



XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)
Fase Regional
15 de mayo de 2021



Problema n.º 5: LA ENREDADERA

Este año 2021 para celebrar esta olimpiada tan atópica el 1 de enero hemos plantado la semilla de una enredadera de crecimiento secuencial en la fachada del edificio de mi casa que tiene 5 plantas de altitud y cada una tiene de altura 2,80 metros.

Sabemos que durante el primer año crece una rama perpendicular al suelo que alcanzará la longitud de 8 cm el 31 de diciembre.

Durante el segundo año, 2022, sabemos que le crecen dos ramas de 8 cm cada una, que forman entre sí 90° y un ángulo de 135° con la rama madre.

A lo largo del tercer año, 2023, a la rama de la derecha le crecen dos ramas de 8 cm cada una, que forman entre sí un ángulo de 90° y 135° con la rama madre. La rama de la izquierda se seca y cae.

Mientras que en el cuarto año, 2024, el crecimiento es simétrico, crece según el patrón anterior la rama de la izquierda y se seca y cae la de la derecha.

Y, así sucesivamente siguiendo la secuencia de los dos últimos años.

Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Razona si la siguiente afirmación es cierta o falsa:

“En el año 2050 crecerá la rama de la derecha y se secará y caerá la rama de la izquierda”.

b) ¿Qué longitud de ramas tendrá la enredadera el 31 de diciembre del año 2050?

224 cm, 232 cm, 240 cm, 248 cm, 256 cm

c) ¿A qué altura llegará el año 2050?

d) ¿Cuál es la fórmula que nos da la altura de la enredadera en función de los años que lleva plantada?

e) ¿Qué año superará por primera vez la altura del edificio?

Solución:

a) Razona si la siguiente afirmación es cierta o falsa:

“En el año 2050 crecerá la rama de la derecha y se secará y caerá la rama de la izquierda”.

La respuesta está en la lectura del texto.

- En el año 2023, crece la derecha y cae la izquierda
- En el año 2024, crece la izquierda y cae la derecha,
- ...
- Y así sucesivamente

Por lo tanto, en los años impares crece la rama de la derecha y cae la izquierda, que es justo lo contrario de la afirmación. Así pues, esta es falsa.

b) ¿Qué longitud de ramas tendrá la enredadera el 31 de diciembre del año 2050?

224 cm, 232 cm, 240 cm, 248 cm, 256 cm



XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)
Fase Regional
15 de mayo de 2021



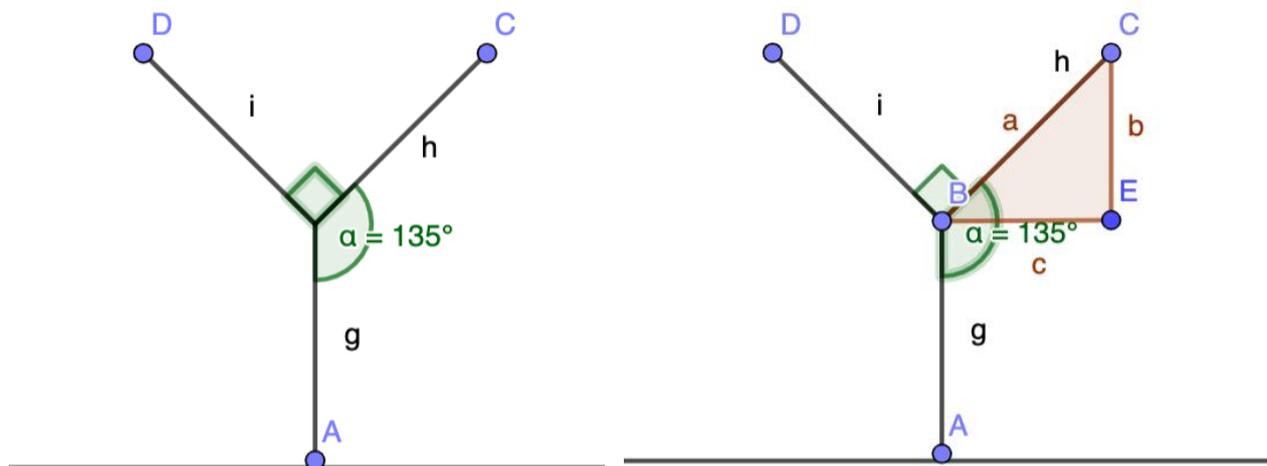
Según indica el enunciado las ramas crecen 8 centímetros cada año. Del 1 de enero del año 2021 al 31 de diciembre del año 2050 hay 30 años. En estos 30 años, hay 29 años con 1 rama de 8 centímetros y dos ramas del último año con 8 centímetros. Así pues, hay $31 \cdot 8 = 248$ cm de ramas.

c) ¿A qué altura llegará el año 2050?

Para saber qué longitud tendrá en el año 2050, se debe comprender cómo crece la enredadera. El siguiente vídeo ayuda a la comprensión de su crecimiento (<https://youtu.be/2jBu8vM-cG4>).

El primer año 2021, crece perpendicular al suelo. Por lo tanto, su crecimiento y altura coincide con 8 cm.

