



Problema n.º 6: BONIFICACIONES POR DOQUIER



Maya es la encargada de una tienda de moda que decide repartir 736 € de bonificaciones entre sus dependientes. El mejor empleado del mes recibe 134 € y a partir de él, la bonificación se va reduciendo en una cantidad fija para el resto de los empleados. Si el último recibe 50 €:

- a) ¿Cuántos empleados hay en la tienda?
- b) ¿Cuánto recibe el segundo mejor empleado?

Razona tus respuestas.

Solución

PRIMERA SOLUCIÓN.

- a) Sea "x" la diferencia entre las bonificaciones entre dos empleados consecutivos y "n" el número de empleados. Así, los empleados recibirán:

Empleado	1	2	3	...	n
Bonificación (€)	50	50 + x	50 + 2x	...	50 + (n - 1)x

Como el último empleado recibe 134 €, tenemos:

$$50 + (n - 1)x = 134 \Rightarrow (n - 1)x = 84$$

Vamos a imponer que se reparte un total de 736 €. Como las bonificaciones forman una progresión aritmética, la suma de todos sus términos es:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 736 \Rightarrow \frac{50 + 134}{2} \cdot n = 736 \Rightarrow 92n = 736 \Rightarrow n = \frac{736}{92} = 8$$

Donde hemos usado que $a_n = 134$, que es lo que recibe el último empleado. Así, en la tienda hay **8 empleados**.

- b) Sustituyendo en la igualdad anterior tenemos:

$$(n - 1)x = 84 \Rightarrow (8 - 1)x = 84 \Rightarrow 7x = 84 \Rightarrow x = \frac{84}{7} = 12$$

Por lo tanto, la diferencia entre bonificaciones es 12 €. Así, los empleados reciben:

Empleado	1	2	3	4	5	6	7	8
Bonificación (€)	50	62	74	86	98	110	122	134

Por lo que **el segundo mejor empleado recibe 122 €**.

SEGUNDA SOLUCIÓN.

a) y b) Sea "x" la diferencia entre las bonificaciones entre dos empleados consecutivos y "n" el número de empleados. Así, los empleados recibirán:

Empleado	1	2	3	...	n
Bonificación (€)	50	50 + x	50 + 2x	...	50 + (n - 1)x

Como el último empleado recibe 134€, tenemos:

$$50 + (n - 1)x = 134 \Rightarrow (n - 1)x = 84$$

Como "n" es entero, "n - 1" también lo es, y al multiplicarlo por "x" da un número entero, por lo que "x" también debe de ser entero. Buscamos ahora todas las posibilidades de que "n - 1" y "x", una vez multiplicados, den como resultado 84.

n - 1	x
1	84
2	42
3	28
4	21
6	14
7	12
12	7
14	6
21	4
28	3
42	2
84	1

Ahora nos tocaría buscar cuál (o cuáles) de estas parejas verifica que la suma de todas las bonificaciones es igual a 736 €, pero nos va a ser especialmente difícil cuando haya muchos sumandos (cuando los valores de "n" sean muy grandes). Veamos cómo acotar un poco las posibilidades. Sabemos que:

$$50 + (50 + x) + (50 + 2x) + \dots + (50 + (n - 1)x) = 736$$

Si ahora sustituimos cada sumando por 50, el valor de la suma será menor que 736.

$$50 + 50 + 50 + \dots + 50 < 736$$

Como hay "n" sumandos:

$$50n < 736 \Rightarrow n < \frac{734}{50} \Rightarrow n < 14,68$$

Por lo tanto solo tendremos que comprobar los valores de "n" hasta el 14:

n - 1	n	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	SUMA
1	2	84	50	134														184
2	3	42	50	92	134													276
3	4	28	50	78	106	134												368
4	5	21	50	71	92	113	134											460
6	7	14	50	64	78	92	106	120	134									644
7	8	12	50	62	74	86	98	110	122	134								736
12	13	7	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120	127	134			1196
14	15	6	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116	122	128	134	1380

Por lo tanto, **hay 8 empleados y el segundo mejor ha recibido 122 €.**