

Ideas para el uso de GeoGebra 3D en el aula

Miguel Pino

22 de abril de 2017

Resumen

GeoGebra en su versión 5 incorporó una serie de herramientas que permiten realizar construcciones en 3D, esto abre un abanico de posibilidades a explotar en el aula. En este taller vamos a realizar actividades de fácil elaboración para llevar a la clase de secundaria o bachillerato.

Los participantes implementarán distintas construcciones que permiten trabajar los desarrollos o secciones de cuerpos geométricos, la obtención de las cónicas como intersección de un cono y un plano, resolución de problemas geométricos: posición relativa de planos, rectas, distancias, simetrías, proyecciones, ...

1. Introducción

Si repasamos la normativa actual, tanto estatal como autonómica, en la que se determina el currículum de Matemáticas en Secundaria o en Bachillerato, se recoge:

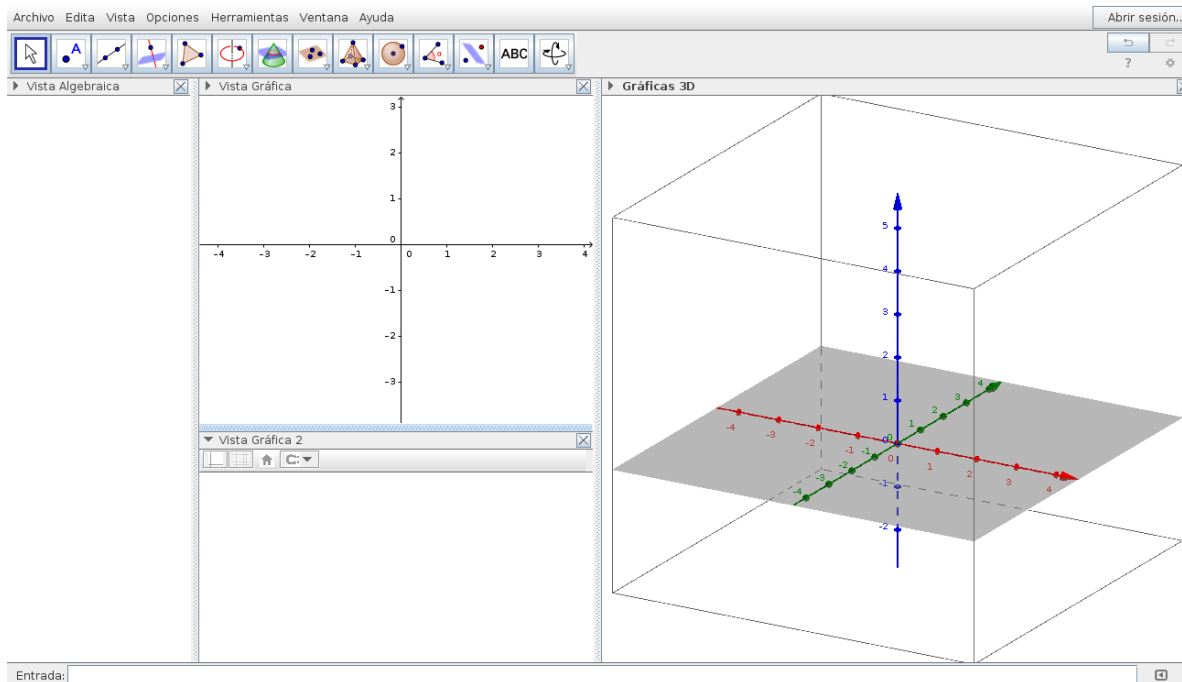
El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato establece que dentro de los contenidos a trabajar en Matemáticas se encuentran las “Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas”.

La Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía recoge “en el bloque de Geometría, es conveniente conjugar la metodología tradicional con la experimentación a través de la manipulación y con las posibilidades que ofrecen los recursos digitales interactivos para construir, investigar y deducir propiedades”, asimismo también se afirma que “el uso de programas y aplicaciones informáticas (app) de geometría dinámica hacen que la enseñanza de la Geometría sea más motivadora consiguiendo un aprendizaje más efectivo en el alumnado”

En la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, en el apartado correspondiente a Matemáticas I y II se recogen la “Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: ... c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico”.

