



XXXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Fase Regional
19 de mayo de 2023



Problema n.º 5: EL CONCURSO



El instituto donde estudia Julia organizó el curso pasado un concurso de robótica dirigido a los alumnos de 2ºESO. En él podían participar equipos formados por 2 alumnos de cualquier instituto de su localidad que deberían realizar un prototipo. Cada centro podía inscribir a 4 equipos.

A la hora de la competición, había una primera fase en la que cada equipo debía competir una sola vez contra todos los demás equipos excepto con los de su centro. En la primera edición se inscribieron 8 centros. ¿En cuántos enfrentamientos tiene que participar cada equipo en esta primera fase?, ¿cuántos enfrentamientos se realizaron en total en esta primera fase?

Para la segunda fase se clasifican los equipos que hayan ganado al menos las tres cuartas partes de las partidas en las que han participado, ¿cuántas partidas debe ganar un equipo como mínimo para pasar de fase?

Tras el éxito del concurso este año han recibido la petición de 20 centros, ¿cuántos enfrentamientos se producirán en una primera fase?, ¿cuántos enfrentamientos debería superar un equipo para pasar de fase?

Razona todas tus respuestas.

Resolución

Partamos de los datos que nos indica el problema. Sabemos que:

- Cada equipo tiene 2 alumnos
- Cada Centro inscribe a 4 equipos
- Los equipos compiten con todos los equipos salvo con los de su Centro

Primer año del concurso

En ese año se inscribieron 8 Centros.

Primera fase

Para resolver este problema nos vamos a ayudar de una representación gráfica. Representamos cada equipo de un mismo Centro con un punto de un mismo color, y situándolos en una circunferencia quedaría:

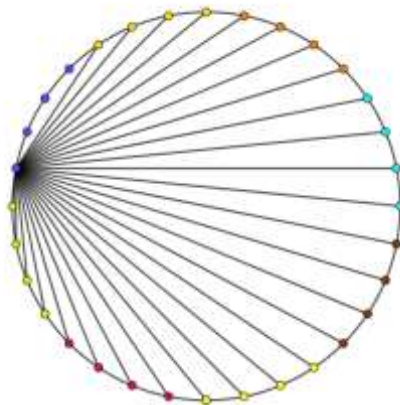


XXXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Fase Regional
19 de mayo de 2023



$$8 \cdot 4 = 32 \text{ equipos}$$

Si ahora representamos con una línea cada enfrentamiento entre dos equipos, tendríamos que unir los puntos de cada color con todos aquellos que tienen distinto color a él.



Cada equipo se enfrenta con todos los equipos salvo con los de su centro, por tanto tendrá:

$$7 \text{ centros} \cdot 4 \text{ equipos/centro} = \mathbf{28 \text{ enfrentamientos/equipo}}$$

Si repetimos el proceso con todos los puntos y contamos el número de líneas (enfrentamientos) serían:

$$\frac{32 \cdot 28}{2} = \mathbf{448 \text{ enfrentamientos en total en la primera fase}}$$

Segunda fase

Pasan a la 2ª Fase aquellos equipos que hayan ganada al menos las tres cuartas partes de las partidas en las que han participado, es decir, para pasar a la 2ª fase habrá que ganar:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 28 = 21 \text{ partidas}$$

Para pasar de fase debe ganar como mínimo 21 partidas.



XXXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Fase Regional
19 de mayo de 2023



Segundo año del concurso

Este año sería 20 Centros por lo que el número de partidas será:

$$\frac{80 \cdot (20 - 1) \cdot 4}{2} = \mathbf{3040 \text{ enfrentamientos en total en la primera fase}}$$

Y para pasar a la segunda fase deberían ganar:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 19 \cdot 4 = \mathbf{57 \text{ partidas debe ganar como mínimo}}$$

Generalización

Aunque el problema no plantea la generalización, es interesante y muy sencillo obtener una generalización al problema:

Si se presentaran “n” centros, con 4 equipos cada uno.

El total de enfrentamientos serían:

$$4 \cdot n \cdot (n - 1) \cdot 2 = 8 \cdot n \cdot (n - 1) \text{ enfrentamientos}$$

Y para pasar a la segunda fase un equipo debería ganar:

$$3 \cdot (n - 1) \text{ partidas}$$