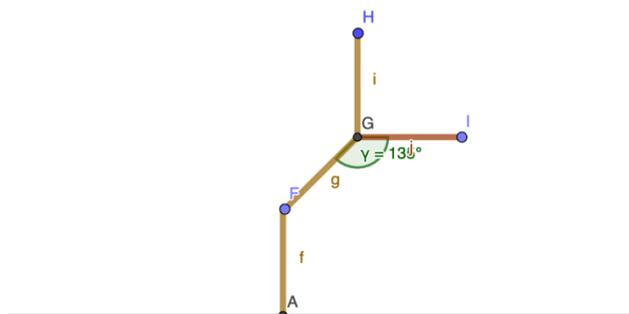
El segundo año 2022, crece formando un ángulo de 135° con la otra rama, que corresponde a 45° con la horizontal del suelo.



Aplicando el teorema de Pitágoras podremos calcular la longitud de $b = 4\sqrt{2}$ cm.

Entonces la altura el 31 de diciembre de 2022 es $8 + 4\sqrt{2}$ cm.

A finales del 2023 ha crecido la rama de la izquierda perpendicular al suelo, y debemos sumar a la altura anterior 8 cm, siendo: $16 + 4\sqrt{2}$ cm.

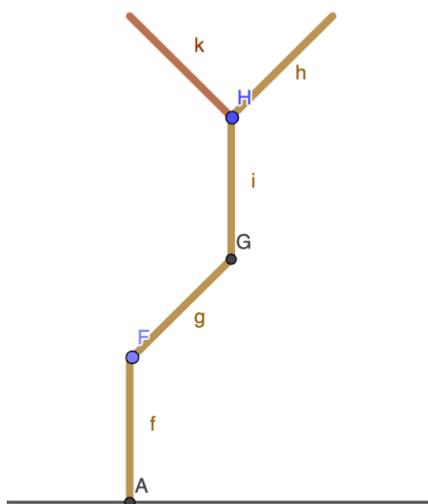




XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)
Fase Regional
15 de mayo de 2021



En el año 2024, crecen dos ramas formando un ángulo de 90° entre sí y 135° con la rama madre, tal y como se observa en la figura:



En este caso para calcular la altura podemos volver aplicar el teorema de Pitágoras, siendo la altura de nuevo $4\sqrt{2}$ cm. Siendo la altura total de $16 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 16 + 8\sqrt{2}$ cm.

Con lo cual no es encontramos con la siguiente sucesión que se va repitiendo sumando una vez 8 cm y la siguiente $4\sqrt{2}$ cm.

$$\begin{aligned} a_{2021} &= 8 \text{ cm} \\ a_{2022} &= 8 + 4\sqrt{2} \text{ cm} \\ a_{2023} &= 16 + 4\sqrt{2} \text{ cm} \\ a_{2024} &= 16 + 8\sqrt{2} \text{ cm} \\ &\dots \end{aligned}$$

Cada 4 años se suma dos veces el número 8 y dos veces el número $4\sqrt{2}$, es decir, que cada dos años hay que sumar $8 + 4\sqrt{2}$ cm.

Como del día 1 de enero de 2021 al 31 de diciembre de 2050 han transcurrido 30 años, ha crecido 15 veces la altura de 8 cm ($15 \cdot 8 = 120$ cm) y 15 veces la altura de $4\sqrt{2}$ cm.

Por lo tanto, en el año 2050 llegará a una altura de:

$$15(8 + 4\sqrt{2}) = 120 + 60\sqrt{2} \cong 204,85 \text{ cm}$$

d) ¿Cuál es la fórmula que nos da la altura de la enredadera en función de los años que lleva plantada?

Consideramos el 2020 como la altura 0: $a_0 = 0$ cm

La altura de 2021 como $a_1 = 8$ cm

La altura de 2022 como $a_2 = 8 + 4\sqrt{2}$ cm

Para las siguientes alturas debemos recurrir a las anteriores, mediante la recurrencia:

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$$

Podríamos calcular la altura de la enredadera directamente, distinguiendo si la cantidad de años transcurridos sea par o impar, de la siguiente forma:

Llamemos n al número de años transcurridos.

- Altura años pares: $(8 + 4\sqrt{2}) \cdot \frac{n}{2}$ cm

- Altura años impares: $(8 + 4\sqrt{2}) \cdot \frac{n-1}{2} + 8$ cm

e) ¿Qué año superará por primera vez la altura del edificio?

El edificio tiene una altura de 5 plantas de 2,80 m = 280 cm cada planta. En total mide:



XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES (on line)
Fase Regional
15 de mayo de 2021



$$5 \cdot 280 = 1400 \text{ cm.}$$

Cada dos años aumenta, según la secuencia anterior $8 + 4\sqrt{2} \cong 13,66 \text{ cm}$

Si dividimos el total de la altura del edificio entre lo que sube cada dos años, sabemos que tardará $(1400 : 13,66) \cong 102,49$ pares de años. Con lo cual, serán 204,98 años. Redondeando 205 años.

La enredadera sobrepasará la altura del edificio en el año 2225.