

Ecuaciones de primer y segundo grado

Fco. Jesús González Rivera

En esta unidad el objetivo final es la resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado. Para ello, es necesario que los alumnos y las alumnas dominen la traducción de un enunciado a lenguaje algebraico, así como los algoritmos de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Partimos de la base de que los alumnos y alumnas han sido introducidos en cursos anteriores en estos contenidos. Por tanto, con esta unidad no se pretende tratar de forma sistemática estos contenidos sino tan solo ampliar lo estudiado en cursos anteriores. Se repasarán los conceptos más importantes relacionados con las ecuaciones y se mejorará el dominio de los algoritmos de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

Finalmente, en las sesiones dedicadas a la resolución de problemas se hará especial hincapié en que los alumnos lean detenidamente el problema, traten de comprender bien los datos que les aporta el enunciado y lo que pide el problema. A partir de esto, tendrán que intentar traducir el enunciado a lenguaje algebraico para acabar resolviendo la ecuación que resulte de esa traducción.

Objetivos

- Conocer los conceptos de ecuación, incógnita, solución, miembro, ...
- Resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Plantear y resolver problemas mediante ecuaciones.

Contenidos

Conceptos

- Incógnita. Ecuación. Solución de una ecuación.
- Tipos de ecuación.
- Ecuaciones de primer grado.
- Transformaciones que conservan la equivalencia.
- Ecuaciones de segundo grado. Ecuaciones completas e incompletas.
- Discriminante. Número de soluciones.

Procedimientos

- Comprobación de si un número es o no solución de una ecuación.
- Resolución de ecuaciones por tanteo.
- Resolución algorítmica de ecuaciones de primer grado.
- Cálculo del número de soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado completas.
- Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

Actitudes

- Valoración del lenguaje algebraico para expresar relaciones de todo tipo.
- Adquisición de confianza en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
- Interés por las posibilidades que ofrece el álgebra para la resolución de problemas matemáticos y cotidianos.

Criterios de evaluación

- conoce los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones.
- resuelve ecuaciones de primer grado.
- resuelve ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.
- resuelve problemas mediante el uso de ecuaciones.

Temporalización

Consideramos que para conseguir los objetivos que nos planteamos en esta unidad será suficiente con 9 sesiones más 1 sesión para una prueba escrita.

Primera Sesión

En esta primera sesión se le explicará a los alumnos los conceptos de *incógnita*, *ecuación* y *solución de una ecuación* y se les pedirá que hagan en clase las siguientes actividades:

Actividad 1 Comprueba si los siguientes valores son o no solución de las ecuaciones correspondientes:

a) $5x + 9 = 44$ $x = 7$

b) $\sqrt{3x + 1} = 4$ $x = 5$

c) $\frac{6}{x} - \frac{x}{2} = 2$ $x = 2$

d) $2^{x+1} = 1024$ $x = 10$

En los apartados en los que la respuesta ha sido negativa, halla por tanteo una solución de la ecuación.

Actividad 2 Dada la ecuación

$$3 \cdot (x + 7) = 240$$

haya una solución por tanteo. ¿Tiene la ecuación más soluciones?

Actividad 3 Dada la ecuación

$$(x - 1) \cdot (x + 3) = 0$$

haya una solución por tanteo. ¿Tiene la ecuación más soluciones?

Actividad 4 Inventa dos ecuaciones que tengan por solución $x = 3$ y $z = -1$ respectivamente.

Segunda Sesión

En la segunda sesión se le presentarán a los alumnos distintos *tipos de ecuaciones: polinómicas, exponenciales, con radicales,...* Y para que practique los contenidos de las dos primeras sesiones se propondrán las actividades siguientes:

Actividad 1 Clasifica las siguientes ecuaciones en *ecuaciones polinómicas, ecuaciones con radicales y ecuaciones exponenciales*:

a) $7x + 1 = 34$

b) $x^4 - 3x^2 = 13$

c) $2^x = 4$

d) $\sqrt{x+1} = 2x + 3$

e) $\sqrt{25} \cdot x + 3 = 5x$

En el caso de las ecuaciones polinómicas, indica su grado.

