XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)
Fase Regional
15 de mayo de 2021

<u>Problema n.º 3:</u> *ÓRBITAS CÍCLICAS*

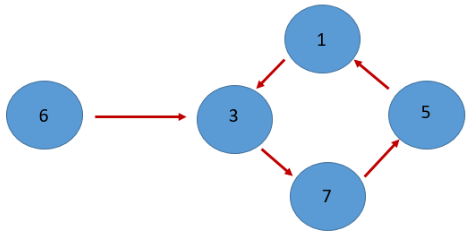
Partiendo de un número entero entre 0 y 9, nos interesan las sucesivas transformaciones que sufre aplicando una función, y manteniendo solo el dígito de las unidades cada vez. Por ejemplo, si consideramos la función ***f(x)=2x + 1***, y partiendo del entero 6, obtenemos sucesivamente:

$2 \times 6 + 1 = 13$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3;
$2 \times 3 + 1 = 7$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 7;
$2 \times 7 + 1 = 15$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 5;
$2 \times 5 + 1 = 11$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 1;
$2 \times 1 + 1 = 3$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3;
$2 \times 3 + 1 = 7$, y así sucesivamente.
………

Podríamos continuar indefinidamente, pero vemos que el proceso ha cerrado el círculo.

Llamaremos ***órbita*** de un entero entre 0 y 9, bajo la acción de la función ***f***, a la secuencia de enteros sucesivos obtenidos aplicando ***f*** y manteniendo sólo el dígito de las unidades. En el ejemplo anterior, la órbita de 6 es (6, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5, 1, 3,...) que se descompone en dos fases: una primera secuencia transitoria (6, 3), y la otra secuencia que se repite indefinidamente (3, 7, 5, 1, ...). Una secuencia como ésta la denominamos ***ciclo*** y al número de enteros que contiene (en este caso 4) se le denomina ***longitud del ciclo***.

Como ayuda te presentamos el gráfico de la órbita del número 6 para la función f(x)=2x+1



Contesta razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Para la función ***f(x)=4x+1***:

a.1. Determina la órbita y la longitud del ciclo para el número 2, y represéntala con un diagrama como el que representa la órbita de 6.

a.2. Determina la órbita, la longitud de su ciclo y represéntala con diagrama para los números enteros 0, 3, 4, 6 y 8.

b) Explica brevemente por qué la órbita de un número entero siempre termina al recorrer un ciclo, independientemente de la función aplicada.

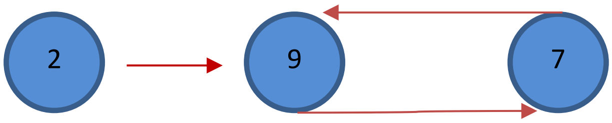
Solución:

a)

a.1. En este apartado repetiremos el proceso realizado en el enunciado del problema, donde la función utilizada será ***f(x)=4x+1*** y el número entero del que partiremos es el 2. De esta manera, obtendremos los siguientes valores:

$4 \times 2 + 1 = 9$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 9;
$4 \times 9 + 1 = 37$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 7;
$4 \times 7 + 1 = 29$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 9;
$4 \times 9 + 1 = 37$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 7; y así sucesivamente.

Así, la órbita del número 2 es (2, 9, 7, 9, 7, …)
Su ciclo es (9,7), que tiene una longitud igual a 2.
El diagrama será de la siguiente forma:

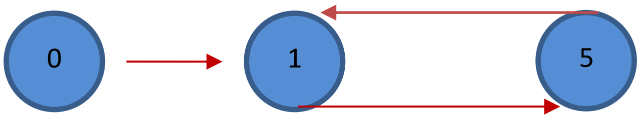


a.2. En este apartado, repetiremos el mismo proceso que en el apartado anterior, pero con los enteros 0, 3, 4, 6 y 8.

Si partimos del número 0, tendremos los siguientes valores:

$4 \times 0 + 1 = 1$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 1;
$4 \times 1 + 1 = 5$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 5;
$4 \times 5 + 1 = 21$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 1;
$4 \times 1 + 1 = 5$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 5; y así sucesivamente.