Con esta pincelada se puede observar que el uso de las TIC en el aula se considera imprescindible y dentro de las herramientas con las que podemos contar está GeoGebra que es completa, sencilla, intuitiva, accesible y potente.

2. Presentación del interface



Para trabajar con 3D es conveniente tener una organización como se observa en la imagen superior. Todas las ventanas están interconectadas de modo que lo que se hace en una de ellas repercute en las demás. Los iconos de la parte superior muestran acciones directas y varían según estemos en la vista 2D o 3D.

3. Conceptos elementales

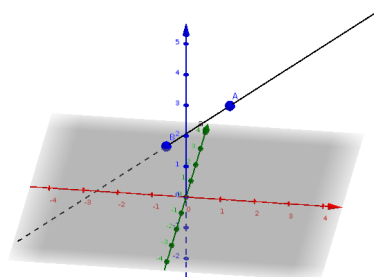
3.1. Punto

Para insertar un punto en la vista 3D se puede hacer de varias formas, aunque la más práctica y sencilla es usar la línea de entrada tecleando las coordenadas del punto.

3.2. Recta

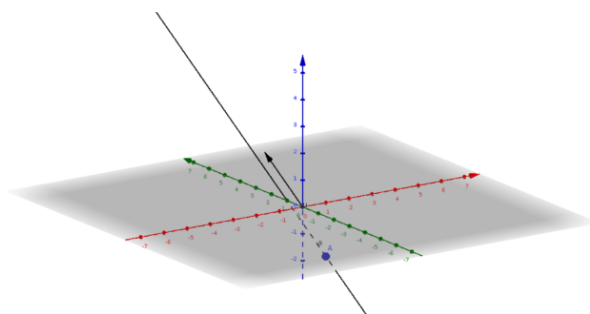
3.2.1. Recta por dos puntos

Construir una recta, a partir de dos puntos $A=(1,2,3)$ y $B=(2,0,-1)$. Introducimos los dos puntos en la línea de entrada y luego $\text{Recta}[A,B]$. Mueve con el ratón cualquiera de los dos puntos y observa como se modifica la recta y su ecuación vectorial, simultáneamente se modifican los valores en la vista algebraica.



3.2.2. Recta por un punto con un vector de dirección

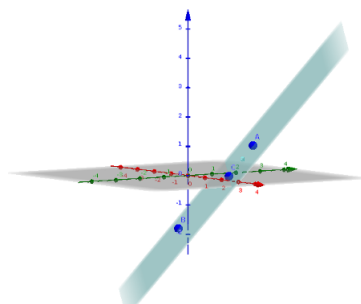
Crea en la entrada $A=(1,0,-2)$ y $u=(-1,1,2)$. Observa en la vista algebraica cómo se identifica a A como un punto y a u como vector. Halla la recta a partir del punto y el vector escribiendo en la entrada $\text{Recta}[A,u]$.



3.3. Plano

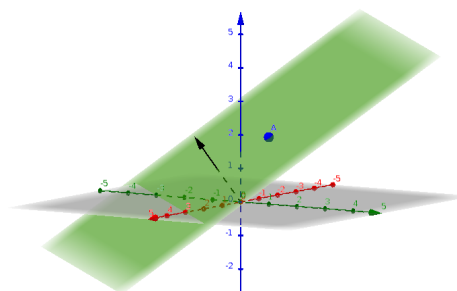
3.3.1. Plano por tres puntos

Crea tres puntos no alineados A, B y C. Construye el plano que los contiene $\text{Plano}[A,B,C]$. Mueve alguno de los puntos, puedes hacerlo con el ratón sobre el punto o bien editándolo y variando sus coordenadas. Observa cómo GeoGebra vuelve a calcular el plano. En la vista algebraica, además de los puntos tendrás la ecuación general del plano.



