XXXIX OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Fase Provincial
9 de marzo de 2024

Problema n.º 6: *BONIFICACIONES POR DOQUIER*

Maya es la encargada de una tienda de moda que decide repartir 736 € de bonificaciones entre sus dependientes. El mejor empleado del mes recibe 134 € y a partir de él, la bonificación se va reduciendo en una cantidad fija para el resto de los empleados. Si el último recibe 50 €:

a) ¿Cuántos empleados hay en la tienda?

b) ¿Cuánto recibe el segundo mejor empleado?

Razona tus respuestas.

Solución

PRIMERA SOLUCIÓN.

a) Sea "x" la diferencia entre las bonificaciones entre dos empleados consecutivos y "n" el número de empleados. Así, los empleados recibirán:

Empleado	1	2	3	...	n
Bonificación (€)	50	$50 + x$	$50 + 2x$	...	$50 + (n-1)x$

Como el último empleado recibe 134 €, tenemos:

$$50 + (n-1)x = 134 \implies (n-1)x = 84$$

Vamos a imponer que se reparte un total de 736 €. Como las bonificaciones forman una progresión aritmética, la suma de todos sus términos es:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 736 \implies \frac{50 + 134}{2} \cdot n = 736 \implies 92n = 736 \implies n = \frac{736}{92} = 8$$

Donde hemos usado que $a_n = 134$, que es lo que recibe el último empleado. Así, en la tienda hay **8 empleados.**

b) Sustituyendo en la igualdad anterior tenemos:

$$(n-1)x = 84 \implies (8-1)x = 84 \implies 7x = 84 \implies x = \frac{84}{7} = 12$$

Por lo tanto, la diferencia entre bonificaciones es 12 €. Así, los empleados reciben:

Empleado	1	2	3	4	5	6	7	8
Bonificación (€)	50	62	74	86	98	110	122	134

Por lo que **el segundo mejor empleado recibe 122 €.**

SEGUNDA SOLUCIÓN.

a) y b) Sea "x" la diferencia entre las bonificaciones entre dos empleados consecutivos y "n" el número de empleados. Así, los empleados recibirán:

Empleado	1	2	3	...	n
Bonificación (€)	50	$50+x$	$50+2x$	...	$50+(n-1)x$

Como el último empleado recibe 134€, tenemos:

$$50+(n-1)x=134 \Rightarrow (n-1)x=84$$

Como "n" es entero, "$n-1$" también lo es, y al multiplicarlo por "x" da un número entero, por lo que "x" también debe de ser entero. Buscamos ahora todas las posibilidades de que "$n-1$" y "x", una vez multiplicados, den como resultado 84.

$n-1$	x
1	84
2	42
3	28
4	21
6	14
7	12
12	7
14	6
21	4
28	3
42	2
84	1

Ahora nos tocaría buscar cuál (o cuáles) de estas parejas verifica que la suma de todas las bonificaciones es igual a 736 €, pero nos va a ser especialmente difícil cuando haya muchos sumandos (cuando los valores de "n" sean muy grandes). Veamos cómo acotar un poco las posibilidades. Sabemos que:

$$50+(50+x)+(50+2x)+\cdots(50+(n-1)x)=736$$

Si ahora sustituimos cada sumando por 50, el valor de la suma será menor que 736.

$$50+50+50+\cdots+50<736$$

Como hay "n" sumandos:

$$50n<736 \Rightarrow n<\frac{734}{50} \Rightarrow n<14{,}68$$

Por lo tanto solo tendremos que comprobar los valores de "n" hasta el 14:

$n-1$	n	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	SUMA
1	2	84	50	134														184
2	3	42	50	92	134													276
3	4	28	50	78	106	134												368
4	5	21	50	71	92	113	134											460
6	7	14	50	64	78	92	106	120	134									644
7	8	12	50	62	74	86	98	110	122	134								**736**
12	13	7	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120	127	134			1196
14	15	6	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116	122	128	134	1380

Por lo tanto, **hay 8 empleados y el segundo mejor ha recibido 122 €.**