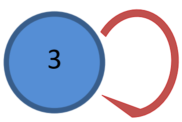
Así, la órbita del número 0 es (0, 1, 5, 1, 5, …)
Su ciclo es (1,5), que tiene una longitud igual a 2.
El diagrama será de la siguiente forma:



Si partimos del número 3, tendremos los siguientes valores:

$4 \times 3 + 1 = 13$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3; y así sucesivamente.

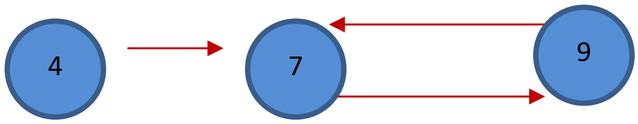
Así, la órbita del número 3 es (3, 3, …)
Su ciclo es (3), que tiene una longitud igual a 1.
El diagrama será de la siguiente forma:



Si partimos del número 4, tendremos los siguientes valores:

$4 \times 4 + 1 = 17$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 7;
$4 \times 7 + 1 = 29$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 9;
$4 \times 9 + 1 = 37$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 7;
$4 \times 7 + 1 = 29$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 9; y así sucesivamente.

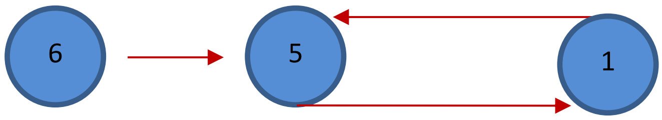
Así, la órbita del número 4 es (4, 7, 9, 7, 9, …)
Su ciclo es (7,9), que tiene una longitud igual a 2.
El diagrama será de la siguiente forma:



Si partimos del número 6, tendremos los siguientes valores:

$4 \times 6 + 1 = 25$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 5;
$4 \times 5 + 1 = 21$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 1;
$4 \times 1 + 1 = 5$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 5;
$4 \times 5 + 1 = 21$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 1; y así sucesivamente.

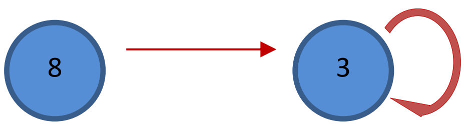
Así, la órbita del número 6 es (6, 5, 1, 5, 1, …)
Su ciclo es (5,1), que tiene una longitud igual a 2.
El diagrama será de la siguiente forma:



Si partimos del número 8, tendremos los siguientes valores:

$4 \times 8 + 1 = 33$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3;
$4 \times 3 + 1 = 13$, nos quedamos con la cifra de las unidades: 3; y así sucesivamente.

Así, la órbita del número 8 es (8, 3, 3, …)
Su ciclo es (3), que tiene una longitud igual a 1.
El diagrama será de la siguiente forma:



b) Sea f una función cualquiera y sea x_1 un número entero entre 0 y 9. Si realizamos el procedimiento anterior, podemos distinguir dos casos:

- Al hallar $f(x_1)$ obtenemos el mismo número u otro diferente, pero que tiene a x_1 en la posición de las unidades, tendremos una órbita de la forma $(x_{1,}\, x_1)$. Es decir, la órbita termina en x_1, que a su vez es el ciclo. Y termina porque $f(x_1)$ volverá a dar el mismo número con x_1 en las unidades, ya que si tenemos una función, la imagen de x_1 es única.

- Al hallar $f(x_1)$ obtenemos:

$f(x_1)\ \ un\ número\ con\ unidades = x_2$ con $x_2 \neq x_1$
$f(x_2)\ un\ número\ con\ unidades = x_3$ con $x_3 \neq x_1, x_2$
.
.
.

Así, hasta que algún $f(x_i)$ sea igual a un número con unidades x_j con j<i, es decir, con x_j un valor de unidades que ya apareció antes. Esto podemos asegurar que siempre va a ocurrir porque el número de posibles valores que pueden ocupar la cifra de las unidades, es finito, pues las unidades solo pueden ser los enteros del 0 al 9. Por tanto, realizando un máximo de 9 interacciones entramos en un ciclo. Y el ciclo tendrá una longitud finita i-j.

Por lo que podemos afirmar que la órbita de un número entero siempre termina al recorrer un ciclo.