3.3.2. Plano a partir de un punto y su vector normal

Crea en la entrada $A=(0,1,-2)$ y $u=(1,1,2)$. Ahora construye el plano que pasa por A y tenga a u como vector normal, para ello escribe en la entrada $\text{Plano-Perpendicular}[A,u]$. Ahora vamos a cambiar un poco la estética del plano, en la vista algebraica pincha sobre la ecuación del plano con el botón derecho del ratón, se mostrará un nuevo menú y haz click en **propiedades**. Cambia el color del plano a verde y su opacidad.



4. Geometría analítica del espacio

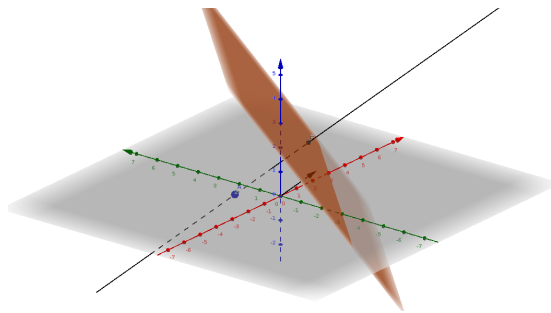
4.1. Proyecciones

Gracias a GeoGebra se pueden crear construcciones que muestren de forma sencilla los procedimientos que se siguen para determinar proyecciones

4.1.1. Proyección de un punto sobre un plano

Dados el punto $A=(1,3,-1)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$, halla la proyección de A sobre π

1. Determina el vector normal del plano `VectorNormal[<plano>]`.
2. Ecuación de la recta perpendicular al plano por el punto A.
3. La proyección será el punto de corte de la recta y el plano.



4.1.2. Proyección de un punto sobre una recta

Crea un punto cualquiera y una recta que no contenga a ese punto. Determina la proyección de ese punto sobre la recta.

4.1.3. Proyección de una recta sobre un plano


Análogamente a la actividad anterior, crea una recta y un plano que no la contenga y determina la proyección de esa recta sobre el plano.

4.2. Distancias

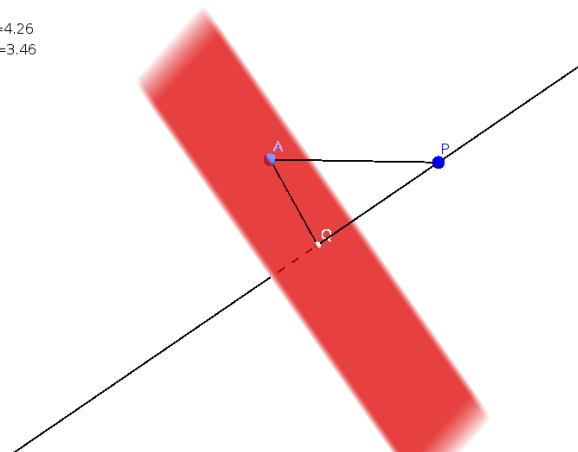
4.2.1. Distancia de un punto a un plano

Vamos a realizar una construcción que permita al alumnado comprobar la distancia de un punto exterior P a un plano, a cualquiera de los puntos del plano. El siguiente paso es ver en qué punto se obtiene la distancia mínima.

Dado un plano cualquiera $p:x+y+z=0$ y un punto $P=(1,2,3)$ exterior a él. Determina la distancia del punto al plano.

1. Introduce en la entrada el plano y el punto.
2. Con el icono punto  crea un punto A en el plano.
3. Determinamos la distancia de A a P y creamos un campo de texto que muestre esa distancia.
4. Recta perpendicular a p que pasa por P. Se interseca la recta con el plano en el punto Q.
5. Comprobamos que la mínima distancia se da en Q, para ello podemos usar el triángulo rectángulo que se forma con A, P y Q.

