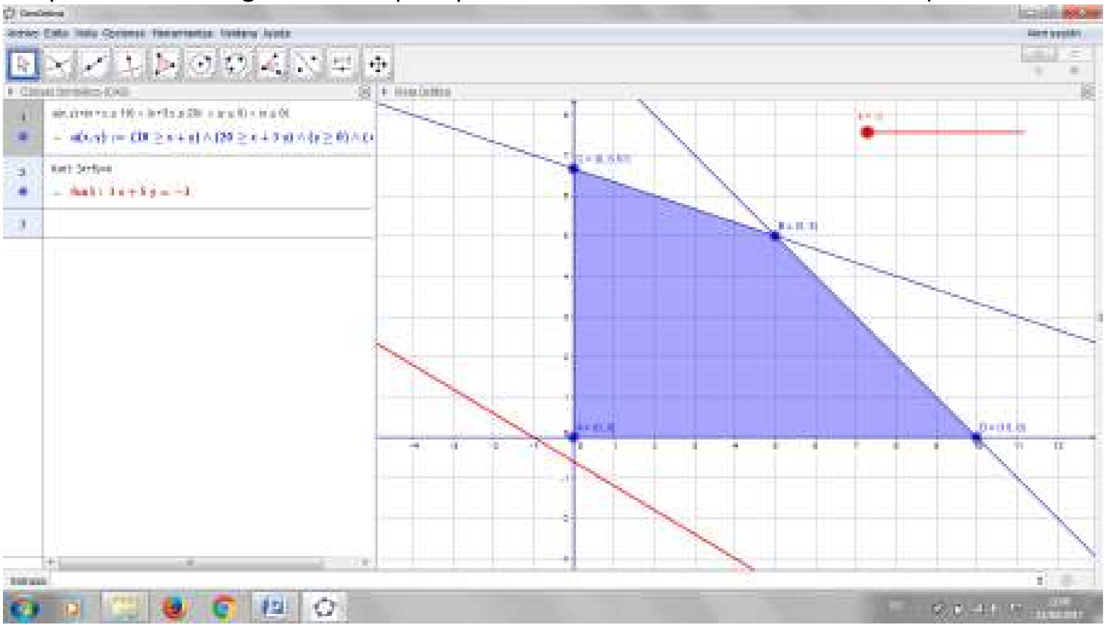


2. A continuación queremos hallar el máximo de nuestra función objetivo sujeta a las restricciones dadas por la región obtenida. Para ello, creamos en primer lugar un deslizador en la Vista gráfica

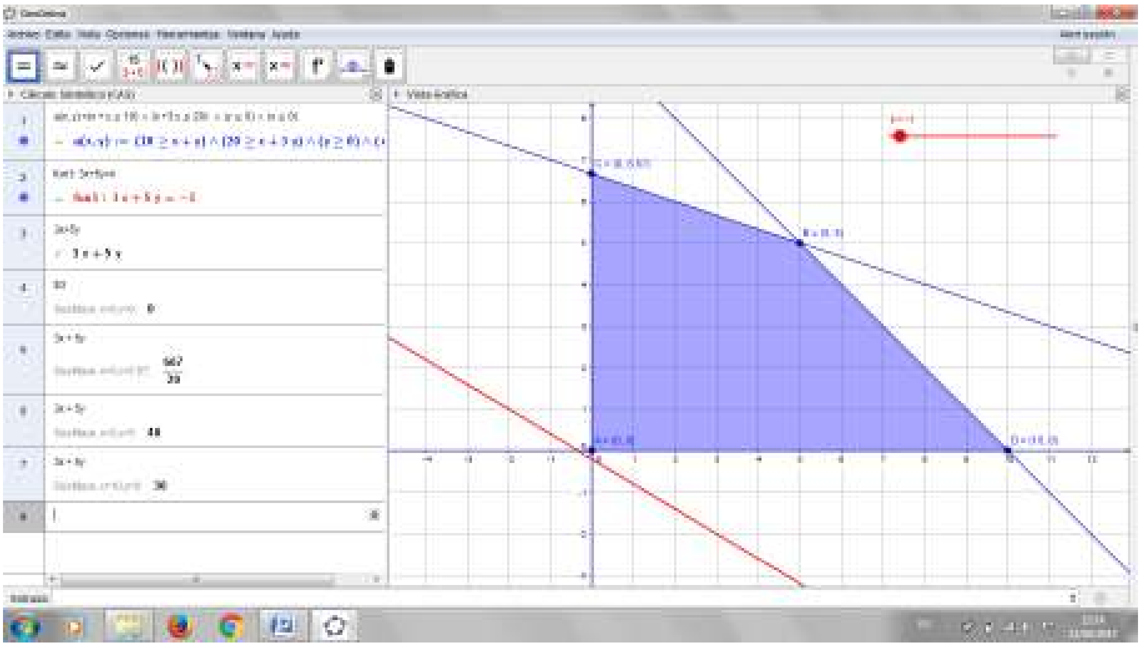
3. Definimos nuestra función objetivo en la Vista CAS dependiente del parámetro k:



4. Hallamos los vértices de la región factible (previamente tendremos que definir en la vista gráfica las rectas que definen la región factible para poder hallar la intersección de los lados):



5. Por último, desplazando el deslizador k se observa claramente que el valor máximo de la función se alcanza en el punto B, que es el último punto que toca de la región. Para hallar el valor exacto que toma la función en cada punto, lo único que tenemos que hacer es evaluar la función en dichos vértices:



<u>Actividad 29</u>: Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas. El fabricante dispone para la confección de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de poliéster. Para cada chaqueta se necesitan 1,5 m de algodón y 1 m de poliéster. El precio del pantalón se fija en 50 € y el de la chaqueta en 40 €. ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que estos consigan una venta máxima?

Actividad 30: Con el comienzo del curso se va a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán 6.5 y 7 €, respectivamente. ¿Cuántos paquetes les conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Actividad 31: Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 800 € y el de uno pequeño 600 €. Calcular cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

Actividad 32: Investiga qué ecuaciones no lineales con tres incógnitas se pueden representar en la Vista Gráficas 3D de GeoGebra.

Actividad 33: María y Antonio quieren hacer cajas para guardar los juguetes de su hija. Compran planchas de cartón de 84 cm x 56 cm. Para construir cada caja recortan cuadrados iguales en las cuatro esquinas y los doblan como se muestra en la figura.

a) Calcula la expresión algebraica que determina la superficie y el volumen de cada caja sin tapa en función del lado *x* de los cuadrados recortados.
b) Construye una tabla de valores que muestre la superficie y el volumen para distintos valores de *x*.
c) ¿Para qué valor de *x* el volumen es máximo?