

## Problema n.º 2: LÁMPARA POLIÉDRICA

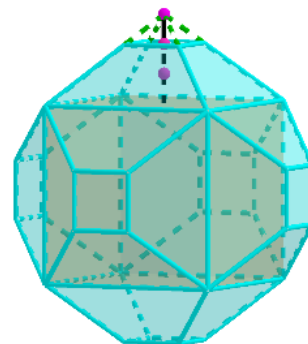
Una empresa ha diseñado unas lámparas con forma poliédrica como la de la imagen. Se ha formado de la siguiente manera: Sobre cada una de las caras de un cubo se ha levantado una pirámide de altura igual a la distancia de cada cara al centro del cubo, y luego éstas se han truncado, formando troncos de pirámide de altura  $\frac{2}{3}$  de la pirámide original.

Si el cubo tiene una capacidad de 54 litros, ¿cuál es la capacidad de la lámpara completa?

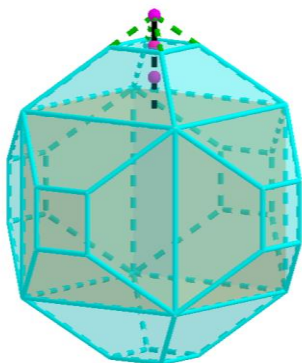
**Razona la respuesta.**

**Nota:** Puedes ver la construcción y la imagen en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/classic/qaaymm6h>

La figura podrás verla mejor pinchando en el icono marcado por la flecha para a continuación mover la zona gráfica teniendo pinchando el ratón.



## Solución:



Queremos calcular la capacidad de la lámpara sabiendo que la del cubo es de 54 litros

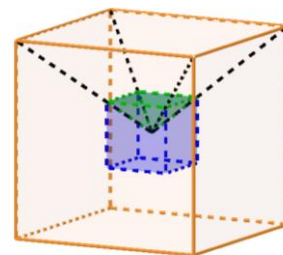
Observa que si no hubiésemos truncado las pirámides, toda la figura tendría una capacidad doble que la del cubo.

De esta forma, el volumen de la lámpara será el volumen de dos cubos menos el volumen de los 6 picos de pirámide que he quitado:

$$\text{Capacidad}_{\text{lámpara}} = 2 \cdot 54 - \text{Capacidad de los 6 picos de pirámide}$$

Para calcular el volumen de esos 6 picos de pirámide puedes observar que si los junto, forman un cubo que tendría como lado la tercera parte del cubo original:

Al tener por lado la tercera parte del cubo mayor, se puede ver que cabrían 27 cubitos como ese pequeño central (formado por las pequeñas pirámides que he quitado) en el grande.



De esta forma, el volumen de esos seis picos de pirámide sería:



**XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)**  
**Fase Regional**  
**15 de mayo de 2021**



$$\text{Capacidad de los 6 picos de pirámide} = \frac{\text{Capacidad}_{\text{cubo}}}{27} = \frac{54}{27} = 2 \text{ litros}$$

Por tanto, la capacidad de la lámpara sería:

$$\begin{aligned}\text{Capacidad}_{\text{lámpara}} &= 2 \cdot 54 - \text{Capacidad de los 6 picos de pirámide} = \\ &= 108 - 2 = 106 \text{ litros}\end{aligned}$$

Veamos a continuación **otra forma de resolver el problema**, algo menos original y más laboriosa que la anterior.

$$\text{Capacidad}_{\text{lámpara}} = \text{Capacidad}_{\text{cubo}} + 6 \cdot \text{Capacidad}_{\text{tronco pirámide}}$$

$$\text{Capacidad}_{\text{cubo}} = 54 \text{ litros}$$

$$\text{Capacidad}_{\text{tronco pirámide}} = V_{\text{tronco pirámide}} = V_{\text{pirámide completa}} - V_{\text{pirámide deficiente}}$$

Calculemos la arista del cubo, para así poder hallar las alturas de las pirámides y la superficie de sus bases.

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2} \text{ dm}$$

$$A_B = a^2 = (3\sqrt[3]{2})^2 = 9\sqrt[3]{2^2} \text{ dm}^2$$

Como la altura de la pirámide completa es la distancia desde la cara del cubo a su centro, eso nos indica que medirá la mitad de la arista del cubo.

$$h_{p.c.} = \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \text{ dm}$$

$$V_{\text{pirámide completa}} = \frac{A_B \cdot h_{p.c.}}{3} = \frac{9\sqrt[3]{2^2} \cdot \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}{3} = \frac{9 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 2}}{3 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 9 \text{ dm}^3$$

Como la pirámide se ha truncado a la altura de los 2/3 de la completa, ello nos informa que la pirámide deficiente tendrá de altura 1/3 de la completa y el lado de su base igualmente medirá la tercera parte de la arista.

$$A_b = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt[3]{2}}{3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} \text{ dm}^2$$



**XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)**  
**Fase Regional**  
**15 de mayo de 2021**



$$h_{p.d.} = \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \text{ dm}$$

$$V_{\text{pirámide deficiente}} = \frac{A_b \cdot h_{p.d.}}{3} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \text{ dm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Capacidad}_{\text{tronco pirámide}} &= V_{\text{tronco pirámide}} = V_{\text{pirámide completa}} - V_{\text{pirámide deficiente}} = \\ &= 9 - \frac{1}{3} = \frac{27 - 1}{3} = \frac{26}{3} \text{ dm}^3 = \frac{26}{3} \text{ litros} \end{aligned}$$

Por lo consiguiente, la capacidad de la lámpara sería:

$$\begin{aligned} \text{Capacidad}_{\text{lámpara}} &= \text{Capacidad}_{\text{cubo}} + 6 \cdot \text{Capacidad}_{\text{tronco pirámide}} = \\ &= 54 + 6 \cdot \frac{26}{3} = 54 + 52 = 106 \text{ litros} \end{aligned}$$