$d(P,A)=4.26$
 $d(Q,A)=3.46$



4.2.2. Distancia de un punto a una recta

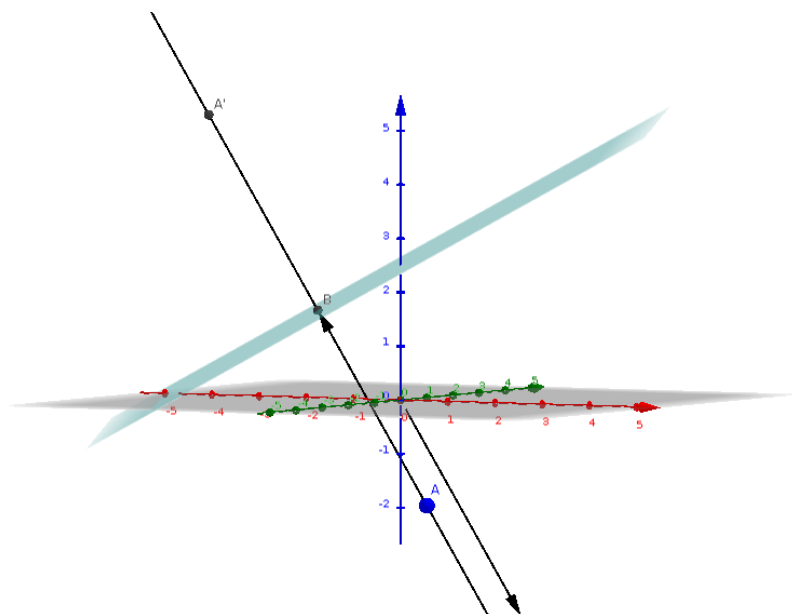
Realizando un procedimiento similar al anterior se puede realizar una actividad en la que se razone el cálculo de la distancia de un punto a una recta.

4.3. Simetría


4.3.1. Simétrico de un punto respecto de un plano

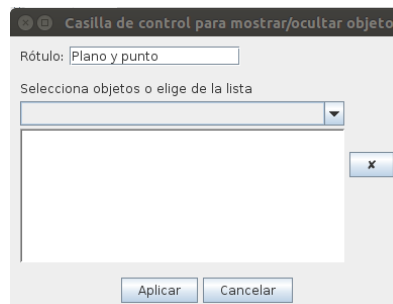
Determina el simétrico de $A=(0,1,-2)$ respecto del plano de ecuación $\pi \equiv 2x + y - 4z = -10$

1. Introduce las coordenadas del punto y el plano.
2. Construye recta r que es perpendicular a π y pasa por A .
3. Halla el punto B , intersección de r y π .
4. Determina A' , simétrico de A respecto de π .



- Plano y punto
- Vector normal del plano
- Recta perpendicular al plano por A
- Punto de corte recta y plano
- Vector AB
- Simétrico

Vamos a incorporar casillas de control  que permitan mostrar los pasos que se siguen para resolver el ejercicio analíticamente. Para ello hacemos click en el icono de casilla de control y nos aparecerá un desplegable como el de la imagen de la derecha y asociamos a esa casilla el o los objetos que deseamos visualizar u ocultar al seleccionarlo. Repetimos el proceso las veces que sea necesario.



4.3.2. Simétrico de un punto respecto de una recta

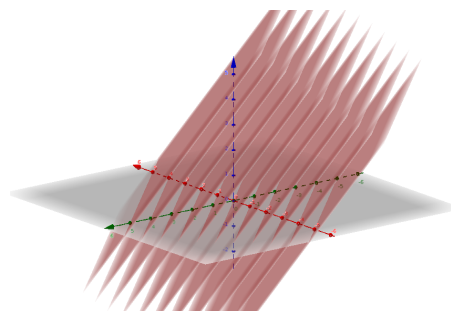
Determina el punto simétrico de $A=(1,0,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Luego con ayuda de las casillas de verificación muestra los pasos de construcción.

4.4. Hazes de planos

4.4.1. Haz de planos paralelos

Considera el plano $a \equiv x + y + z = 0$, determina un haz de planos paralelos al dado.