Actividad 2 Indica el grado de las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^2 - 3x^3 = 1$

b) $x^4 - x = 2$

c) $x^2 - 3x - x^2 = 3$

d) $4x^2 - x = 0$

e) $x^2 - 1 = 4$

Actividad 3 Inventa una ecuación exponencial cuya solución sea $y = 3$.

Actividad 4 Inventa una ecuación con radicales cuya solución sea $t = 2$.

Actividad 5 Inventa una ecuación polinómica de segundo grado que tenga por soluciones $x = 1$ y $x = -1$.

Tercera Sesión

En la tercera sesión estudiamos la resolución de las *ecuaciones de primer grado* haciendo mención a *las transformaciones que conservan la equivalencia*. Además, propondremos a los alumnos las siguientes actividades:

Actividad 1 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando las transformaciones adecuadas:

a) $2x = 6$

b) $t + 2 = -5$

c) $2v - 1 = 7$

d) $m - 1 = 2m$

e) $2q = q - 3$

Actividad 2 Resuelve la siguiente ecuación justificando cada paso:

$$\frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 1}{3} = 2x - (x - 3)$$

Actividad 3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(x - 1) = 4x - (x - 3)$

b) $5m - 3(2 - m) = 1 - (m + 2)$

c) $1 - \frac{t - 1}{2} = 3$

d) $\frac{2v}{3} - \frac{v + 1}{2} = 1$

Actividad 4 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{p - 1}{2} - \frac{2(p + 1)}{4} = 1 - \frac{2p + 1}{3}$$

Cuarta Sesión

En esta sesión se introducirá la *ecuación de segundo grado* y el *estudio del número de soluciones a través del discriminante*. Para practicar lo explicado se propondrán las siguientes actividades:

Actividad 1 Averigua el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado sin resolverlas:

a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

b) $-4x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $2x^2 - 3x = 1$

e) $x - 3x^2 = 1$

Actividad 2 Estudia cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado incompleta del tipo $Ax^2 + Bx = 0$.

Actividad 3 Estudia cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado incompleta del tipo $Ax^2 + C = 0$.

Actividad 4 Hay un tercer tipo de ecuaciones de segundo grado incompletas. Son las ecuaciones del tipo $Ax^2 = 0$. Estudia cuántas soluciones puede tener este tipo de ecuación y resuélvela.

Actividad 5 Inventa tres ejemplos:

a) una ecuación de segundo grado completa con dos soluciones.

b) una ecuación de segundo grado completa con una solución.

c) una ecuación de segundo grado completa sin solución.

Quinta Sesión

En esta quinta sesión se estudiarán los algoritmos de *resolución de ecuaciones de segundo grado completas e incompletas*. Para practicar propondremos a los alumnos las siguientes actividades:

Actividad 1 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 125 = 0$

b) $2x^2 + 4 = 0$

c) $-5x^2 = -45$

d) $x^2 - 1 = 0$

e) $x^2 + 1 = 0$

Actividad 2 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 2x = 0$

b) $2x^2 + 4x = 0$

c) $x - 5x^2$

d) $x^2 - x = 0$

e) $9x^2 - 3 = 0$

Actividad 3 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 9x + 14 = 0$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 - 6x + 10 = 0$

d) $1 - x(x - 3) = 4x - 1$

e) $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x-2)}{4} = \frac{(3x-2)^2}{8} - 1$

Sexta Sesión

Esta sesión se dedicará a la *resolución de ecuaciones de primer y segundo grado* a través de las siguientes actividades:

Actividad 1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3(x + 5) = 1 - (4x + 2)$

b) $x - 3(3x - 2) = 3x - 1$

c) $4(2x + 3) - 4(2 - 4x) = 3x + 5(x - 2)$

d) $(3x + 2)(-2) + x = 12$

e) $3(x - 2) - 2(1 - 2x) = 6$

Actividad 2 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{(m - 2)^2}{3} - \frac{(m + 1)(m - 5)}{2} = 1 + \frac{m - 1}{2}$$

