Problema n.º 6: *JUGANDO CON NÚMEROS*

Gabriela es una persona apasionada de los juegos con números y quiere haceros una propuesta, no demasiada complicada, y está segura que lo conseguiréis. ¿Es posible que todo entero positivo se pueda escribir en la forma $p^2+q^2-r^2$ siendo ***p, q y r*** números enteros positivos y que cumpla la condición $p<q<r$?

Gabriela os quiere ayudar dándonos como ejemplo el 39 (número de la presente edición de la olimpiada matemática) y nos dice que se puede escribir $39=8^2+12^2-13^2$. A partir de aquí no es difícil llegar a la solución. ¡Suerte!

Escribe cómo se podrán escribir los 10 primeros números enteros positivos.

Solución

Queremos probar si es posible escribir cualquier número entero positivo, $n \in \mathbb{Z}^+$, de la forma:

$$n = p^2 + q^2 - r^2,$$

donde $p, q, r \in \mathbb{Z}^+$ y verifican que $p < q < r$.

Podemos comenzar probando con algunos valores "*por tanteo*", para ver qué forma puede seguir una expresión general que nos permita expresar cualquier número entero positivo de la forma pedida.

Por ejemplo, podemos probar que: $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$,

donde $p = 4, q = 7$ y $r = 8$, verificando que son números enteros positivos y que $p < q < r$.

Para poder seguir generando el resto de números y tratar de determinar una expresión general, podemos utilizar la siguiente identidad notable: $q^2 - r^2 = (q - r) \cdot (q + r)$. Es decir,

$$n = p^2 + (q - r) \cdot (q + r) \leftrightarrow n = p^2 - (r - q) \cdot (r + q),$$

donde $(r - q) \cdot (r + q) \in \mathbb{Z}^+$, pues $r > q$.

Para poder deducir la expresión general, usando el ejemplo anterior, podemos observar que una posible solución puede obtenerse haciendo que $p = n + 3$ (pues para $n = 1$ hemos visto que $p = 1 + 3 = 4$). Así, tenemos que:

$$n = (n + 3)^2 - (r - q) \cdot (r + q) \leftrightarrow (r - q) \cdot (r + q) = (n + 3)^2 - n$$
$$\leftrightarrow (r - q) \cdot (r + q) = n^2 + 6n + 9 - n \leftrightarrow (r - q) \cdot (r + q) = n^2 + 5n + 9.$$

Una posible solución, sería haciendo que:

$$r + q = n^2 + 5n + 9 \quad \text{y} \quad r - q = 1.$$

Por tanto, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r + q = n^2 + 5n + 9 \\ r - q = 1 \end{cases}.$$

Aplicando el método de reducción, tenemos que:

$$2r = n^2 + 5n + 10 \leftrightarrow r = \frac{n^2 + 5n + 10}{2}.$$

Por tanto,

$$q = r - 1 = \frac{n^2 + 5n + 10}{2} - 1 = \frac{n^2 + 5n + 10 - 2}{2} = \frac{n^2 + 5n + 8}{2}.$$

Así, una posible solución general para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, será haciendo que:

$$n = p^2 + q^2 - r^2,$$

donde:

$$p = n + 3.$$
$$q = \frac{n^2 + 5n + 8}{2}.$$
$$r = \frac{n^2 + 5n + 10}{2}.$$

A continuación, probemos que estos valores de p, q y r verifican las condiciones del enunciado.

En primer lugar, debemos probar que p, q y r son números enteros positivos:

- Es evidente que $p \in \mathbb{Z}$ y $p > 0$, pues $n \in \mathbb{Z}^+$.
- También es evidente que $q > 0$ y $r > 0$, pues $n \in \mathbb{Z}^+$. Faltaría probar que $q, r \in \mathbb{Z}$. Para ello, diferenciaremos si n es par o n es impar:

  - Si n es par, entonces se puede expresar de la forma $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$, así tenemos:

$$q = \frac{n^2 + 5n + 8}{2} = \frac{(2k)^2 + 5(2k) + 8}{2} = \frac{4k^2 + 10k + 8}{2} = 2k^2 + 5k + 4 \in \mathbb{Z}.$$

$$r = \frac{n^2 + 5n + 10}{2} = \frac{(2k)^2 + 5(2k) + 10}{2} = \frac{4k^2 + 10k + 10}{2} = 2k^2 + 5k + 5 \in \mathbb{Z}.$$