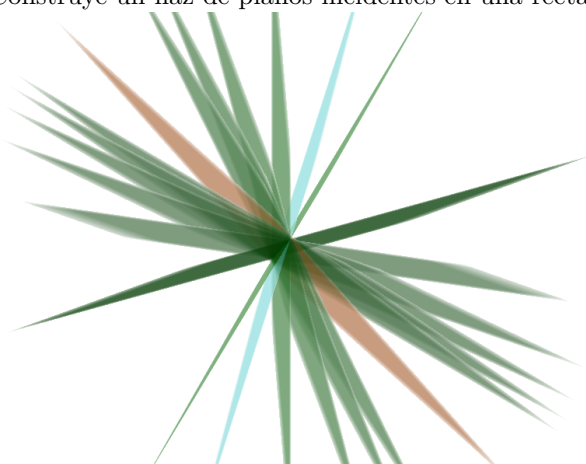
1. Crea el plano a y un deslizador b en el área gráfica con valores comprendidos entre -5 y 5 con un incremento de 1 .
2. Introduce en la línea de entrada $x + y + z + b = 0$
3. Mueve el deslizador y observa como se obtiene una familia de planos paralelos.



Otra forma de obtener una familia de planos paralelos es utilizando el comando **secuencia**. Escribe en la línea de entrada `Secuencia[x+y+z+k=0,k,-5,5,1]`.

4.4.2. Haz de planos incidentes en una recta.

Construye un haz de planos incidentes en una recta



5. Aplicaciones

5.1. Selectividad Andalucía junio 2016. Ejercicio 4 Opción A.

Considera el punto $P=(1,0,5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
- Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .

5.2. Selectividad Andalucía junio 2016. Ejercicio 4 Opción B.

Considera las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

- Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
- Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.

5.3. Selectividad Andalucía septiembre 2016. Ejercicio 4 Opción B.

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

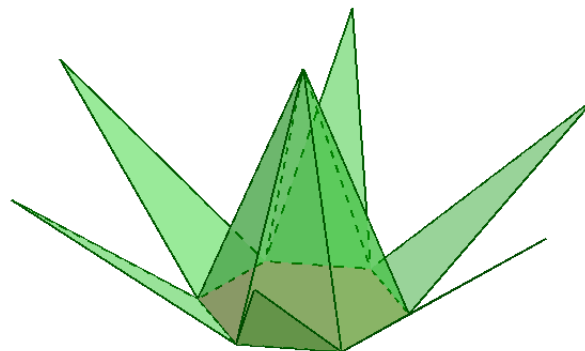
$$x = y = z \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

6. Sólidos - Desarrollos

6.1. Pirámide

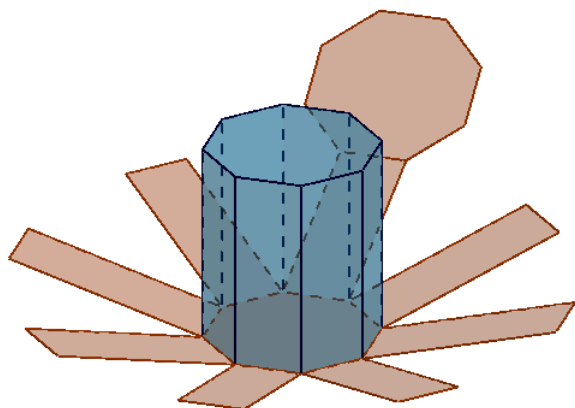
Vamos a construir una familia de pirámides de base polígonos regulares y altura variable. Completaremos la actividad con el desarrollo de sus caras.

1. Crea un punto $O=(0,0,0)$.
2. Deslizador l con valores entre 3 y 8, incremento 1.
3. Deslizador h con valores entre 1 y 5, incremento 0,2.
4. Circunferencia de centro O y radio l.
5. Punto A en la circunferencia.
6. Construimos A' rotando A $\frac{360^\circ}{l}$ con centro en O. $A' = \text{Rota}[A, \frac{360^\circ}{l}, O]$.
7. Polígono regular con lados A, A' y l lados $p = \text{Polígono}[A, A', l]$.
8. Pirámide de base el polígono y altura h.
9. Desarrollo de la pirámide




6.2. Prisma

Siguiendo los pasos de la actividad anterior construye una familia de prismas y su desarrollo.

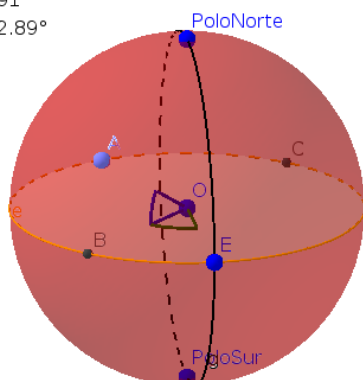


7. Coordenadas geográficas. Longitud y latitud de un punto.

Vamos a realizar una construcción que simule el globo terráqueo y que ayude al alumnado a conocer los conceptos de latitud y longitud.