Actividad 3 Resuelve la siguiente ecuación y comprueba el resultado:

$$(t - 1)(t + 1) - \frac{6 - 5t}{3} = (t + 2)^2$$

Actividad 4 Resuelve la siguiente ecuación:

$$(v - 1)^2 = \frac{v(v + 1)}{2} + 1$$

Séptima Sesión

En esta séptima sesión se comenzará con la *resolución de problemas mediante el uso de ecuaciones de primer grado*. Proponemos los siguientes problemas:

Actividad 1 Si sumamos 5 unidades al doble de un número el resultado es el mismo que si le sumáramos 7 unidades. ¿Cuál es el número?

Actividad 2 La suma de tres números naturales consecutivos es 84. Halla dichos números.

Actividad 3 La valla del patio rectangular de un colegio mide 3600 metros. Si su largo es el doble que su ancho, ¿Cuáles son las dimensiones del patio?

Actividad 4 Un terreno rectangular tiene un perímetro de 640 *m*. Calcula las dimensiones del terreno sabiendo que uno de sus lados mide 8 *m* más que el otro.

Actividad 5 Pablo quiere repartir 60 euros entre Rosa, Marcos y María, de forma que Marcos reciba 4 euros más que Rosa y María reciba tanto como Marcos y Rosa Juntos. ¿Qué cantidad recibirá cada uno?

Actividad 6 En una reunión hay triple número de mujeres que de hombres y doble número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántas mujeres, hombres y niños hay si asistieron a la reunión 60 personas?

Actividad 7 Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto, 13, y su padre, 43. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

Actividad 8 La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Octava Sesión

En esta sesión se continuará con la *resolución de problemas a través de ecuaciones de segundo grado*. Proponemos los siguientes:

Actividad 1 Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 centímetros menos que la altura y la diagonal mide 10 centímetros.

Actividad 2 Al aumentar en 5 metros el lado de un cuadrado, su superficie aumenta en 75 metros cuadrados. Calcula el lado del cuadrado.

Actividad 3 Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos.

Actividad 4 Un rectángulo la base mide el triple que la altura. Si disminuimos en 1 *cm* cada lado, el área inicial disminuye en 15 *cm*. Calcular las dimensiones y el área del rectángulo inicial.

Actividad 5 Hallar tres números impares consecutivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.

Actividad 6 La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

Actividad 7 Determina las medidas de un triángulo rectángulo, sabiendo que su perímetro es 80 *cm* y la suma de los catetos es 46 *cm*.

Actividad 8 En un círculo, la distancia entre dos cuerdas paralelas congruentes es de 12 *cm*. Cada cuerda mide 6 *cm* más que el radio. Determina el radio.

Novena Sesión

En esta última sesión previa al examen se propondrá a los alumnos y alumnas una serie de ejercicios que combinen todo lo estudiado en la unidad. Son los siguientes:

Actividad 1 De las siguientes ecuaciones indica cuáles son polinómicas e indica su grado:

a) $3^x - 1 = 4x$

b) $5x^3 - 3x^4 = x$

c) $\sqrt{2x - 1} = 4$

d) $2(x - 1)(x + 1) = 5$

Actividad 2 Averigua el número de soluciones de la siguiente ecuación a través del discriminante. Una vez hecho esto, resuelve la ecuación:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Actividad 3 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{3x - 1}{20} - \frac{2(x + 3)}{5} = \frac{4x + 2}{15} - 5$$

Actividad 4 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{(x + 2)^2}{5} - \frac{x^2 - 9}{4} = \frac{(x + 3)^2}{2} + \frac{1}{5}$$

Actividad 5 Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 14,30 euros.

El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y este cuesta el doble que el helado. ¿Cuál era el precio de cada artículo?