  - Si n es impar, entonces se puede expresar de la forma $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$, así tenemos:

$$q = \frac{n^2 + 5n + 8}{2} = \frac{(2k+1)^2 + 5(2k+1) + 8}{2} = \frac{4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 8}{2}$$
$$= \frac{4k^2 + 14k + 14}{2} = 2k^2 + 7k + 7 \in \mathbb{Z}.$$

$$r = \frac{n^2 + 5n + 10}{2} = \frac{(2k+1)^2 + 5(2k+1) + 10}{2} = \frac{4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 10}{2}$$
$$= \frac{4k^2 + 14k + 16}{2} = 2k^2 + 7k + 8 \in \mathbb{Z}.$$

En segundo lugar, probemos que $p < q < r$:

- Veamos que $p < q$, es decir,

$$n + 3 < \tfrac{n^2+5n+8}{2} \leftrightarrow 2n + 6 < n^2 + 5n + 8 \leftrightarrow n^2 + 3n + 2 > 0,$$

siendo cierto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- Veamos que $q < r$, es decir,

$$\frac{n^2 + 5n + 8}{2} < \frac{n^2 + 5n + 10}{2} \leftrightarrow n^2 + 5n + 8 < n^2 + 5n + 10 \leftrightarrow 8 < 10,$$

siendo cierto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Por tanto, podemos asegurar que todo número entero positivo puede escribirse de la forma $p^2 + q^2 - r^2$, siendo p, q y r números enteros positivos que cumplen que $p < q < r$.

A partir de esta expresión general, podemos generar los diez primeros números enteros positivos:

n	$p = n + 3$	$q = \dfrac{n^2 + 5n + 8}{2}$	$r = \dfrac{n^2 + 5n + 10}{2}$	$n = p^2 + q^2 - r^2$
1	4	7	8	$1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$
2	5	11	12	$2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$
3	6	16	17	$3 = 6^2 + 16^2 - 17^2$
4	7	22	23	$4 = 7^2 + 22^2 - 23^2$
5	8	29	30	$5 = 8^2 + 29^2 - 30^2$
6	9	37	38	$6 = 9^2 + 37^2 - 38^2$
7	10	46	47	$7 = 10^2 + 46^2 - 47^2$
8	11	56	57	$8 = 11^2 + 56^2 - 57^2$
9	12	67	68	$9 = 12^2 + 67^2 - 68^2$
10	13	79	80	$10 = 13^2 + 79^2 - 80^2$

Otras combinaciones, obtenidas por tanteo, de los valores $p, q, r \in \mathbb{Z}^+$ y que verifican que $p < q < r$, para obtener los números enteros del 1 al 10 y el 0 son:

$$0 = 5^2 + 12^2 - 13^2 = 8^2 + 15^2 - 17^2$$

$$1 = 6^2 + 17^2 - 18^2 = 7^2 + 11^2 - 13^2$$

$$2 = 7^2 + 23^2 - 24^2 = 9^2 + 39^2 - 40^2$$

$$3 = 4^2 + 6^2 - 7^2 = 8^2 + 30^2 - 31^2$$

$$4 = 5^2 + 10^2 - 11^2 = 6^2 + 7^2 - 9^2 = 8^2 + 14^2 - 16^2$$

$$5 = 4^2 + 5^2 - 6^2 = 6^2 + 15^2 - 16^2 = 7^2 + 10^2 - 12^2 = 9^2 + 18^2 - 20^2$$

$$6 = 5^2 + 9^2 - 10^2 = 7^2 + 21^2 - 22^2 = 9^2 + 11^2 - 14^2$$

$$7 = 6^2 + 14^2 - 15^2 = 10^2 + 14^2 - 17^2$$

$$8 = 5^2 + 8^2 - 9^2 = 7^2 + 20^2 - 21^2 = 8^2 + 13^2 - 15^2$$

$$9 = 6^2 + 13^2 - 14^2 = 7^2 + 9^2 - 11^2$$

$$10 = 5^2 + 7^2 - 8^2 = 7^2 + 19^2 - 20^2$$