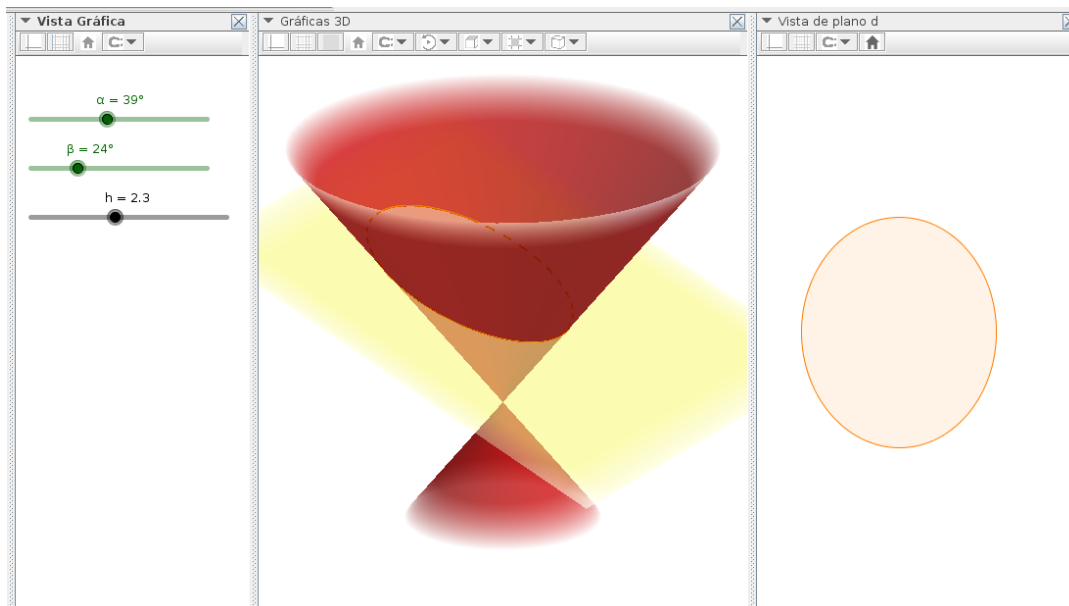
1. Insertamos los puntos $O=(0,0,0)$, $\text{PoloNorte}=(0,0,3)$, $\text{PoloSur}=(0,0,-3)$ y los fijamos.
2. Construimos la $\text{Esfera}[O,\text{PoloNorte}]$.
3. Supongamos que el ecuador y el meridiano de greenwich se cortan en el punto $E=(0,3,0)$. Este será nuestro origen.
4. Determinamos el meridiano de greenwich $g=\text{Circunferencia}[\text{PoloNorte},E,\text{PoloSur}]$.
5. Construimos el plano $z=0$, su intersección con la esfera será el ecuador (llámalo e).
6. Con el icono punto  crea un punto A en la esfera.
7. A continuación su meridiano $m=\text{Circunferencia}[\text{PoloNorte},A,\text{PoloSur}]$.
8. $P=\text{Interseca}[m,e]$ será la proyección del punto sobre el ecuador.
9. La longitud será el ángulo que forman E y P , mientras que la latitud será el ángulo entre P y A

Latitud= 30.91°
Longitud= 42.89°



8. Cónicas

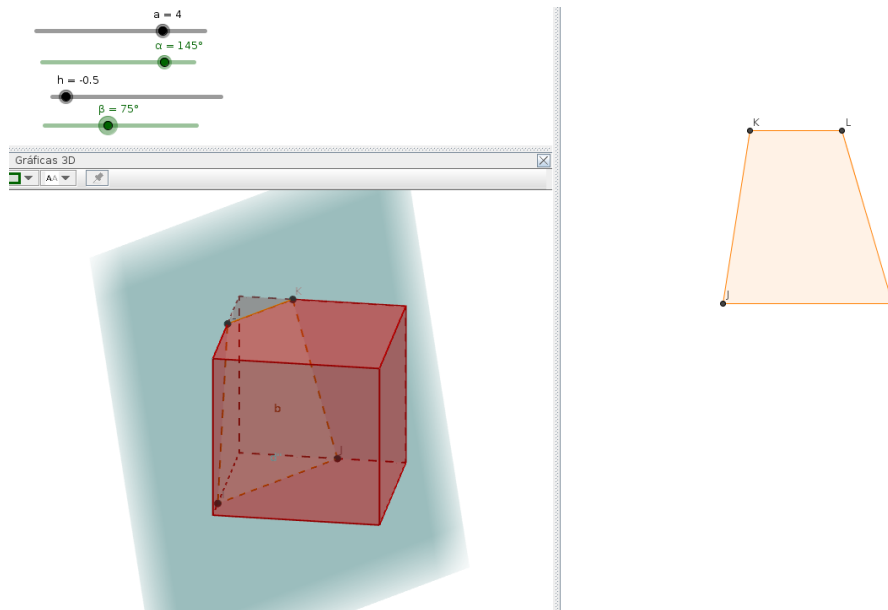
Vamos a realizar una construcción que nos permita mostrar a los alumnos cómo se obtienen las distintas cónicas a partir de la intersección de un cono y un plano



1. Crea los siguientes deslizadores
 - a) α ángulo con valores entre 0 y 90° , incremento 1.
 - b) β ángulo con valores entre 0 y 90° , incremento 1.
 - c) h tomando valores entre 1 y 4 con incremento 0.1.
2. Punto $O=(0,0,0)$ y el vector $v=(0,0,h)$.
3. Cono infinito $a=\text{ConoInfinito}[O,v,\alpha]$.
4. Plano que contiene los ejes X e Y $\text{Plano}[\text{EjeX},\text{EjeY}]$.
5. $c=\text{Rota}[b, \beta, \text{EjeY}]$ donde b es el plano creado anteriormente.
6. $d=\text{Traslada}[c, v]$.
7. Interseca el cono y el plano d. $\text{Interseca}[a,d]$.
8. Pincha sobre la intersección con el botón derecho y selecciona Representación 2D.

9. Secciones de un cubo

Una actividad que puede ser interesante para el alumnado de secundaria es el estudio de los distintos polígonos que se pueden obtener al seccionar un cubo con un plano



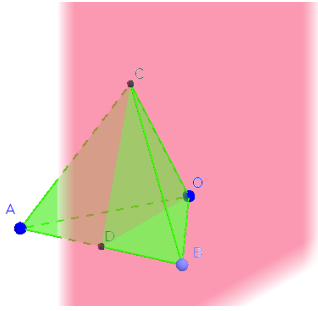
1. Puntos $A=(-3,-3,0)$ y $O=(0,0,0)$
2. Deslizadores:
 - a) a con valores entre 1 y 5, incremento 0.5
 - b) h entre -1 y 5, incremento 0.1
 - c) α ángulo entre 0° y 180° , incremento 1
 - d) β ángulo entre 0° y 180° , incremento 5
3. Construimos el cubo con los puntos A y $B=(-3,-3+a,0)$
4. Plano por los ejes X e Y $p=\text{Plano}[\text{EjeX},\text{EjeY}]$
5. Vector $u=(0,0,h)$
6. $p'=\text{Traslada}[p,u]$
7. $p''=\text{Rota}[p',\alpha,\text{EjeY}]$
8. $q=\text{Rota}[p'',\beta,\text{EjeX}]$ y se ocultan los demás planos
9. Intersección del cubo con el plano q y lo mostramos en una vista separada (igual que se ha hecho con el cono)
10. Mueve los deslizadores para comprobar los distintos polígonos que se forman

10. Planos de simetría de poliedros regulares

Usando la estructura de traslaciones y giros de plano usada en la actividad anterior vamos a buscar los planos de simetría de poliedros regulares

10.1. Tetraedro

Determinación de los planos de simetría de un tetraedro.



10.2. Cubo

